Digitized by Google

11. 1. 158

Digitized by Google

SCIENTIA
NAVALIS
SEV
TRACTATVS
DE
CONSTRVENDIS AC DIRIGENDIS
NAVIBVS
PARS POSTERIOR
IN QVA
RATIONES AC PRAECEPTA
NAVIVM CONSTRVENDARVM
ET
GVBERNANDARVM FVSIVS EXPONVNTVR

AVCTORE

LEONHARDO EVLERO

PROF. HONORARIO ACADEMIAE IMPER. SCIENT. ET
DIRECTORE ACAD. REG. SCIENT. BORVSSICAE.

*INSTAR SVPPLEMENTI AD TOM. I. NOVORVM
COMMENTAR. ACAD. SCIENT. IMPER.*

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM
cIɔ Iɔcc XL IX.

Digitized by Google

Index Capitum

Caput I. *De Nauibus in genere a* §. 1. *ad* §. 95.
--- II. — *ſitu aequilibrii nauium a* §. 96. *ad* §. 191
--- III. — *ſtabilitate ſitus aequilibrii a* §. 192. *ad* § 287.
--- IV. — *motu nauium oſcillatorio a* §. 288. *ad* §. 387.
--- V. — *inclinatione, quam naues a viribus quibuscunque patiuntur a* §. 388. *ad* §. 469.
--- VI. — *actione gubernaculi a* §. 470. *ad* §. 551.
--- VII. — ---- *remorum a* §. 552. *ad* §. 671.
--- VIII. — *conſtructione nauium remis propellendarum a* §. 672. *ad* §. 727.
--- IX. — *vi, quam ventus in vela exerit a* §. 728. *ad* §. 811.
--- X. — *malorum conſtitutione a* §. 812. *ad* §. 895.
--- XI. — *curſu nauium obliquo a* §. 896. *ad* §. 967.

Digitized by Google

Cap. I.
DE NAVIBVS IN GENERE.

§. 1.

Quanquam in ſuperiori libro Theoria de ſitu et motu corporum aquae innatantium tam ſuſe et luculenter eſt expoſita, vt eius eximius vſus cum ad naues conſtruendas tum ad dirigendas et gubernandas non difficulter perſpiciatur: tamen accurata traditorum praeceptorum ad naues cuiusque generis accommodatio eo magis neceſſaria videtur, quo maiore doctrina nauigationis, pro vti quidem ea etiamnunc tractari ſolet, indiget emendatione. Quae enim in praecedente libro continentur, proprie ad natationem quorumque corporum generatim ſpectant, neque concluſiones ad nauigationis vſum ex iis ſunt formatae, niſi quas propoſitiones tractatae vltro ſuppeditauerunt. Quod autem potiſſimum eſt, regulae, quae quidem ſunt prolatae, non ſolum nimium ſunt diſperſae, ſed etiam quandoque inter ſe pugnant: ex quo neceſſitas huius peculiaris tractationis eo magis elucet.

§. 2. Hanc obrem in praeſenti libro omnia, quae in praecedente inuenta ſunt et demonſtrata, ad vſum nauigationis atque ad praxin accommodare conſtitui: quo in negotio ſingula, quae ad ſcientiam naualem pertinent, ſecundum certa capita diſtribui ac digeri conueniet, quo cunctae huius ſcientiae partes ordine percurri atque accurate pertractari quam commodiſſime queant. Tot enim ac tam diuerſae ſunt res, quibus ſcientia naualis continetur, vt, niſi ſingulae diligentiſſime ſeorſim perpendantur,

Digitized by Google

et deinceps ſumma circumſpectione inter ſe comparentur et coniungantur; vix quicquam ad vtilitatem publicam traduci poſſit. Ne igitur iſta tractatio vage inſtituatur, in hoc capite doctrinam de nauibus ingenere proponam, vt non ſolum quibus de rebus explicari oporteat intelligatur, ſed etiam quem ordinem, quamque operis partitionem ſequi expediat.

§. 3. Quantumuis naues, ſi in genere conſiderentur, cum ratione magnitudinis, tum figurae, tum deſtinationis etiam diſcrepent inter ſe, tamen omnes communibus aliquot proprietatibus praeditas eſſe deprehendimus. Primo enim omnes naues ad natandum aptae eſſe debent, in hocque ipſa nauium eſſentia continetur: ſecundo naues a quaque rudi mole, quae pariter aquae innatare valeat, diſcernuntur eo, quod cum hominibus tum oneribus quibusvis excipiendis et vehendis ſint pares. Tertio omnes naues etiam in hoc conueniunt, vt ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus conſtent, ſi quidem figura externa ſpectetur, quae ambo nauium latera conſtituant, ac plano verticali per medium nauis ſecundum longitudinem tranſeunte a ſe inuicem ſecernantur. Quarto quoque omnium nauium hic ſolet eſſe finis principalis, vt a viribus quibuscunque per aquam promoueri queant. Atque his quatuor rebus natura nauium ingenere ſpectatarum aptiſſime comprehendi videtur.

§. 4. Si ergo iuxta primam proprietatem communem conſideremus nauem aquae inſidentem vel innatantem, duae partes inter ſe maxime diuerſae ſponte ſe offerunt, quarum altera complectitur portionem ſupra aquae ſuperficiem eminentem altera vero portionem ſub aqua mer-

Digitized by Google

ſam: haecque diſtinctio in examine et diiudicatione nauium maximi eſt momenti. Etſi enim eiusdem nauis prout magis minusue eſt onerata, ita etiam maior minorue pars ſub aqua verſatur, atque ipſa pars ſubmerſa mutatur, ſi nauis inclinetur; tamen hae in aequalitates non admodum ſpectari ſolent: ſed quando de parte ſubmerſa ſermo eſt, quae carina cuiusque nauis appellatur, ea nauis portio intelligitur quae infra aquae ſuperficiem abditur, cum nauis debito modo eſt onerata, ac ſitum erectum in aqua tenet.

§. 5. Eſt itaque carina ea cuiusque nauis portio, quae ſubmerſioni eſt deſtinata, et quae actu infra aquae ſuperficiem verſatur tum, quando nauis ita, vt decet, eſt onuſta, neque viribus externis ex ſitu aequilibrii declinatur. Nititur igitur magnitudo carinae onerum, quibus ferendis nauem parem eſſe oportet, quantitate et pondere. Quo plura enim onera grauioraque pondera ſunt vehenda, eo amplior eſſe debet carina atque omnino ſecundum primam hydroſtaticae regulam quantitas carinae vniuerſae nauis onustae pondere determinatur. Dato enim tam ipſius nauis quam onerum portandorum pondere, volumen carinae tantum eſſe debet, vt aequale volumen aquae tantundem ponderet, quantum nauis et onera imponenda coniunctim.

§. 6. Cum igitur quantitas totius nauis a quantitate carinae pendeat, haec vero ipſa a pondere nauis onuſtae, quantitas nauis aptiſſime definietur pondere ipſius, quando completam habet onerationem. Ita quantitas cuiusque navis commodiſſime menſuratur numero librarum vel centenario rum pondus nauis debito modo oneratae experimentium. Vel quod eodem redit menſura eadem nauis habebitur, ſi definiatur

Digitized by Google

volumen carinae in pedibus cubicis. Nam cum pes aquae cubicus pendat circiter 64 libras, ſi numerus pedum cubicorum per 64 multiplicetur, prodibit numerus librarum ponderi totius nauis onuſtae reſpondens; qui eſt alter menſurandi modus. Contra vero ſi detur pondus nauis cum oneribus per libras expreſſum, numerus librarum per 64 diuiſus dabit volumen carinae in pedibus cubicis.

§. 7. Intelligo hic pedes Rhenanos, librasque Pariſinas ſedecim vnciarum; neque vero iſta relatio generatim exactiſſime definiri poteſt; cum alia aqua alia ſit grauior, atque eo magis, quo plus ſalis in ſe continet. Praeterea etiam quantitas onerum non tam accurate ſolet definiri; ſed aliquando plura onera aliquando etiam pauciora imponuntur quam deſtinatus onerandi modus requirit. Vnde fit vt tam ob ipſam onerum quantitatem, quam ob diuerſae aquae grauitatem ſpecificam modo aliquanto maior modo aliquanto minor nauis pars aquae immergatur, quam ea, quae carina vocatur. Interim tamen carina nobis ſemper erit determinata nauis portio, quae aquam ſubit quando nauis debitam obtinet onerationem: hocque non obſtante, cum maior minorue pars aquae immergitur, eius ratio, ſi opus fuerit, haberi poterit.

§. 8. Duae ergo memoratae cuiusque nauis partes, quarum altera ſupra aquam eminet, altera in aquam immergitur, a ſe inuicem ſeparatur ſectione horizontali in ipſa aquae ſuperficie facta; quam ſectionem vti in priore libro ſectionem aquae appellabimus. Sectio igitur aquae ſeparat partem nauis ſuperiorem a carina, atque eſt figura terminata, cuius perimeter in ipſa nauis ſuperficie eſt ſita. Ex quo ſi data fuerit nauis figura externa vna cum carina, ſimul ſectio

Digitized by Google

ſectio aquae atque aequatio eius naturam exprimens aſſignari poterit. Ex ſuperiore autem libro abunde intelligitur, quanti ſit momenti tam ſectionis aquae figuram quam ipſius carinae noſſe ad naues cum cognoſcendas tum diiudicandas; ita vt ſectio aquae vna ſit ex praecipuis rebus, quas circa naues contemplari oportet.

§. 9. Si porro ad motum nauium progreſſiuum in aqua attendamus, quaelibet nauis in duas partes quoque diſtingui reperietur, quarum altera prora vocari ſolet, altera puppis, quae quidem denominationes ex curſu directo originem traxerunt, ſed tamen etiam ſi curſus inſtituatur oblique, eaedem partes eadem nomina retinent. Prora vero non tam anterior nauis pars vocatur, quam ea quae in motu cum aqua conflictatur; ſiue prora ea nauis vocatur pars, quae vel in aquam impingit, vel in quam aqua irruit. Atque hinc ſimul indoles alterius partis, quae puppis nominatur, facile perſpicitur: puppis namque ea erit nauis portio, quae dum nauis in aqua progreditur nullam aquae alliſionem patitur; ſi quidem curſus ſit directus, vti ponimus; curſus enim obliquus in his nominibus nil mutat, quamuis in re ipſa ingens pariat diſcrimen.

§. 10. Cum igitur ſuperficies nauis, quae quidem ſub aqua verſatur, impulſui aquae eatenus eſt expoſita, quatenus verſus puppim diuergit, ex hoc ipſo quantitas prorae colligi, eaque a puppi diſcerni poterit. Namque ſuperficies nauis eo vsque diuergit, quoad fiat ampliſſima, hincque iterum conuerget, vsque ad extremam puppim. Quamobrem ea nauis ſectio transuerſalis ad directionem curſus perpendicularis proram terminabit atque a puppi ſecernet, quae omnium eſt ampliſſima. Hanc igitur ſectionem

 pro-

Digitized by Google

proram a puppi diſcernentem, cum ſit maximi momenti appellabimus ſectionem tranſuerſalem ampliſſimam, eaque ſimul erit perpendicularis ad ſectionem aquae, quia eſt ad directionem impulſus aquae normalis.

§. 11. Quanquam ratio huius diuiſionis ad ſolam nauium partem inferiorem ſeu carinam reſpicit, tamen etiam ſuperior nauium portio ſupra aquam eminens ſimili modo diſtinguitur. Hanc ob rem ſectio nauis transuerſalis ampliſſima non ſolum carinam, ſed etiam vniuerſam nauem in duas partes diuidit, quarum altera prorae nomen obtinet altera puppis. Saepenumero quidem difficile eſt ſectionem transuerſalem ampliſſimam aſſignare, cum naues plerumque, vbi ſunt ampliſſimae, per ſatis longum interuallum aeque amplae confici ſoleant. At vbi hoc accidit, vt ſectio ampliſſima per interuallum diſperſa eſſe videatur, perinde eſt quaenam ſectio transuerſalis pro ampliſſima habeatur atque error inſenſibilis tuto negligi poteſt.

§. 12. Stabilitis nunc prora et puppi in quacunque naue, quarum illa partem anticam haec poſticam repraeſentat, vltro ſe offerunt ambo latera, dextrum alterum, alterum ſiniſtrum. Vocari autem ſolet latus dextrum id, quod ſtanti in puppi et proram intuenti ad dextram eſt ſitum, ſiniſtrum vero quod huic ad ſiniſtram iacet. Iam autem ſatis ſuperque colligere licet, ambo haec latera inter ſe omnino ſimilia eſſe debere: ſi enim ad curſum directum reſpiciamus, nulla foret ratio cur amborum laterum figurae eſſent diſſimiles: eaedemque rationes, quae figuram alterius lateris determinant, ſimul quoque alterius lateris figuram determinabunt. Quod autem ad curſum nauium obliquum attinet, quia is in vtrumque latus aeque declina-

re

Digitized by Google

re ſolet , propter eum quoque vlla diſſimilitudo inter ambo latera intercedere nequit. Denique iſta ſimilitudine laterum venuſtati maxime conſulitur.

§. 13. Cum igitur in qualibet naui ambo latera debeant eſſe ſimilia , cunctae naues plano diametrali praeditae ſint neceſſe eſt , hoc eſt eiusmodi ſectione , qua tota nauis in duas partes ſimiles et aequales diuidatur. Iſtud ergo planum diametrale erit verticale , ſi quidem vti ponimus nauis ſitum obtinet directum , quoniam in neutrum latus inclinatio eſſe poteſt : ac quia hoc planum diametrale a prora ad puppim porrigitur , ſimul erit normale ad ſectionem transuerſalem ampliſſimam. Quamobrem tam ſectio aquae quam ſectio transuerſalis ampliſſima figurae erunt diametro gaudentes ; in vtraque enim figura interſectio plani diametralis praebebit diametrum , ſimilemque ob rationem omnes ſectiones , quae vel ſunt horizontales , hoc eſt ſectioni aquae parallelae , vel ſectioni transuerſali ampliſſimae parallelae diametrum habebunt , quam pariter planum diametrale in iis deſignabit.

§. 14. Tres itaque habemus in quaque naui principales ſectiones , quarum vna eſt horizontalis ſecundum aquae ſuperficiem facta ſeu ſectio aquae , reliquae autem duae ſunt verticales , altera ſectio transuerſalis ampliſſima , altera vero ipſum planum diametrale : hisque tribus ſectionibus cognitis , ſatis prope totius nauis figura determinabitur , ſi praeter has principales ſectiones omnes ſectiones iis parallelae definiantur. Neque vero ad hoc opus eſt , vt omnium harum ſectionum figurae determinentur , ſed ſufficit , ſi vel ſolae ſectiones horizontales omnes vel alterae verticales ſolae innoteſcant , cum iſtis reliquae ſponte deter-

Digitized by Google

determinentur. Ad nauium autem conſtructionem expedit ſectiones parallelas ampliſſimae ſectioni tranſuerſali aſſignare, quia ſecundum has conſtructio nauium praecipue dirigi ſolet.

§. 15. Si autem ad theoriam, qua conſtructio et gubernatio nauium nititur, reſpiciamus; parum refert quamnam figuram habeat portio nauis ſuperior ex aqua eminens, cum ea neque preſſionem nec impulſum aquae excipiat; hancobrem praecipue in figura carinae inueſtiganda operam collocabimus, atque tantiſper a parte ſuperiore cogitationes omnino abſtrahemus. Si enim pro quouis inſtituto forma carinae commodiſſima fuerit definita, non eſt difficile partem ſuperiorem ad circumſtantias praeſentes accommodare: qua quidem in re finis potiſſimum, cui nauis deſtinatur, eſt ſpectandus, vt tum ad onera geſtanda, tum ad operationes neceſſarias abſoluendas pars ſuperior maxime ſit accommodata: imprimis autem, cum haec pars ſola in aſpectum cadat, decori et venuſtatis ratio eſt habenda.

Tab. I. fig. 1. §. 16. Conſideremus igitur carinam cuiuſuis nauis ſeorſim, cuius ſectio aquae ſit figura plana AEBF in horizonte repraeſentata, atque ADB denotet planum diametrale, ita vt recta AB ſit diameter orthogonalis ſectionis aquae: ſectio vero tranſuerſalis ampliſſima ſit EDF, cuius diameter erit recta verticalis CD, in qua interſecatur a plano diagonali. Huius ergo carinae prora erit portio ADEF, puppis vero reliqua pars BDEF, quae a ſe mutuo ſecernuntur per ſectionem tranſuerſalem ampliſſimam EDF. Quaecunque nunc ſit huius carinae figura, eius natura aptiſſime exprimetur per aequationem tres variabiles inuoluentem. Scilicet pro prora definienda, ſumto in

Digitized by Google

in C initio abſciſſarum, ponatur abſciſſa quaecunque CX $= X$; portioque applicatae ſectionis aquae XR quaecunque $XY = y$; atque longitudo verticalis ex Y ad carinam vsque demiſſa $YZ = z$; quo facto aequatio inter x, y, et z exprimet naturam prorae, ſimilique modo puppis natura exprimetur.

§. 17. Ex aequatione autem inter x, y et z vel data vel inuenta tota carinae figura facile reperietur et ad vſum delineabitur. Primo enim ſi ponatur $z = o$, aequatio inter x et y exprimet naturam ſectionis aquae AEBF, ita vt x ſit abſciſſa CX et y applicata XR. Deinde ſi fiat $y = o$ punctum Z cadet in V, eritque $XV = z$: ex quo aequatio inter x et z exprimet naturam plani diametralis ADB, exiſtente x abſciſſa CX et z applicata XV. Denique ſi in aequatione propoſita trium variabilium ponatur $x = o$, cadet Y in P et Z in M, atque aequatio inter y et z, quarum illa y exponit abſciſſam CP haec vero z applicatam PM; praebebit naturam ſectionis transuerſalis ampliſſimae EDF.

§. 18. Eadem vero aequatio naturam carinae exprimens per tres variabiles x, y et z, non ſolum tam facile praebet tres memoratas ſectiones principales, ſectionem aquae ſcilicet, planum diametrale et ſectionem transuerſam ampliſſimam, ſed etiam ſectiones quascunque his parallelas. Nam ſi ponatur variabilis x conſtans, tum aequatio inter y et z exprimet naturam ſectionis transuerſae RZVS ſectioni ampliſſimae parallelae inter eius abſciſſam $XY = y$ et applicatam $YZ = z$; quae ſectio diſtabit a principali EDF, cui eſt parallela interuallo $CX = x$. Simili modo ſi y ponatur conſtans ſectio

habebitur plano diametrali parallela ab eoque diſtans interuallo y; cuius natura exprimetur aequatione inter coordinatas x et z. Denique ſi variabilis z ponatur conſtans prodibit aequatio inter coordinatas x et y naturam ſectionis horizontalis a ſectione aquae interuallo z diſſitae exponens.

§. 19. Si igitur deſcriptionem ad receptum naues conſtruendi modum maxime accommodare velimus, conueniet ſingulas ſectiones transuerſales, verticales ſcilicet et plano diametrali normales determinari et deſcribi. Neque vero omnes has ſectiones, quarum numerus foret infinitus, repraeſentare neceſſe eſt; verum ſufficit aliquot earum datis interuallis a ſectione ampliſſima tam verſus proram quam verſus puppim diſtantes deſcribere, cum intermediae vi ſtructurae ex his ſponte determinentur. Si enim figura puppis et prorae fuerit continua, tum ſectiones transverſae puppim ſpectantes obtinebuntur tribuendis ipſi x negatiuis valoribus. Sin autem natura puppis peculiari exprimatur aequatione, tum ex hac ipſa aequatione ſectiones transuerſales puppis ſimili modo definientur, quo eae, quae in prora ſunt ſitae, ex aequatione naturam prorae exprimente.

§. 20. Cum igitur imprimis volumen carinae noſſe oporteat, oſtendendum eſt, quomodo quantitas huius voluminis ex aequatione inter memoratas tres variabiles commodiſſime determinari queat. Ad hoc autem requiritur, vt aequatio iſta tres variabiles continente differentietur; ponamus ergo prodiiſſe hanc aequationem $Pdx + Qdy + Rdz = o$; quae innumerabilibus formis exprimi poteſt, prout integralis ante differentiationem fuerit diſpoſita.

Pona-

Digitized by Google

Ponamus nunc x conſtans, habebitur ob $dx = o$ haec aequatio $Qdy + Rdz = o$ ad ſectionem RVS pertinens, quare cum ſit $dy = \frac{-Rdz}{Q}$ erit area XYZV$= \int zdy = \int \frac{-Rzdz}{Q}$ integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $y = o$ Si iam in hoc integrali ponatur $z = o$, dabit $\int \frac{-Rzdz}{Q}$ aream XVR, ac $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ aream totius ſectionis transuerſae RVS; eo quod omnes hae ſectiones conſtant ex duabus partibus aequalibus et ſimilibus.

§. 21. Quoniam ergo in integrali $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ poſitum eſt $z = o$, quo caſu abit y in XR, quae eſt applicata ſectionis aquae, ideoque per abſciſſam reſpondentem CX $= x$ determinatur ope aequationis naturam ſectionis aquae continentis: expreſſio $2\int \frac{-Rzdz}{Q}$ erit functio ipſius x tantum, neque amplius quantitates y et z in ſe comprehendet. Quare ſi ea multiplicetur per dx, erit $2dx\int \frac{-Rzdz}{Q}$ elementum ſolidi EDFSRV, ex quo hoc volumen erit $= 2\int dx \int \frac{-Rzdz}{Q}$, integrali ita accepto, vt euaneſcat poſito $x = o$. Si igitur poſt integrationem hanc ponatur $x =$ CA, praebebit integrale prodiens ſoliditatem prorae, ad quam ſi addatur ſoliditas puppis ſimili modo inuenienda, habebitur integrum carinae volumen, quod quaerebatur.

§. 22. Praeter hanc expreſſionem plures aliae exhiberi poſſunt, quae pariter ac illa ſoliditatem propoſitae carinae exponent, prout alia atque alia voluminis elementa conſiderentur. Primo enim cum ſpatii XYZV elementum ſit zdy, dabit $2\int zdy$ aream RVS, ſi ita integretur, vt euaneſcat poſito $y = o$, tumque ponatur $z = o$. Simili modo eadem area exprimetur formula $2\int ydz$, integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $z = o$, tumque ponatur y

 $= o$.

Digitized by Google

$=o$. Quare tam $2\int dx \int z\,dy$, quam $2\int dx \int y\,dz$ praebebit ſoliditatem prorae integralibus ita ſumtis vt euaneſcant poſito $x=o$, tumque ponatur $x=AC$. Expedit autem eiusmodi formulas integrales inducere, quae euaneſcant, ſi ea quantitas cuius differentiale ineſt, ponatur $=o$.

§. 23. Pari modo ſi ponatur y conſtans, expreſſio $\int z\,dx$ ita integrata vt euaneſcat poſito $x=o$, ſi tum ponatur vel $z=o$ vel $x=AC$, dabit ſectionis prorae plano diametrali parallelae per Y factae aream; hincque $2\int dy \int z\,dx$ exprimet ſoliditatem totius prorae, ſi quidem integrale ita capiatur, vt euaneſcat poſito $y=o$, tumque fiat $y=CE$. Eodem modo illa ſectio plano diametrali parallela exprimetur formula $\int x\,dz$ integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $z=o$, tumque fiat vel $x=o$ vel $z=CD$, vnde integrale $2\int dy \int x\,dz$ quoque ſoliditatem prorae exhibebit. Denique ſi initio z ponatur conſtans formulae $2\int y\,dx$ et $2\int x\,dy$ debito modo integratae dabunt ſectiones prorae horizontales, ideoque tam formula $2\int dz \int y\,dx$ quam $2\int dz \int x\,dy$ exprimeat prorae volumen: ita vt ſex diuerſae habeantur expreſſiones ad ſoliditatem prorae inueniendam.

§. 24. Cum autem haec ita late pateant, vt eorum vſus difficulter perſpici poſſit, conueniet hoc ipſum problema ſpecialius pertractari, atque ad vtilitatem conſtructionis accommodari. Hoc in negotio ſequemur methodum iam in ſuperiore libro adhibitam, qua omnes ſectiones vni ex tribus principalibus parallelas inter ſe vel ſimiles vel affines poſuimus. Ex hac tractatione id nanciſcemur commodi, vt data carina non difficulter in aequationem poſſit redigi: conſideratis enim tribus ſectionibus princi-

principalibus iisque ad aequationes reuocatis facile iudicare licebit, vtrum ſectiones vni earum parallelae ſint ſimiles an affines: quorum vtrumuis ſi fuerit compertum aequatio localis naturam iſtius carinae continens exhiberi poterit. Hanc obrem modum aperiam, cuius ope cum ex ſimilitudine tum ex affinitate ſectionum parallelarum tam aequatio localis inter tres coordinatas formari quam volumen definiri queat.

§. 25. Quod primo ad ſimilitudinem figurarum attinet, eius quidem notio ex elementis ſatis habetur diſtincta: attamen expediet eam ad noſtrum vſum adaptare. Sit igitur CED ſemiſſis ſectionis cuiusdam principalis, ſcilicet vel ſectionis ampliſſimae vel ſectionis aquae, vel etiam portio plani diametralis ſiue in prora ſiue puppi ſumta; cui omnes ſectiones parallelae ſint ſimiles, quarum vna ſit figura *ced*. Si iam detur figura CED baſin habens CE et altitudinem CD, ad aliam quamcunque baſin *ce* figura ſimilis *ced* deſcribi poterit Primo enim ex ſimilitudine erit $CE : CD = ce : cd$, vnde altitudo *cd* datur. Deinde ſumta abſciſſa quacunque *cp*, quae ſit ad CP vt *ce* ad CE erit applicata *pm* ad PM pariter vt *ce* ad CE vnde conſtructio figurae *ced* admodum commoda conſequitur. Tab. I. fig. 2.

§. 26 Deinde etiam, ſi detur aequatio naturam figurae CED exprimens, ex ea aequatio ad figuram quamcunque ipſi ſimilem facile elicitur. Vocentur enim $CE = A$; $CP = X$ et $PM = Y$, dataque ſit aequatio, qua relatio inter X et Y continetur: ſi ponatur $ce = a$, ac capiatur $cp = x = \frac{aX}{A}$, erit $pm = y = \frac{aY}{A}$. Quare cum ſit $X = \frac{Ax}{a}$ et $Y = \frac{Ay}{a}$, ſi iſti valores in aequatione inter X et Y naturam curuae CED exprimente loco X et Y

ſubſtituantur prodibit aequatio inter x et y, qua natura curuae ſimilis ced ad datam baſin ce applicata exprimetur: hocque pacto aequationes pro omnibus ſectionibus ipſi CED ſimilibus reperientur.

§. 27. Si igitur figurae ſimilis ced conſtruendae propoſita fuerit ſola baſis ce, ex ea tota figura determinatur: ideoque eius altitudo cd ſponte definitur; poſita enim figurae principalis altitudine $CD = B$, ob $CD : cd = CE : ce$ erit $cd \frac{aB}{A}$. Porro quoque area cuiusuis figurae ſimilis ced ex area figurae principalis CED data aſſignari poteſt: namque poſita area $CED = E$, cum areae figurarum ſimilium teneant rationem duplicatam laterum homologorum, erit area figura $ced = \frac{a^2 E}{A^2}$. Idem oſtendit calculus; cum enim ſit area $CED = \int Y dX = E$, atque area $ced = \int y dx$ integralibus ad integras figuras extenſis; erit ob $y = \frac{aY}{A}$ et $x = \frac{aX}{A}$ area $ced = \int \frac{a^2 Y dX}{A^2} = \frac{a^2 E}{A^2}$.

§. 28. Antequam figuras ſimiles relinquamus conueniet in earum centrum grauitatis inquirere, cum eius notitia abſolute ſit neceſſaria ad nauium proprietates reliquas eruendas. Ponamus itaque figurae principalis CED datum eſſe centrum grauitatis, idque ſitum eſſe in puncto G. ita vt ambo interualla GH et CH ſint cognita. Hinc ergo figurae ſimilis ced centrum grauitatis g in ſimili loco erit poſitum, atque interualla gh et ch ad interualla GH et CH rationem habebunt laterum homologorum ce ad CE: ex quo erit $gh = \frac{a \cdot GH}{A}$ et $ch = \frac{a \cdot CH}{A}$. Hacque proprietate calculus centri grauitatis alias perquam prolixus mirifice contrahitur ac ſimplicior redditur.

§. 29.

§. 29. Figurae, quas hic vocamus affines, multo latius patent quam ſimiles, hasque ſub ſe complectuntur. Quemadmodum enim figura ſimilis, ſi eius vnica quantitas detur, ex figura principali tota determinatur, ita ad figuram affinem determinandam duo latera prolubitu aſſumere licet. Repraeſentet enim CED figuram principalem, cuius baſis ſit CE et altitudo CD; huic figurae affinis poterit aſſignari, quae non ſolum datam habeat baſem *ce* ſed etiam datam altitudinem *cd*. Ita autem hae figurae affines ſunt comparatae, vt ſi capiantur abſciſſae CP, *cp* baſibus CE et *ce* proportionales, applicatae PM et *pm* ſeſe ſint habiturae vti altitudines CD et *cd* ex quo ſi deſcripta ſit figura principalis CED, huius proprietatis ope ad quamuis propoſitam baſin et altitudinem figura affinis facile delineari poterit. Intelligitur ergo, ſi accidat vt ſit $cd : ce = CD : CE$ tum figuram affinem *ced* abire in ſimilem. Tab. II. fig. 1.

§. 30. Quod ſi ergo detur aequatio naturam figurae principalis CED exprimens in promtu erit aequationem pro figura quacunque affini exhibere. Poſitis enim $CE = A$, $CD = B$; abſciſſa $CP = X$ et applicata $PM = Y$, data ſit aequatio inter X et V: figurae autem affinis deſcribendae *ced* ſit baſis $ce = a$, altitudo $cd = b$, abſciſſa $cp = x$ et applicata $pm = y$. His ergo poſitis ex natura affinitatis ſequitur, ſi fuerit $A : a = X : x$ fore $B : b = Y : y$; vnde fit $x = \frac{aX}{A}$ ſeu $X = \frac{Ax}{a}$, atque $y = \frac{bY}{B}$ ſeu $Y = \frac{By}{b}$. Quamobrem ſi in aequatione in X et Y data ſcribatur $\frac{Ax}{a}$ loco X et $\frac{By}{b}$ loco Y, prodibit aequatio inter *x* et *y* pro curua affini *ced*.

§. 31.

Digitized by Google

§. 31. Quod ad areas figurarum affinium attinet eae ſe habebunt in ratione compoſita baſium et altitudinum, ita vt, ſi area figurae principalis CED fuerit $=E$, area figurae *ced* futura ſit $= \frac{abE}{AB}$. Namque figurae *ced* area eſt $= \int y\,dx$ integratione per totam figuram extenſa; cum autem ſit $y = \frac{bY}{B}$ et $x = \frac{aX}{A}$, erit $\int y\,dx = \frac{ab}{AB}\int Y\,dX$. At $\int Y\,dX$ exhibet aream figurae principalis CED quam poſuimus $=E$ ita vt ſit $\int Y\,dX = E$; quocirca area figure affinis *ced* erit $= \frac{abE}{AB}$. Nouo igitur calculo non erit opus ad areas figurarum affinium determinandas, ſed eae pariter ac figurae ſimiles ex data figurae principalis area definiri poſſunt.

§. 32. Pari facilitate locus centri grauitatis in quaque figura affini determinari poterit, ſi datus fuerit locus centri grauitatis in figura principali, qui ſit G. Cum enim ducta ex G ad baſin CE perpendiculari GH ſit $GH = \frac{\int YY\,dX}{2\int Y\,dX}$ atque $CH = \frac{\int YX\,dX}{\int Y\,dX}$, integralibus debito modo ſumtis, vt ad totam figuram pateant: ſi figurae affinis centrum grauitatis ſitum ſit in g, erit pari modo $gb = \frac{\int yy\,dx}{2\int y\,dx}$; et $cb = \frac{\int yx\,dx}{\int y\,dx}$. At ob $x = \frac{aX}{A}$ et $y = \frac{bY}{B}$, erit $gb = \frac{b\int YY\,dX}{2B\int Y\,dX} = \frac{b \cdot CH}{B}$, atque $cb = \frac{a\int YX\,dX}{A\int Y\,dX} = \frac{a \cdot CH}{A}$. Vnde erit $CH : cb = CE : ce$; atque $HG : bg = CD : cd$, quae analogiae punctum g praebent facillime.

§. 33. Hae autem figurae tam ſimiles quam affines ſufficere videntur ad formas omnium omnino nauium repraeſentandas, ſaltem vero proxime; in praxi enim minutiae ſunt negligendae. Hinc igitur orientur ſex nauium ſpecies, quarum prima eas naues comprehendat, in quibus omnes ſectiones horizontales ſint ſectioni aquae ſimiles: ſecunda ſpecies

Digitized by Google

cies vero eas, quae habent omnes ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae parallelas eidem ſimiles: ad tertium vero eae pertineant naues, in quibus ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſint ſimiles. Pari modo ſpecies quarta, quinta et ſexta eas complectentur naues, in quibus ſectiones, quae in in prioribus ſpeciebus erant ſimiles tantum ſunt affines. Atque ad aliquam harum ſex ſpecierum cunctae naues referri poſſe videntur, quamobrem ſingulas has ſpecies percurramus praecipuasque proprietates recenſeamus.

§ 34. Sit igitur ADB carina nauis, cuius figura ad primam ſpeciem pertineat: exiſtentibus omnibus ſectionibus horizontalibus SRTQ ſectioni aquae AFBE ſimilibus, quae omnes ſimiliter ſecentur a ſectione ampliſſima EFD. Poſito plano diametrali ADB, vocetur $AC = a$, $CE = CF = b$; et $CD = c$ ac cum ſectio aquae AEBF data ſit, ponitur abſciſſa eius $CI = p$; et applicata $IK = IL = q$; dabiturque aequatio inter p et q, qua natura ſectionis aquae exprimetur. Ponamus porro datam eſſe ſectionem ampliſſimam EDF, cuius diameter eſt CD; ita vt vocatis abſciſſa $CP = r$ et applicata $PQ = s$ habeatur aequatio relationem inter r et s continens. Hisque datis duabus ſectionibus principalibus tota carinae figura determinabitur ex ſimilitudine ſectionum horizontalium. Tab. II. fig. 2.

§. 35. Concipiatur ſectio horizontalis SQTR per punctum P facta, ac cum tam portio proram ſpectans QSR ſimilis ſit portioni ſectionis aquae in prora ſitae EAF, quam portio puppis QTR portioni EBF, erit ex natura ſimilitudinis $CE : CA = PQ : PS$ vnde fit $PS = \frac{as}{b}$. Cum autem PS ſit applicata in plano diametrali ADB

 reſpon-

reſpondens abſciſſae $CP = r$, dabitur ſimul aequatio naturam plani diametralis exprimens ex aequatione inter r et s data. Ex quo perſpicitur in hac nauium ſpecie ſectionem ampliſſimam et planum diametrale a ſe inuicem pendere, ita vt data alterius figura ſimul figura alterius determinetur: ideoque perinde eſt, vtra harum ſectionum cum ſectione aquae coniungatur ad totam figuram determinandam. Sunt igitur portio plani diametralis ACD et ſemiſſis ſectionis ampliſſimae ECD figurae affines communem altitudinem CD habentes: ſimilique modo figura CDB his erit affinis ob $CB : PT = CE : PQ$; atque omnes ſectiones verticales per punctum C factae erunt figurae affines eandem habentes altitudinem CD ſed diuerſas baſes.

§. 36. Quoniam figura QSR ſimilis eſt figurae EAF ſumatur in eius diametro abſciſſa PO ſimilis abſciſſae CI, ita vt ſit $b : s = p : PO$, ſeu $PO = \frac{ps}{b}$; erit applicata reſpondens $OZ = OW = \frac{qs}{b}$. Ducantur nunc rectae verticales OX et ZY, atque cum Z ſit punctum in ſuperficie carinae, eius ſitum ope aequationis tres variabiles inuoluentis definiamus. Hunc in finem vocentur $CX = x$ $XY = y$ et $YZ = z$: eritque $x = \frac{ps}{b}$ ob $CX = PO$; porro $y = \frac{qs}{p}$ ob $XY = OZ$; atque $z = r$ ob $YZ = XO = CP$. Cum autem detur aequatio inter r et s, aequabitur s functioni cuidam ipſius z, quae in aequationibus $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$ ſubſtituatur. Denique ob q per p datam eruatur valor vtriusque ex aequatione $\frac{x}{y} = \frac{p}{q}$, eiusque valor in alterutra ſubſtitutus dabit aequationem inter x et y et z, qua natura ſuperficiei propoſitae exprimetur.

§. 37.

§. 37. Cum igitur aequatio inter tres coordinatas orthogonales x, y et z naturam ſuperficiei cuiusuis aptiſſime exprimat, operae pretium erit inueſtigare cuiusmodi formam habitura ſit iſta aequatio, quando ad figuram huius ſpeciei pertinet: vt deinceps, ſi viciſſim aequatio proponatur, iudicare queamus, an figura per aequationem expreſſa ad primam hanc ſpeciem referenda ſit an ſecus. Cum ergo ſit $r = z$ et s per r detur, erit $s =$ functioni ipſius z, quae ſit Z: deinde cum ſit $\frac{p}{q} = \frac{x}{y}$ atque q per p detur, aequabitur p functioni nullius dimenſionis ipſarum x et y. Quare ob $x = \frac{ps}{b} = \frac{pZ}{b}$, erit $Z = \frac{bx}{p}$, hoc eſt functio quaepiam ipſius z aequalis erit functioni vnius dimenſionis ipſarum x et y: haecque eſt proprietas eſſentialis aequationum figuras ad hanc primam ſpeciem pertinentes complectentium.

§. 38. Quoniam deinde ad conſtructionem nauium maxime requiritur, vt ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae EDF parallelae definiantur, ponamus eiusmodi ſectionem fieri per punctum X, erit huius ſectionis abſciſſa $XY = y$ et applicata reſpondens $YZ = z$, quia vero interuallum CX pro hac ſectione eſt conſtans, ponatur $CX = x = g$; atque in ſectione aquae ducatur ordinata quaecunque KIL, exiſtente $CI = p$ et $IK = q$. Cum iam ſit $x = \frac{ps}{b}$, erit $s = \frac{bg}{p}$. In ſectione igitur ampliſſima CDE ſumatur applicata $PQ = \frac{bg}{p} = \frac{CE \cdot CX}{CI}$ cuius proinde reſpondens abſciſſa CP dabitur. Sumta ergo pro ſectione quaeſita abſciſſa $XY = \frac{qs}{b} = \frac{gq}{p} = \frac{CX \cdot IK}{CI}$; habebitur applicata reſpondens $YZ = CP$; vnde tam natura quam conſtructio ſingularum ſectionum transuerſalium cognoſcitur.

Digitized by Google

§. 39. Vt denique ſoliditatem iſtius carinae reperiamus, ſit area totius ſectionis aquae $AEBF = E$, ex qua ob ſimilitudinem habebitur area ſectionis SQTR illi ſimilis $= \frac{PQ^2 . E}{CE^2} = \frac{Es^2}{b^2}$ quae multiplicata per differentiale altitudinis $CP = \frac{r}{p}$, dabit elementum ſoliditatis $= \frac{Es^2 dr}{b^2}$. Ex quo volumen carinae inter ſectionem aquae AEBF et hanc ſectionem illi parallelam SQTR comprehenſae erit $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$ integrali ita ſumto, vt euaneſcat poſito $r = o$. Quare ſi poſt integrationem formulae $\int s^2 dr$ hoc modo inſtitutam ponatur $r = CD = c$, prodibit totius carinae volumen $= \frac{E}{b^2} \int s^2 dr$, quod igitur tum ab area ſectionis aquae tum a natura ſectionis ampliſſimae pendebit.

§. 40. Ad quantitatem voluminis carinae commodius exprimendam eiusque inuentionem faciliorem reddendam ſit ſectionis ampliſſimae EDF area $= F$, atque huius ſectionis ſemiſſis CDE centrum grauitatis ſitum ſit in g, ex quo ad CD ducatur perpendicularis gG. Quibus factis erit $F = 2 \int s\, dr$, atque $Gg = \frac{\int s^2 dr}{2 \int s\, dr}$, his integralibus ita acceptis vt euaneſcant poſito $r = o$, tumque facto $r = CD = c$. Hinc itaque erit $\int s^2 dr = 2\, Gg . \int s\, dr = F . Gg$. Quocirca ſoliditas carinae propoſitae erit $= \frac{E\, F\, Gg}{b^2} = \frac{E\, F\, Gg}{CE^2}$; vnde facilis regula pro inuenienda carinae ſoliditate practice emergit. Scilicet productum ex areis ſectionis aquae et ſectionis ampliſſimae multiplicetur per interuallum Gg, et quod reſultat diuidatur per quadratum CE, quotusque indicabit volumen carinae quaeſitum.

§. 41. Vt haec clarius inſpiciantur iuuabit rem exemplo illuſtraſſe, ſit igitur ſectio aquae AEBF ellipſis centrum habens in C, cuius axes ſint $AB = 2a$ et $EF = 2b$; erit

Digitized by Google

erit ex natura ellipſis $q = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - p^2)}$; atque poſita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$ erit area ſectionis aquae $= \pi ab$. Sit praeterea ſectio ampliſſima EDF parabola verticem habens in D, erit ex natura parabolae $s = b \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Hinc ſtatim natura plani diametralis ADB innoteſcet, quae pariter erit parabola verticem in D et axem DC habens. Nam eius applicata PS abſciſſae CP reſpondens erit $= \frac{as}{b} = a \sqrt{\frac{c-r}{c}}$. Illius quidem parabolae ſectionem ampliſſimam exhibentis parameter eſt $\frac{bb}{c}$, huius vero parameter eſt $= \frac{aa}{c}$.

§. 42. Aequatio vero inter tres variabiles $CX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, quae naturam huius carinae exprimat, inuenietur ex tribus hiſce aequalitatibus, $z = r$; $x = \frac{ps}{b}$ et $y = \frac{qs}{b}$. Quoniam ergo eſt $z = r$ erit $s = b \sqrt{\frac{c-z}{c}}$: atque equatio $\frac{x}{y} = \frac{p}{q} = \frac{ap}{b\sqrt{(a^2-p^2)}}$, dabit $p = \frac{abx}{\sqrt{(a^2y^2+b^2x^2)}}$. His ergo valoribus loco p et s in aequatione $x = \frac{ps}{b}$ ſubſtitutis prodibit $\sqrt{c(a^2y^2+b^2x^2)} = ab \sqrt{(c-z)}$, ſeu $a^2cy^2 + b^2cx^2 = a^2b^2c - a^2b^2z$, vnde habebitur $z = \frac{(a^2b^2-a^2y^2-b^2x^2)}{a^2b^2} c$ quae eſt aequatio localis ad ſuperficiem propoſitam: in qua cum variabiles duabus plures dimenſiones non habeant, omnes ſectiones vtcunque factae erunt ſectiones conicae.

§. 43. Ex aequatione locali inuenta intelligitur omnes ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae parallelas quoque eſſe parabolas, itemque omnes ſectiones plano diametrali parallelas. Quamobrem in hac figura non ſolum ſectiones horizontales omnes ſunt figurae inter ſe ſimiles, ſed etiam ſectiones verticales, quae tam ſectioni ampliſſimae quam plano diametrali ſunt parallelae, inter ſe erunt

 ſimiles,

Digitized by Google

ſimiles, ex quo iſta figura non ſolum ad primam ſpeciem, ſed ſimul ad ſecundam et tertiam pertinet. Soliditas autem huius figurae facile inuenitur; cum enim ſit $E = \pi ab$ et $\int ssdr = \frac{bb}{c}\int dr\,(c-r) = \frac{bb}{2c}\,(2cr-rr)$, ponatur $r = c$ fiet $\int s^2 dr = \frac{bbc}{2}$: ex quo huius carinae volumen, quod generaliter erat $= \frac{E}{bb}\int s^2 dr$ prodibit $= \frac{\pi abc}{2}$.

§. 44. Ad nauium ſpeciem ſecundam referuntur eae figurae, in quibus omnes ſectiones parallelae ſectioni ampliſſimae eidem ſunt ſimiles. Huiusmodi igitur carinam Tab. III. fig. 1. repraeſentet figura AEDFB, in qua ſit AEBF ſectio aquae, ADB planum diametrale, atque EDF ſectionem transuerſalem ampliſſimam, cui facta ſit ſectio quaecunque parallela RVS, quae ideo illi erit ſimilis. Ex quo ſequitur fore CE : CD = XR : XV, atque hanc ob analogiam planum diametrale ADB et ſemiſectio aquae AEB erunt figurae affines ſuper eadem baſi AB conſtitutae. Si ergo alterutra harum duarum ſectionum fuerit data, altera ſimul determinatur. Ad totius igitur figurae determinationem ſufficit aſſumſiſſe duas ſectiones ampliſſimam ſcilicet EDF et ſectionem aquae AEBF.

§. 45. Maneant vt ante $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$; et pro ſectione ampliſſima poſita abſciſſa $CP = p$; $PM = q$, data erit aequatio inter p et q: in ſectione aquae autem ſumta abſciſſa $CX = r$, ſit applicata $XR = s$ data per r. Eidem autem abſciſſae $CX = r$, quatenus pertinet ad planum diametrale ACD reſpondebit applicata $XV = \frac{cs}{b}$ ex natura ſimilitudinis. Capiatur iam in ſectione transuerſali RVS abſciſſa XY ſimilis abſciſſae CP,

CP, ſeu $XY = \frac{ps}{b}$ erit applicata reſpondens $YZ = \frac{qs}{b}$. Ex hac itaque ſimilitudinis conditione, ſi datae fuerint trium ſectionum principalium duae, ſectio aquae ſcilicet et ſectio ampliſſima, omnes ſectiones iſti poſteriori parallelae facile definientur, atque adeo tota carinae figura leui negotio deſcribi poterit.

§. 46. Sequenti autem modo pro huius modi figuris ad ſecundam ſpeciem pertinentibus aequatio localis inter tres variabiles reperietur. Cum Z ſit punctum in ſuperficie carinae, ponatur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $x = r$, atque ob s datam per r, fiet s functio quaedam ipſius x, quae ſit $= X$, ita vt ſit $s = X$. Hanc ob rem erit $XY = y = \frac{pX}{b}$, et $YZ = z = \frac{qX}{b}$; ideoque $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$. Verum quia q per p datur, ex aequatione $\frac{y}{z} = \frac{p}{q}$ valor ipſius p ita definietur, vt fiat $p =$ functioni cuidam ipſarum y et z nullius dimenſionis, qui valor in aequatione $y = \frac{pX}{b}$ ſubſtitutus dabit $X = \frac{by}{p}$ ſeu functio quaedam ipſius X aequabitur functioni cuidam ipſarum y et z vnius dimenſionis.

§. 47. Ad ſoliditatem vero ſeu capacitatem iſtius modi carinae inueniendam ponatur area ſectionis ampliſſimae $EDF = E$, eritque ex natura ſimilitudinis area ſectionis $RVS = \frac{Es^2}{bb}$; quae ducta in dr dabit elementum voluminis $EDFSRV = \frac{Essdr}{bb}$; ex quo ipſum hoc volumen erit $= \frac{E}{bb}\int ssdr$. Quare ſi poſt integrationem formulae $\int ssdr$ ita inſtitutam, vt ea euaneſcat poſito $r = o$, fiat $r = CA = a$, prodibit volumen totius prorae AEFD. Simili vero calculo obtinebitur volumen partis poſterioris BEFD ſeu puppis, quod ad prius volumen prorae additum dabit

totius

Digitized by Google

totius carinae volumen: ex quo deinceps totius nauis pondus innoteſcet.

§ 48. Soliditas igitur iſtiusmodi carinae partim per aream ſectionis ampliſſimae $EDF = E$ partim per formulam integralem $\int ssdr$, quae a natura ſectionis aquae pendet, determinatur. Vt autem haec ad praxin accommodentur, notandum eſt $\int ssdr$ partim ex area ſectionis aquae, partim ex ſitu centri grauitatis ſemiſſis iſtius ſectionis aquae determinari. Poſita enim area totius ſectionis aquae $AEBE = F$, ac ſemiſſis AEB centro grauitatis in g; ſi ex g ad AB ducatur normalis gG, erit haec ipſa $gG = \frac{\int ssdr}{2\int sdr} = \frac{\int ssdr}{F}$, ex quo fit $\int ssdr = F.Gg$. Hanc obrem propoſitae carinae volumen ſeu ſoliditas erit $= \frac{E.F.Gg}{bb} = \frac{E.F.Gg}{CE^2}$. Quae expreſſio ab illa, qua ſoliditas figuram primae ſpeciei continebatur, hoc tantum differt, quod hic diſtantia centri grauitatis ſemiſſis ſectionis aquae AEB ab axe AB ingrediatur, ibi autem diſtantia centri grauitatis ſemiſſis ſectionis ampliſſimae CDE ab axe CD.

§. 49. Ad hanc ergo ſecundam ſpeciem innumerabiles pertinent figurae, inter quas figurae rotundae, quae inter curuilineas fere ſolae adhuc ſunt conſiderari ſolitae, continentur: cuiusmodi ſunt eae figurae, quae reuolutione figurae AEB circa axem AB generantur. Tum enim omnes ſectiones ad axem AB normaliter factae ſunt ſemicirculi, eoque ipſo ſectioni ampliſſimae parallelae ac ſimiles. Pro huiusmodi igitur corporibus, ſi ratio diametri ad peripheriam ponatur $1 : \pi$ erit ſectionis ampliſſimae EDF area, quae poſita eſt $= E = \frac{\pi CE^2}{2}$; ex quo totius figurae volumen prodit $= \frac{\pi F.Gg}{2}$. His igitur caſibus volumen reperie-

perietur, ſi area ſectionis aquae ducatur in diſtantiam centri grauitatis g, ſemiſſis eiusdem ſectiones aquae ab axe AB, ac productum multiplicetur per $\frac{\pi}{2}$.

§. 50. Tertia nauium ſpecies eas ſub ſe complectitur figuras, in quibus omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt ſimiles. Huiusmodi nauem ſeu potius carinam repraeſentet figura AEDFB, in qua ſit ADB planum diametrale, ac RQS ſectio verticalis eidem parallela, quae ideo ipſi plano diametrali erit ſimilis; idque ex utraque ſectionis ampliſſimae EDF parte. Hanc ob rem erit $AC:CD = RQ:PQ$, atque $BC:CD = SP:PQ$, ex quibus analogiis patet in iſtis figuris ſectionem aquae et ſectionem ampliſſimam a ſe inuicem ita pendere, vt areae ACE, DCE et BCE inter ſe ſint affines communem baſin CE habentes. Tab. III. fig. 2.

§. 51. In his itaque figuris ſectio aquae ita determinatur, vt eius partes AEF et BEF proram et puppim ſpectantes debeant eſſe affines: ſeu PR ad PS eandem debeat tenere rationem quam AC ad BC. Hanc obrem ponamus praeter plani diametralis figuram ADB datam eſſe figuram ſectionis ampliſſimae CEDF: his enim duabus ſectionibus datis totius carinae figura innoteſcet. Hunc in finem poſitis $AC = a$, $CE = CF = b$ et $CD = c$, ſint pro plano diametrali abſciſſa $CT = p$ et applicata $TV = q$: itemque pro ſectione ampliſſima ſit abſciſſa $CP = r$ et applicata $PQ = s$: atque ob has figuras datas dabitur q per p, ſimiliterque s per r. Propter ſimilitudinem vero erit $CD\ (c) : CA\ (a) = PQ\ (s) : PR$ vnde ſit $PR = \frac{as}{c}$, quae eſt applicata anterioris partis ſectionis aquae reſpondens ab-

Digitized by Google

ſciſſae $CP = r$. Pro parte autem poſteriori erit $PS = \frac{as}{c}$ poſito $CB = a$.

§. 52. Sumatur nunc pro ſectione RQS abſciſſa PY, quae ſit ad CT, p vt $RQ\,s$ ad CD, c ſeu $PY = \frac{ps}{c}$ erit applicata reſpondens $YZ = \frac{qs}{c}$. Quamobrem cum punctum Z ſit in ſuperficie carinae, ſi tres variabiles, quibus locus puncti Z determinatur, ponantur $CX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $CX = x = \frac{ps}{c}$, $XY = y = r$ et $YZ = z = \frac{qs}{c}$. Quoniam vero datur s per r, dabitur quoque s per y, ob $r = y$, ſitque $s = Y$, exiſtente Y functione ipſius y. Deinde aequatio $\frac{x}{z} = \frac{p}{q}$, quia q datur per p praebebit $p =$ functioni nullius dimenſionis ipſarum x et z: ex quo fiet $s = Y = \frac{cx}{p} =$ functioni vnius dimenſionis ipſarum x et z. Haecque eſt proprietas eſſentialis figurarum ad tertiam ſpeciem relatarum.

§. 53. Ad ſoliditatem huiusmodi figurarum inueniendam, ponatur area plani diametralis $ADB = E$, erit area $RQS = \frac{Ess}{cc}$; atque volumen ſpatii $ARQSB = \frac{E}{cc}\int ssdr$. Si ergo poſt integrationem ponatur $r = b$, prodibit volumen ſemiſſis carinae $AEBD$, ex quo volumen totius carinae erit $= \frac{2E}{cc}\int ssdr$. Ponatur area ſectionis ampliſſimae $EDF = F$, atque eius ſemiſſis CDE, centrum grauitatis in g, ex quo ad EF ducatur verticalis gG. His factis erit $F\,2\int sdr$. atque $Gg = \frac{\int ssdr}{2\int sdr}$, vnde habebitur $\int ssdr = F.Gg$: ſi quidem integralia, vti decet fuerint accepta. Hinc itaque pro ſoliditate totius carinae emerget ſequens expreſſio $\frac{2E \cdot F \cdot Gg}{c^2} = \frac{2E \cdot F \cdot Gg}{CD^2}$; cuius valor ex datis plano diametrali et ſectione ampliſſima pro operatione practica non difficulter inuenitur.

§. 54.

§. 54. Tres iſtae priores ſpecies hoc inter ſe conueniunt atque a ſequentibus tribus diſcrepant, quod habeant ſectiones vni principalium parallelas inter ſe ſimiles, cum in ſequentibus tantum ſint affines. Quoniam autem figurae ſimiles in affinibus continentur, etiam hae tres ſpecies priores in ſequentibus tribus comprehenduntur. Interim tamen idoneum viſum eſt ex ſimilitudine peculiares ſpecies conſtituere, cum calculus pro iis fiat admodum facilis; ac figurae nauium, quae ad has ſpecies pertinent, a reliquis diſtingui mereantur. Praeterea in his iam expoſitis tribus ſpeciebus duae ſectiones principales ſufficiunt ad totam figuram determinandam, atque tertia ex iis ſponte definitur: at in ſequentibus ſpeciebus omnes tres ſectiones principales pro lubitu aſſumere licet, ex quo earum latiſſima extenſio colligi poteſt.

§. 55. In ſequentibus igitur ſpeciebus omnes tres ſectiones principales nobis erunt datae, ex iisque nauium figura triplici prodo determinabitur: primo ſcilicet eas figuras conſiderabimus, in quibus omnes ſectiones horizontales cum inter ſe tum ſectioni aquae ſint affines; ſecundo ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem affines ponentur: tertio denique affinitas ſtatuetur inter ſectiones verticales plano diametrali parallelas; haeque tres ſpecies conſtituent nobis ſpecies quartam, quintam et ſextam. Qui autem haec attentius perpendet facile agnoſcet vix dari aut excogitari poſſe carinae figuram, quae ſi non ad aliquam trium priorum ſpecierum pertineat, ad quandam poſteriorum referri nequeat. Atque hanc ob rem perfectiſſimam nauium figuram, quam quaerimus, in his ſex ſpeciebus contineri, ſine vlla haeſitatione tuto aſſumimus.

Digitized by Google

§. 56. Cum igitur in poſterioribus his tribus ſpeciebus tres ſectiones principales a ſe inuicem non pendeant, ſingulaeque pro arbitrio accipi queant, dummodo in punctis E, D, et F conueniant, ſingulas peculiaribus aequationibus exprimemus inter binas coordinatas orthogonales, quarum alterius abſciſſae ſcilicet a puncto medio C computentur. Ita pro ſectione aquae p denotabit abſciſſam in axe CA ſumtam ac q applicatam reſpondentem. Porro r denotabit abſciſſam ſectionis ampliſſimae in axe CE ſumtam atque s applicatam reſpondentem. Denique pro plano diametrali t erit abſciſſa in axe CD ſumta, et u eius applicata. Ob tres igitur ſectiones principales vel datas vel tanquam datas conſiderandas, cognitae erunt aequationes cum inter p et q, tum inter r et s tum etiam inter t et u.

§. 57. Quod denique ad longitudinem, latitudinem et profunditatem cuiusque carinae in genere attinet, a nobis ſemper denotabit longitudinem prorae CA, puppis autem longitudo CB deſignabitur littera α. Maximae autem latitudinis EF ſemiſſis, hoc eſt vel CE vel CF erit nobis conſtanter $= b$. Profunditatem vero CD exprimat littera c. Deinde cum harum trium ſectionum principalium areae in calculum ſint ingreſſurae, ponemus aream ſectionis aquae AEBF $= 2$ D, quia ex duabus portionibus ſimilibus et aequalibus AEB, AFB quarum vtraque erit $=$ D, conſtat. Semiſſis vero ſectionis ampliſſimae ſit $=$ E ita vt ſit area EDF $= 2$ E. Area tandem plani diametralis ADB, quia non conſtat duabus portionibus aequalibus et ſimilibus exponatur littera F.

§. 58.

Digitized by Google

§. 58. Examini ergo ſubiiciamus nauium ſpeciem quartam, in qua omnes ſectiones horizontales ſeu ſectioni aquae parallelae eidem ſint affines. Sit igitur AEDBF eiuſmodi figura pro cuius ſectione aquae ponatur abſciſſa CI $= p$; applicata IK $= q$: pro ſectione vero ampliſſima ſit abſciſſa CH $= r$, applicata HQ $= s$; ac pro plano diametrali ſit abſciſſa CP $= t$, et applicata PS $= u$. Ex figura autem intelligitur eſſe CP $=$ HQ ſeu $s = t$; quare cum r per s et u per t detur, erunt r et u functiones vel ipſius t vel ipſius s. Concipiatur nunc per punctum P facta ſectio horizontalis SQTR, quae ita erit comparata, vt tam portio SQR affinis ſit portioni ſectionis aquae AEF, quam portio TQR portioni EBF. Tab. II. fig. 2.

§. 59. In hac igitur ſectione ſi capiatur abſciſſa PO quae ſit ad CI (p) vt PS (u) ad CS (a), ſeu PO $= \frac{pu}{a}$, erit ex natura figurarum affinium applicata OZ : IK (q) $=$ PQ (r) : CE (b) ſiue OZ $= \frac{qr}{b}$. Si nunc ex puncto Z, quod in ſuperficie figurae eſt ſitum, ducatur ad ſectionem aquae normalis ZY, et ex Y ad axem AC normalis YX, erunt CX $= x$; XY $=$; et YZ $= z$ tres coordinatae, quibus natura huius ſuperficiei exprimetur. Erit autem $x =$ PO $= \frac{pu}{a}$; $y =$ OZ $= \frac{qr}{b}$, atque $z =$ CP $=$ HQ $= t = s$: hinc ergo z loco t et s ſubſtituendo fiet tam u quam r functiones ipſius z. Priores vero aequationes praebent $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$, vnde ex aequatione inter p et q data, elicietur aequatio inter x, y et z, qua natura ſuperficiei continebitur.

§. 60. Si aequationum $p = \frac{ax}{u}$ et $q = \frac{by}{r}$ altera per alteram diuidatur, habebitur $\frac{p}{q} = \frac{arx}{buy}$ vbi $\frac{ar}{bu}$ erit functio

 quae-

Digitized by Google

quaepiam ipſius z. Quoniam autem q per p datur, definiri poterit valor ipſius p ex iſta aequatione per x, y et z, qui valor ita erit comparatus, vt ſi ſolae quantitates x et y dimenſiones conſtituere cenſeantur, fiat $p =$ functioni ipſarum x et y nullius dimenſionis, in qua tamen z quoque inſit. Quare cum ſit $u = \frac{ax}{p}$ aequatio localis pro huius generis figuris hanc habebit proprietatem, vt functio quaedam ipſius z aequetur functioni ipſarum x, y et z, in qua variabiles x et y coniunctim vtique vnam dimenſionem obtineant. Ex aequatione autem locali hoc modo inuenta omnes ſectiones huiusmodi figurarum innoteſcent.

§. 61. Ad ſoliditatem vero huius figurae definiendam notare conuenit aream ſectionis SQTR ſe habere ad aream ſectionis aquae AEBF vt ru ad ab. Quare cum ſectionis aquae area poſita ſit $= 2\,D$, erit area ſectionis SQTR $= \frac{2Dru}{ab}$; in qua expreſſione quantitates r et u dantur per $s = t = z$; ita vt poſito CP $= z$ futurae ſint ambae quantitates r et u functiones ipſius z. Ex his obtinebitur volumen totius carinae propoſitae $= \frac{2D}{ab} \int r u dz$, ſi quidem poſt integrationem ita inſtitutam, vt integrale evaneſcat poſito $z = o$, ponatur $z = c$. Atque hoc pacto volumen figurae ex datis tribus ſectionibus principalibus non difficulter definietur.

Tab. III. fig. 1. §. 62. Sequitur nauium ſpecies quinta ad quam omnes figuras retulimus, quae ſectiones verticales ampliſſimae parallelas eidem affines habent. Eiusmodi ergo figura ſit AEBFD, cuius ſectio aquae AEBF data ſit per aequationem inter abſciſſam CX $= p$ et applicatam XR $= q$:

pro

pro ſectione autem ampliſſima CDF data ſit aequatio inter abſciſſam $CP = r$ et applicatam $PM = s$. Denique plani diametralis natura expreſſa ſit aequatione inter abſciſſam $CQ = t$ et applicatam $QV = u$. Quoniam autem haec figura ad propoſitum caſum eſt accommodata, erit $CX = QV$ ſeu $p = u$; quare cum q per p et t per u dentur erunt q et t functiones eiusdem quantitatis ſiue p ſiue u.

§. 63. Per punctum axis X concipiatur facta ſectio verticalis RVS ſectioni ampliſſimae parallela quae cum eidem ſit affinis, capiatur in ea abſciſſa XY eandem tenens rationem ad abſciſſam CP quam tenet XR ad CE, vnde erit $XY = \frac{qr}{b}$; applicata autem reſpondens YZ ita erit comparata, vt ſit $YZ : PM\,(s) = XV\,(t) : CD\,(c)$, ſeu $YZ = \frac{st}{c}$. Ponatur iam $CX = x$; $XY = y$ et $YZ = z$, erit $x = p = u$; $y = \frac{qr}{b}$ et $z = \frac{st}{c}$: vnde q et t erunt functiones ipſius x: reliquae aequationes praebent $\frac{y}{z} = \frac{cqr}{bst}$, vnde ob s per r datum reperietur $r =$ functioni ipſarum x, y, z, in qua y et z vbique numerum dimenſionum nullum conſtituant. Quamobrem ob $q = \frac{by}{r}$, functio quaepiam ipſius x aequabitur functioni cuidam ipſarum x, y, et z in qua variabiles y et z ſolae conſideratae vnicam dimenſionem conſtituant.

64. Quod ad volumen huius figurae attinet, id ex area ſectionis RVS, quae cognitam tenet relationem ad aream ſectionis ampliſſimae, definietur: cum enim ſit area $EDF = 2E$, erit area $RVS = \frac{2Eqt}{bc}$ atque quantitates q et t, erunt functiones eiusdem variabilis p vel u propter $p = u$. Quare ſi retineatur abſciſſae CX denominatio x,

x, erunt q et t functiones ipſius x, quae deriuabuntur ex aequationibus inter q et p atque inter t et u datis, ſcribendo x loco p et u. Hinc itaque $\frac{2E}{bc}\int qt\,dx$, integrali ita ſumto vt euaneſcat poſito $x=0$, dabit volumen portionis EDFSVR; ac facto poſt integrationem $x=a$ proueniet ſoliditas ſeu volumen prorae AEDF, ſi ergo ſimili modo quaeratur volumen puppis, horum voluminum aggregatum dabit totius figurae propoſitae volumen.

Tab. III. fig. 2. §. 65. Peruenimus denique ad nauium ſpeciem ſextam, in qua omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt affines; huiusmodi figura ſit AEDBF. Ponatur igitur pro ſectione aquae abſciſſa CK$=p$, applicata KR$=q$. Pro ſectione ampliſſima vero ſit abſciſſa CP$=r$ applicata PQ$=s$: ac pro plano diametrali ſit abſciſſa CN$=t$, applicata NV$=u$: eritque $q=r$: ita vt futurae ſint p et s functiones eiusdem quantitatis variabilis q vel r. Hic quidem vt in praecedentibus ſpeciebus notandum eſt non neceſſario eſſe $q=r$, ſed potius q et r ſunt quantitates a ſe inuicem non pendentes. Quoniam vero figura ad caſum praeſentem accommodari debet, is facillime euoluetur, ſi perpetuo r ipſi q aequale capiatur.

§. 66. Per punctum P fiat ſectio RQS plano diametrali parallela, quae ob CP$=$KR ſimul per punctum R tranſibit: erit ergo eius profunditas PQ$=s$, et longitudo verſus proram PR$=$CK$=p$. Ducto nunc ex V in plano diametrali perpendiculo VT, erit CT$=u$, et TV$=t$; quo facto in ſectione RQS capiatur PY : PR $=$ CT : CA ſeu PY$=\frac{pu}{a}$, erit ob affinitatem YZ : PQ $=$TV : CD ſeu YZ$=\frac{st}{c}$. Iam per Y ducta applicata MYX

MYX dicantur $CX = x$; $XY = y$, et $YZ = z$ eritque $y = r = q$; $x = \frac{pu}{a}$ et $z = \frac{st}{c}$; ex quibus tandem haec iſtiusmodi figurarum proprietas eſſentialis deducitur, vt functio quaepiam ipſius y aequalis ſit functioni ipſarum x, y et z in qua variabiles x et z ſolae conſideratae vbique vnam dimenſionem conſtituant.

§. 67. Volumen denique huius figurae pariter ac praecedentium ex natura figurarum affinium determinabitur. Cum enim plani diametralis ADB area poſita ſit $= F$, erit area ſectionis RQS illi affinis $= \frac{Fps}{ac}$, atque ob p et s per q et r datas, et propter $y = r = q$, erunt p et s functiones eiusdem variabilis $y = CP$. Quamobrem $\frac{F}{ac}\int psdy$ dabit ſoliditatem portionis ARQSB integrali ita accepto vt euaneſcat poſito $y = o$. Quare ſi poſt integrationem ponatur $y = b$, prodibit ſoliditas ſemiſſis figurae propoſitae, ex quo totius figurae ſeu carinae propoſitae volumen erit $= \frac{2F}{ac}\int psdy$, integratione debito modo peracta.

§. 68. Quoniam figurae ſimiles in figuris affinibus continentur harumque quaſi ſpeciem conſtituunt, ita tres poſteriores ſpecies in ſe priores comprehendunt; ex quo fit, vt quae figura ad ſpeciem primam pertinet, eadem quoque ſub ſpecie quarta contineatur; ſimilique modo ſecunda ſpecies ſub quinta, et tertia ſub ſexta ſit contenta. Hoc igitur modo tres adhuc ſimpliciores ſpecies conſtitui poſſunt, in quibus ſectiones vni principalium parallelae eidem non ſolum ſimiles ſed etiam aequales ſint, cuiusmodi figurae paſſim in minoribus nauigiis reperiuntur. Omnium autem ſimpliciſſima figura erit parallelepipedum,

in qua nullae ſectiones curuilineae locum inueniunt; talem autem figuram arca Noae habuiſſe fertur.

§ 69. Quod ergo ad figuram carinae externam attinet, eius commodiſſime decem ſpecies ſtatuuntur; quarum etiam in ſequentibus rationem habebimus. Prima nimirum ſpecies conſtabit parallelepipedo; ſecunda eiusmodi figuris, quae habent omnes ſectiones horizontales inter ſe aequales et ſimiles. In figuris tertiae ſpeciei erunt omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae inter ſe ſimiles et aequales. Figurae autem quartae ſpeciei habebunt omnes ſectiones verticales plano diametrali parallelas inter ſe ſimiles et aequales. Has deinde ſpecies ſequentur eae ſex, quas ante iam ſumus contemplati, quarum tres priores ex ſimilitudine ſectionum vni principalium parallelarum, poſteriores vero ex affinitate ſunt deſumtae. Quatuor autem ſpecies nunc demum ſuperadditae tractatu tam ſunt faciles, vt hic non ſit opus eas ad aequationes redigere earumque ſoliditatem determinare.

§. 70. Cum igitur in hoc libro nobis ſit propoſitum imprimis in conuenientiſſimam carinae figuram inquirere, ad quamque circumſtantiam, quae ad determinationem figurae nauium quicquam confert, ſingulas recenſitas decem ſpecies euoluemus, ac quo pacto requiſitis conditionibus maxime ſatisfiat, inueſtigabimus. Quodſi ergo hac methodo progrediamur facile intelligetur, quantum quaeque ſpecies capax ſit perfectionis, quibusque impedimentis ſit obnoxia: ex quibus omnibus coniunctio haud difficulter colligetur, ex quanam ſpecie optima nauium figura ſit deſumenda. In hac autem disquiſitione ad vſum, cui naues deſtinari ſolent, potiſſimum eſt reſpiciendum.

§. 71.

§. 71. Quoniam autem, ſi tres poſtremae ſpecies ſpectentur, tres figurae indeterminatae et arbitrariae ſcilicet tres ſectiones principales in calculum ingrediuntur, ne tractatio nimis ſit vaga, iuuabit has ſectiones aequationibus, ſatis late patentibus, includi, quae ita ſint comparatae, vt propemodum omnes figuras, quae in earum locum ſubſtitui poſſint, ſub ſe comprehendant. Hinc enim id conſequemur commodi, vt pro his ſectionibus definitas habeamus aequationes, quae non ſolum facilius tractari poſſint, quam prorſus indefinitae, ſed etiam ad determinationes recipiendas magis ſint accommodatae: conuenit enim ſtatim omnes eas figuras excludi, quae ad ſtructuram ſunt inutiles, atque ad nauium formam formandam ineptae. Hoc vero ſubſidio tum ſolum vtemur, quando circumſtantiae non ita ſunt comparatae, vt figuram alicuius ſectionis omnimode determinent.

§ 72. Maneant igitur conſtanter a longitudo prorae α longitudo puppis, b ſemiſſis amplitudinis maximae, et c maxima altidudo carinae, atque conſideremus ſectionem aquae ſeorſim, quae ſit AEBF, eiusque diameter recta AB a prora A ad puppim B protenſa. Huius figurae Tab. IV.
ſit EF maxima latitudo, diuidens ſectionem aquae in duas fig. 1.
partes, quarum altera verſus proram altera verſus puppim eſt ſita. Quoniam autem ambae partes, ex vtraque diametri AB parte ſitae, ſunt inter ſe ſimiles et aequales, ſufficiet alteram medietatem determinaſſe. Hunc in finem poſita abſciſſa $CP = p$ et applicata $PQ = q$, aequatio inter p et q ita debebit eſſe comparata, vt generalibus quibusdam conditionibus, ad nauium conſtructionem et figuram determinandam neceſſariis, ſatisfaciat.

Digitized by Google

§. 73. Quoniam igitur eſt $CA = a$; $CB = \alpha$; $CE = CF = b$, aequatio inter p et q ante omnia ita debet eſſe comparata, vt poſito $p = o$, fiat $q = b$: quare ſi P talis fuerit functio ipſius p, quae abeat in B, poſito $p = o$, debebit eſſe $q = \frac{bP}{B}$. Deinde niſi figura ſectionis aquae tum verſus proram tum verſus puppim ſit aperta, id quod quibusdam caſibus euenire poteſt, quos in hoc negotio non ſpectemus, aequatio inter p et q ita debet eſſe comparata, vt poſito vel $p = a$ vel $p = -\alpha$, euaneſcat q. His ambabus conditionibus ſatisfiet ſi pro aequatione, naturam ſectionis aquae exprimente, aſſumatur eiusmodi forma $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.})$ denotantibus m et n numeros nihilo maiores. Si enim eſſet vel $m = o$ vel $n = o$, tum ſectio aquae vel in prora vel in puppi non foret clauſa, ſed ad caſus modo commemoratos pertineret, ad quos ergo haec aequatio etſi eos excluſimus, tamen eſt accommodata.

§. 74. Praeterea maxime requiritur vt curuae huius tangens in puncto E ſit axi AB parallela, primo enim in praxi anguli ad latera nauis tolerari non ſolent; deinde vero hoc ipſo, quod applicata CE omnium maxima eſſe debet, neceſſe eſt, vt tangens ad E ſit axi AB parallela. Huic conditioni vt ſatisfiat, oportet vt q nullum incrementum decrementumue capiat, ſi loco $p = \sigma$ ponatur p infinite paruum. Impleta autem hac conditione reperietur eſſe debere $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, reliquae vero coefficientes adhuc manent indeterminatae, vnde ampliſſima habetur aequatio pro omnis generis ſectionibus aquae ad praxin idoneis, quae erit haec $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m \alpha^n}$ $(1 + \frac{(m\alpha - na)}{a\alpha} p + \eta p^2 + \theta p^3 + \iota p^4 + \text{etc.})$

§. 75.

Digitized by Google

§. 75. Quoniam porro naues per ſatis notabile interuallum eandem ſere latitudinem conſeruare ſolent, curvatura in puncto E vehementer exigua eſſe debet, inſuperque radium curuedinis in E verſus axem AB directum, ſeu curuam in E concauam verſus hanc regionem eſſe oportet. Fit autem poſito p infinite paruo $q = b\left(1 - \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2 - 2a^2\alpha^2\eta}{2a^2\alpha^2}p^2\right)$ curua ergo in E concaua erit verſus axem AB ſi fuerit $\eta < \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$. At ſi fuerit $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2}$ tum curuatura in E penitus euaneſcet, atque curua hoc loco cum linea recta confundetur, quae conditio ad pleraſque naues perquam idonea videtur.

§. 76. Si ergo ponatur $\sigma = \frac{m\alpha - na}{a\alpha}$, atque $\eta = \frac{m(m+1)\alpha^2 - 2mna\alpha + n(n+1)a^2}{2a^2\alpha^2} - \frac{\gamma}{a\alpha}$, denotante γ quantitatem affirmatiuam, aequatio $q = \frac{b(a-p)^m(\alpha+p)^n}{a^m\alpha^n}(1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + i p^4 + \text{etc.}$ praebebit figuram conuenientem pro ſectione aquae cuius curuatura in E eo erit minor, quo minor fuerit quantitas γ, atque ſi γ omnino euaneſcat, fiet radius curuedinis in E infinitus. Vt autem applicatae q creſcentibus abſciſſis p continuo decreſcant, oportet coefficientibus θ et i etc. idoneos tribui valores; nam σ et η hoc modo determinata iam praebent differentialia ipſius q negatiua. Hoc vero ſatis tuto obtinebitur, ſi curua in punctis A et B in axem incidat.

§. 77. Si exponentes m et n fuerint nihilo maiores, tum curua in vtroque puncto A et B cum axe concurrit: at per exponentes m et n effici poteſt, vt concurſus curvae cum axe in punctis A et B fiat datus. Scilicet ſi

 $m < 1$

Digitized by Google

$m < 1$ tum angulus QAP erit rectus, tangens autem in A in ipſum axem incidet, ſi fuerit $m > 1$: at angulus QAP euadet acutus vel obtuſus ſi $m = 1$. vt autem hic angulus ſit acutus inſuper oportet eſſe $1 + \sigma p + \eta p^2 + \theta p^3 + \text{etc.} > 0$ poſito $p = a$, quod quidem ſponte patet, alias applicata q fieret alicubi negatiua. Simili modo poſito $p = -a$ debet eſſe $1 - \varsigma a + \eta a^2 - \theta a^3 + \text{etc.} > 0$. angulus vero ad B pendebit ab exponente n, qui ſi fuerit vnitate maior, euaneſcet angulus EBC, rectus autem erit ſi $n < 1$, at acutus ſi $n = 1$.

§. 78. Neque vero abſolute eſt neceſſarium, vt partes AE et BE vnam eandemque curuam continuam conſtituant, ſed ad vſum practicum ſufficit, ſi ambae hae partes in E ita conueniant, vt ibi communem habeant tangentem axi AB parallelam. Praeſtabit autem hoc modo ſectionem aquae concipere, cum inuentio areae et centri grauitatis multo fiat facilior atque adeo algebraice expediri queat. Conſideremus itaque primo portionem prorae ACE cuius abſciſſa CP poſita $= p$ et applicata PQ $= q$, iſta aequatio $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)}{2a^2} p^2 + \frac{\sigma p^3}{a^3} + \frac{\eta p^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$ conditionibus ſupra allatis ſatisfaciet, ſi quidem γ ſignificet numerum affirmatiuum.

§. 79. Simili modo ſi pro parte poſteriore BCE ponatur abſciſſa $Cp = p$ et applicata $pq = q$, ſequens aequatio conditionibus memoratis maxime ſatisfaciet $q = \frac{b(a-p)^n}{a^n} \left(1 + \frac{np}{a} + \frac{(n(n+1)-\delta)}{2a^2} p^2 + \frac{\theta p^3}{a^3} + \frac{ip^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$. Ambae enim iſtae curuae non ſolum conuenient in puncto E, ſed etiam hoc loco tangentem habebunt communem axi AB parallelam. Praeterea vero hae curuae in A et B

cum

cum axe conuenient, ſi quidem exponentes m et n fuerint nihilo maiores. Denique hae aequationes, etiamſi innumerabiles termini adiici poſſint, tamen ſatis late patere videntur, ſi tantum termini vsque ad poteſtatem tertiam retineantur, reliqui vero reiiciantur, cum coefficientes duo γ, et σ item δ et θ abunde ſufficiant, ad omnis generis curuas comprehendendas.

§. 80. Vt autem integrationes, quae tam ad aream quam centrum grauitatis inueniendum inſtitui debent, facilius abſoluantur, ponamus iſtam aequationem latiſſime patentem $y = (a-x)^m \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \frac{Ex^4}{a^4} + \text{etc.}\right)$, pro qua quaeratur valor ipſius $\int y\,dx$, ſi poſt integrationem ponatur $x = a$; reperietur autem calculo finito $\int y\,dx = a^{m+1} \left(\frac{A}{m+1} + \frac{1B}{(m+1)(m+2)} + \frac{1 \cdot 2C}{(m+1)(m+2)(m+3)} + \text{etc.}\right.$ vel generatim poſt integrationem poſito $x = a$ erit $\int (a-x)^m dx \left(A + \frac{Bx}{a} + \frac{Cx^2}{a^2} + \frac{Dx^3}{a^3} + \text{etc.}\right) = \frac{a^{m+1}}{m+1} \left(A + \frac{1B}{m+2} + \frac{1 \cdot 2C}{(m+2)(m+3)} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3D}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{etc.}\right)$ quae integratio generalis in praeſentibus integrationibus ingentem praeſtabit vtilitatem.

§. 81. Quodſi nunc hac regula vtamur ad aream ſectionis aquae propoſitae AEB inueniendam, reperietur primo area ACE $= \frac{ab}{m+1} \left(1 + \frac{m}{m+2} + \frac{m(m+1)-\gamma}{(m+2)(m+3)} + \frac{6\sigma}{(m+2)(m+3)(m+4)}\right)$, exiſtente aequatione pro portione ACE, $q = \frac{b(a-p)^m}{a^m} \left(1 + \frac{mp}{a} + \frac{(m(m+1)-\gamma)p^2}{2a^2} + \frac{\sigma p^3}{a^3}\right)$. Pro parte autem poſteriore BCE, ſi fuerit aequatio $q = \frac{b(a-p)^n}{a^n} \left(1 + \frac{np}{a} + \frac{(n(n+1)-\delta)p^2}{2a^2} + \frac{\theta p^3}{a^3}\right)$ erit area BCE $= \frac{ab}{n+1} \left(1 + \frac{n}{n+2} + \frac{n(n+1)-\delta}{(n+2)(n+3)} + \frac{6\theta}{(n+2)(n+3)(n+4)}\right)$, quarum

rum expreſſionum ſumma bis ſumta dabit aream totius ſectionis aquae AEBF.

Tab. IV. fig. 2. §. 82. Contemplemur nunc ſectionem ampliſſimam EDF, cuius latitudo in ſuperficie aquae eſt $EF = 2b$, et profunditas $CD = c$; conſtat autem haec ſectio ex duabus partibus ECD et FCD inter ſe aequalibus et ſimilibus; quare alteram medietatem determinaſſe ſufficiet. Si ergo pro ſemiſſe ECD ponatur abſciſſa $CR = r$, et applicata $RS = s$, aequatio inter r et s ita debet eſſe comparata, vt poſito $r = o$, fiat $s = c$, atque vt quo maior capiatur abſciſſa r applicatae s continuo decreſcant, donec tandem ſi fiat $r = CE = b$, applicata s euaneſcat, ſiquidem curuatura a D vsque ad E fuerit continua. Interim tamen aequatio generalis inter r et s ita concinnari poteſt, vt etiam pro iis caſibus, quibus curua non eſt continua, valeat; quod euenit ſi ſpatium quodpiam linea recta claudatur.

§. 83. His duabus commemoratis conditionibus ſatis fiet, ſi pro curua ESD iſta accipiatur aequatio $s = \frac{c(b-r)^\varkappa}{b^\varkappa}\left(1 + \frac{\beta r}{b} + \frac{\varepsilon r^2}{b^2} + \frac{i r^3}{b^3} + \text{etc.}\right)$ cuius ſeriei ſufficit quatuor priores terminos hic exhibitos aſſumere. Si enim ſit exponens $\varkappa$ affirmatiuus, negatiuus enim nullo modo eſſe poteſt; poſito $r = o$ fit $s = c$, facto autem $r = b$, prodit $s = o$. At ſi $\varkappa = o$ aequatio ad eos caſus accommodata erit, quibus ſectio haec ad E linea recta verticali terminatur, vti ſi haec ſectio fuerit parallelogrammum rectangulum. Sin r capiatur infinite paruum, prodit $s = c\left(1 - \frac{(\varkappa-\beta)r}{b} + \frac{(\varkappa^2 - \varkappa - 2\beta\varkappa + 2\varepsilon)r^2}{2b^2}\right)$ quae ergo expreſſio maior eſſe non debet quam c, quoniam CD eſt maxima applicata.

§. 84.

§. 84. Niſi ergo ſit $\beta = \varkappa$, quo caſu tangens ad D fiet horizontalis, atque angulus CDE rectus, oportet eſſe $\beta < \varkappa$; atque a defectu $\varkappa - \beta$ pendebit quantitas anguli CDE, ita vt per coefficientem β angulus CDE ad arbitrium formari poſſit, erit enim anguli CDE tangens $= \frac{b}{(\varkappa-\beta)c}$. At ſi angulus hic CDE capiatur rectus, quo caſu erit $\beta = \varkappa$, neceſſe eſt vt ſit $\varkappa(\varkappa + 1) - 2\varepsilon > 0$, quo curuatura ad D fiat concaua verſus ſuperficiem aquae EF. Quod denique ad angulum, quem curua in E cum axe CE conficit, attinet, is erit rectus ſi fuerit $\varkappa < 1$, nullus ſi $\varkappa > 1$ at arbitrariam quantitatem habebit, ſi ſumatur $\varkappa = 1$. Ceterum area huius ſectionis ampliſſimae ex aſſumta aequatione algebraice poterit definiri.

§. 85. Quae ante de figura ſectionis aquae monuimus, eadem locum habent in plano diametrali ADB; haec enim figura ita quoque eſſe debet comparata, vt poſitis coordinatis $CV = u$ et $VT = t$, fiat $t = CD = c$ facto $u = 0$; atque vt curua in punctis A et B in axem AB incidat. Hanc ob rem vel vna curua continua pro ſectione ADB poterit aſſumi, vel duae diuerſae, quae in D concurrant, ibique tangentem habeant communem horizontalem. Quo circa pro portione CDA accipi poterit haec aequatio $t = \frac{c(a-u)^{\mu}}{a^{\mu}}\left(1 + \frac{\mu u}{a} + \frac{(\mu(\mu+1)-g)u^2}{2a^2} + \frac{fu^3}{a^3}\right)$ pro parte autem poſteriore exiſtente $Cv = u$ et $vt = t$, haec aequatio $t = \frac{c(\alpha-u)^{v}}{\alpha^{v}}\left(1 + \frac{vu}{\alpha} + \frac{(v(v+1)-d)u^2}{2\alpha^2} + \frac{bu^3}{\alpha^3}\right)$, de quibus aequationibus eadem omnino ſunt tenenda, quae ſupra de ſectione aquae annotauimus. Tab. IV. fig. 3.

§. 86. Cum in hoc capite conſtituiſſem naues in genere contemplari, atque omnes varietates, quae quidem in nauibus locum habere poſſunt, perpendere, vt mox intelligatur, quibusnam rebus determinandis nauibus ſumma perfectio inducatur; conueniebat praecipuas nauium diuiſiones commemorari. Primam itaque diſtinctionem deſumſi ex quantitate vel pondere nauium, qua eae ſecundum onera, quibus gerendis pares ſunt, diſtingui ſolent. Secunda diuiſio petita eſt a figura partis aquae immerſae ſeu carinae, huiusque varietates, quamuis ſint innumerabiles, ad decem ſpecies reuocaui, in quibus omnes omnino nauium formae, quaecunque excogitari queunt, comprehendi poſſe videntur. Reliquum igitur eſt, vt ad ceteras varietates nauium attendamus, quae cum ex vſu tum ex modo eas mouendi originem trahunt.

§. 87. Quod quidem ad vſum, cui naues deſtinari ſolent, ſpectat, ingens deprehenditur diſcrimen; aliae enim naues ad onera vehenda, aliae ad homines ſunt accommodatae, aliae autem ad bellum gerendum, quae bellicae vocantur, ſunt inſtructae, cuius diuerſitatis vtique in conſtructione nauium ratio haberi debet, vt aptae reddantur ad ſcopum intentum conſequendum. Sed haec varietas ad noſtrum inſtitutum non admodum pertinet, cum hic non tam ad nauium ſtructuram internam, quam externam reſpiciamus, a qua potiſſimum curſus et gubernatio pendet. Interim tamen hanc diſtinctionem notaſſe iuuat, cum a varietate onerationis non ſolum locus centri grauitatis, ſed etiam momenta nauium afficiantur, quarum rerum cognitio maxime eſt neceſſaria.

§. 88. Vltimam ac principalem fere nauium diuiſionem ſuppeditat varietas virium, quibus naues in aqua propelli

Digitized by Google

pelli ſolent. Cum enim naues non ideo fabricari ſoleant, vt in aqua quieſcant, ſed vt de loco in locum promoueantur, viribus ad hoc eſt opus quibuscunque, quarum ingens datur multiplicitas. Aliae enim naues a curſu fluminis abripiuntur, aliae vel a hominibus vel pecudibus ad ripam protrahuntur, aliae remis propelli ſolent, aliae denique ope venti in vela irruentis promouentur. Ac praeter has vires complures aliae excogitari atque in vſum transferri poſſent. Praecipue autem a nobis notari merentur duo tantum virium genera cum a remis tum a vento petita, non ſolum quod haec maxime ſunt in vſu, ſed etiam quod nauium conſtructio ad ea potiſſimum ſit accommodanda.

§. 89. Cum igitur, quae ad ſitum nauium aequilibrium atque ad firmitatem itemque ad reſiſtentiam attinent, et quae praeterea res omnibus nauibus ſunt communes expoſuero, reliqua tractatio erit bipartita, quarum altera circa naues remis propulſas, altera autem circa eas, quae vento promouentur, erit occupata. Neque vero hinc reliquae vires, quae ad naues propellendas adhiberi poſſunt, prorſus excluduntur, ſed quo quaeque vis cum altera harum duarum maiorem habebit affinitatem, ex iis, quae tradentur colligere licebit, quaenam ſtructura, quaeque gubernandi ratio ad eiusmodi naues maxime ſit idonea. Deinde quoque ſi naues coniunctim remis et vento promoueantur, iudicare licebit, quomodo iſtius modi naues comparatas eſſe oporteat. Earum ſcilicet ſtructura medium tenere debebit, inter eam, quae remis conuenit, atque inter eam, quam vela requirunt: eoque magis ad alteram rationem accedere debebit, quo magis altera vis alteri prae-

Digitized by Google

valebit; qua de re iudicium ex vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, erit petendum.

§. 90. Antequam autem, quae ſtructura nauibus remis propellendis conueniat, inueſtigari queat, effectus, qui ab actione remorum proficiſcitur, determinari debet: quae inquiſitio, cum a nemine adhuc ſatis ſit euoluta, diligentius ex principiis motus erit pertractanda. Eo igitur loco non ſolum erit definiendum, quantum remi ad nauem propellendam efficiant, ſi data vi agitentur, ſed etiam, quod praecipuum eſt, forma remorum maxime idonea et virium remigum applicatio maxime lucroſa determinari debebit. Plurimum enim in hoc negotio intereſt, effectum per easdem vires maximum lucrari, ne remigum numerus praeter neceſſitatem nimium ſit multiplicandus quae cautio, ſi ventus adhibeatur, non tantopere eſt attendenda, cum vis a vento excipienda ſine ingentibus ſumtibus multiplicari queat, remigum numerus autem non item.

§. 91. Cum ergo in nauibus, quae remis ſunt inſtruendae, potiſſimum requiratur, vt eiusdem vis ope maximus effectus obtineatur, ſtructura nauium in hunc finem aptiſſima definiri debet. Reſiſtentia igitur, quam naues in aqua progredientia patiuntur, quantum fieri poteſt, diminui debebit, cum reſiſtentia aquae ſolum ſit obſtaculum, quod viribus promouentibus eſt ſuperandum. Quo circa pro huius generis nauibus diligentiſſime in eam nauium figuram erit inquirendum, quae in aqua promota minimam perpetiatur reſiſtentiam. Atque in hoc negotio ad ſolum curſum directum reſpici oportet, cum nulla ſit ratio, ob quam nauis vnquam ad curſum obliquum dirigatur: remorum enim ratio ad omnes plagas aequaliter eſt comparata.

§. 92.

§. 92. Longe aliter res ſe habet in nauibus, quae a vi venti ad motum cientur, quoniam enim mali et vela citra notabiles ſumtus pro lubitu augeri poſſunt, non tantam curam ad vim diminuendam adhiberi conuenit. Quin potius in hoc eſt incumbendum, vt naues maximam vim ſuſtinere queant: hunc enim naues plerumque habere ſolent defectum, vt vi, quae a vento excipitur, nimium acuta, ſitum erectum retinere nequeant, ſed ſubuerſioni ſint obnoxiae. Quocirca non ſolum idonea velorum applicatio, ſed etiam aptiſſima nauium forma erit inveſtiganda, quae a venti vi quantumuis magna minimam inclinationem producat; hocque pacto plures nauium defectus maximi momenti tollentur.

§. 93. Priusquam autem hoc examen ſuſcipiatur, vis venti generatim atque effectus quem in vela expanſa vtcunque impingens exerit, conſiderari debent; quo loco ſi vela non ſint maxime extenſa, curuatura, quam ventus velis inducit, erit determinanda, quoniam ſine ea media directio vis venti in vela exerta cognoſci nequit. Definita autem cum quantitate tum directione virium a vento exceptarum, inueſtigari oportebit, non ſolum quantum motus progreſſiuus augeatur, ſed etiam quanta nauis inclinatio inde oriatur. Hoc enim cognito diſpicere licebit, quomodo inclinatio vel omnino impediatur, vel quantum fieri poteſt diminuatur; quo in negotio primo firmitas maxime erit ſpectanda, tum vero etiam reſiſtentia, quippe quae ita poteſt eſſe comparata, vt niſu contrario vim ſubuerſionem adeo minantem penitus deſtruere poſſit.

§. 94. Ex his iam ſatis liquet, in conſtructione nauium velis inſtruendarum non tam ad minimam reſiſten-

Digitized by Google

tiam eſſe reſpiciendum quam ad firmitatem, qua omni inclinationi reluctatur. Parum enim lucri accederet, ſi quidem nauis minimam pateretur reſiſtentiam, ſimul vero eſſet tam debilis, vt vim venti ſuſtinere non poſſet. Interim tamen dubium non eſt, quin, ſi ſimul et ſumma reſiſtentiae diminutio, et maxima firmitas obtineri poſſent, id plurimam ſit allaturum vtilitatem, ſed plerumque hae conditiones, ita ſolent eſſe comparatae, vt ſi vni ſatis fiat, alteri detrahatur: accedent autem praeter reſiſtentiam et firmitatem plures aliae circumſtantiae, quarum ratio quoque eſt habenda, vnde adhuc maior colliſio regularum naſcitur: de quibus ſuo loco fuſius explicabitur.

§. 95. In nauibus autem huius generis motus ſeu curſus obliquus maxime habet locum, qui inſtituitur, ſi directio venti nimis a curſu deſtinato diſcrepat, vt curſui directo nullus relinquatur locus. Hanc ob cauſam operam adhiberi oportet, vt quantum fieri poteſt, curſus contra directionem venti dirigi queat, quo in negotio praeter diſpoſitionem velorum figura carinae plurimum valet. Atque ideo multo magis eſt efficiendum, vt naues ope curſus obliqui aduerſus ventum moueri poſſint, quam vt reſiſtentia in curſu directo diminuatur. Ex hisque abunde intelligitur, quantum ratione ſtructurae tantum interſit inter naues, quae remis, easque, quae vento propelluntur, adeo vt haec diſtinctio maxime ſit neceſſaria, ad hanc tractationem abſoluendam.

Cap.

Digitized by Google

Cap. II.

DE SITV AEQVILIBRII NAVIVM.

§. 96.

Quemadmodum omne corpus aqua ſpecifice leuius, ſi aquae immittatur, pluribus ſitibus aequilibrium tenere poteſt, vti in praecedenti libro fuſius eſt expoſitum; ita etiam nauis quaecunque, quamcunque habeat formam, dummodo leuior ſit quam aequale volumen aquae, non ſolum vnius aequilibrii ſitus erit capax, ſed etiam plurium. Neque vero ad inſtitutum noſtrum attinet omnes hos aequilibrii ſitus inueſtigare, ſed potius naues ita inſtrui oportet, vt datus et determinatus ſitus aequilibrii proprietatibus gaudeat. Omnis enim nauis, cuiuscunque ſit generis, ita eſſe debet comparata, vt aquae immiſſa praeſcriptum ſitum occupet, ac data eius portio aquae immergatur. Quare cum ſitus aequilibrii non inter res quaerendas, ſed datas reperiatur, naues ad eum induendum ante omnia accomodatas eſſe conuenit.

§. 97. Statim enim ac nauis cuiusque conſtructio ſuſcipitur, non ſolum quantitas voluminis immerſi, ſed etiam ipſa nauis portio aquam ſubeunda determinari ſolet. Hoc vero ipſa nauium ratio et vſus requirunt, quae aquae innatantes ſitum erectum tenere debent; qui ſitus per conſtructionem obtinetur, ſi ea ipſa nauis portio in aqua verſetur, quae ab initio in hunc finem eſt deſtinata. Cum igitur in capite praecedente partem ſubmerſam iam deſcripſerimus, eamque a reliqua parte diſtinxerimus, conſtructionem atque onerationem nauium ita abſolui oportet, vt ea ipſa por-

portio determinata aquae immerſa nauem in aequilibrio conſeruet, ideoque aequilibrii proprietatibus in libro ſuperiore deſcriptis ſit praedita.

§. 98. Ponamus igitur nauem aquae ita immitti vt determinata illa pars ſub aqua ſit ſubmerſa, atque inueſtigemus, quomodo nauem comparatam eſſe oporteat, vt in hoc ſitu quieſcere, atque aequilibrium conſeruare queat. Manifeſtum autem eſt ex primis hydroſtaticae legibus, ad hoc duas requiri, quarum altera pondus totius nauis ſpectat, altera locum ipſius centri grauitatis. Primo enim totius nauis pondus tantum eſſe debet, vt aequale ſit ponderi maſſae aquae, cuius volumen aequale eſt volumini partis ſubmerſae. Deinde neceſſe eſt, vt centrum grauitatis totius nauis ac centrum grauitatis ſpatii, quod in aqua occupat, ſeu centrum magnitudinis partis ſubmerſae, in eadem recta verticali ſint ſita.

§. 99. Volumen igitur partis ſubmerſae, ſi in menſura cognita fuerit datum, praebebit leui calculo, grauitati aquae innixo pondus, quod toti naui eſt conferendum, vt neque maior nauis pars neque minor in aquam ingrediatur. Pondus autem cuiusuis nauis tanquam ex duabus partibus conflatum conſiderandum eſt; ex pondere ſcilicet ipſius nauis et rerum ad ipſam pertinentium, cuiusmodi ſunt mali, remi, ancorae, aliaeque machinae; atque inſuper ex pondere onerum impoſitorum. Cum igitur pondus ipſius nauis in ſe ſpectatae fuerit cognitum, ex quantitate partis ſubmergendae colligere licebit, quanta onerum copia addi debeat, vt nauis definitum obtineat pondus. Ex quo perſpicitur, vt nauis maximae onerum copiae capax reddatur, cum ipſum nauis corpus quantum fieri poteſt, le-

Digitized by Google

leuiſſimum, tum partis ſubmergendae volumen maximum eſſe oportere.

§. 100. Neque vero onerum quantitatem cuique naui imponendorum tam diligenter definiri opus eſt, quoniam in ipſa oneratione manifeſtum fit, quando debita onerum copia eſt ingeſta. Cum enim a prima conſtructione portio nauis aquae immergenda definiatur tamdiu oneribus imponendis erit continuandum, quoad definita illa pars ſub aquam prematur. Quamobrem in ipſa conſtructione potius ad finem praepoſitum reſpici oportebit, nauemque ita accommodari, vt praeſcriptam onerum copiam capere queat. Ad quoduis enim partis aquae ſubmergendae volumen per vſum practicum determinabitur pondus totius nauis in ſe ſpectatae, quod a pondere aequalis voluminis aquae ablatum praebebit pondus onerum imponendorum, vnde viciſſim ſi praeſcribatur onerum pondus, cum nauis magnitudo tum etiam quantitas carinae cognoſcentur.

§. 101. Quanquam autem omnis nauis ad determinatum pondus portandum deſtinari ſolet, tamen ita naues confectas eſſe oportet, vt etiam, ſi minus habeat pondus, in aqua ſitum teneat erectum, qui pariter requiſitis praerogatiuis gaudeat. Primum enim cum nauis nuper conſtructa atque etiam nunc vacua aquae immittitur, non ſolum eiusmodi ſitum in aqua tenere debet, quo planum diametrale ſit verticale, ſed etiam prora et puppis ad ſenſum aequaliter immergi debebunt: quod idem tenendum eſt, ſi nauis quamcunque onerationem debita minorem acceperit. Pro huiusmodi igitur caſibus regula huc redit, vt pro quaque onerum impoſitorum copia ſectio aquae parallela fiat illi ſectioni aquae, quam nauis, cum com-

pletam onerum copiam eſt conſecuta, tenere debet. Hac enim regula vtrumque obtinetur, cum vt planum diametrale ſit verticale, tum vt prora et puppis aequaliter ſubmergantur.

§. 102. Regula haec ad ſitum nauium vacuarum ſpectans maximi eſt momenti, ac ſi in conſtructione cuiuspiam nauis contra eam peccatur, id pro ingenti damno haberi ſolet. Duplici autem modo contra iſtam regulam impingitur; quorum alter in inaequalitate laterum nauis conſtat, indeque euenit, vt, cum nauis in aquam demittitur, planum diametrale non teneat ſitum verticalem, ſed verſus latus grauius inclinetur. Alterum vitium committitur, ſi vel prora vel puppis nimis fabricetur ponderoſa, tum enim ea pars quae grauior eſt aquae profundius immergitur, leuior vero extra aquam magis eminebit quam decet. Haecque vitia eo plus incommodi afferunt, quo ſint maiora: atque ſi ambo coniunctim in eadem naui deprehendantur, id merito maximo vitio verti ſolet.

§. 103. Quanquam vero his vitiis, ſi quaedam nauis iis laboret, per onerationem remedium afferri poſſe videtur, dum parti leuiori maior onerum quantitas imponitur; tamen iſta medela cum aliis maioris momenti incommodis eſt coniuncta. Praeterquam enim quod eiusmodi nauis ante, quam haec vitia tolli queant, in eo maiore periculo verſatur, quo ea ſint maiora, atque adeo ſtatim ſubverſione perire poſſit, ipſa quoque oneratio, per quam alias plura atque inſignia emolumenta nauibus afferri poſſunt, nimis reſtringitur, ac ſi memorati defectus ſatis ſint enormes, nihil omnino commodi ex oneratione conſequi licet. Quin etiam ſcopus, cui nauis eſt deſtinata ſaepe numero

ro obtineri non poteſt, eo quod in eam nauis partem, quae per ſe iam eſt nimis ponderoſa, onera omnino imponere non licet, quo fit vt non ſolum ſpatium ab oneribus vacuum ſit relinquendum, quod alias maxime idoneum foret ad onera capienda, ſed etiam eo ipſo ſtatus aequilibrii infirmitati fiat obnoxius.

§. 104. Quando autem nauis ab his vitiis fuerit immunis, atque aquae commiſſa etiam nunc vacua ſitum accipiat erectum, quo ſectio aquae, illi quam habere debet, cum fuerit onerata, ſit parallela, tum non ſolum nauis ab incommodis memoratis erit libera, ſed etiam ad onerationem debito modo perficiendam maxime erit accommodata. Hoc enim ſolo caſu licebit onera imponenda aequaliter per totam nauis cavitatem diſtribuere, ac regulas, quae infra circa onerationem praeſcribentur obſeruare. Si enim hoc modo onera tam verſus latera, quam verſus proram et puppim aequaliter diſtribuantur, tum nauis motu ſibi parallelo continuo magis immergetur, donec debita pars ſub aqua verſetur. Omnes autem rationes quae infra circa onerationem afferentur, aequabilem diſtributionem requirunt.

§. 105. Quo magis igitur perfecta nauium conſtructio requirit, vt nauis adhuc vacua in aqua ſitum erectum obtineat, eo magis eſt cauendum, ne in conſtructione vitia committantur. Quod quidem ad ſitum verticalem plani diametralis attinet, is niſi ingens incuria adſit, facile obtinetur ambobus lateribus non ſolum ratione figurae ſed etiam ratione ponderis partium, quibus latera conſtant, aequalibus conſtruendis. Ratione prorae autem et puppis ſitus erectus difficilius producitur, niſi volumine fere ſint inter ſe ſimiles hae duae nauium partes. At ſi altera pars

 alte-

Digitized by Google

alteram mole multum excedat; tum difficulter, euitatur quia pars maior magis immergatur quam minor. Quare, quo altera pars alteram mole magis ſuperat, eo magis erit augendum minoris pondus, maioris autem partis pondus diminuendum: ad quod recte obſeruandum, ad centrum grauitatis voluminis aquam ſubeundi maxime eſt reſpiciendum; qua de re mox neceſſaria praecepta proferentur.

§. 106. Quantumuis autem magna cura ad incommoda haec effugienda adhibeatur, tamen ſaepenumero memorati defectus euitari non poſſunt. Neque vero ideo iſtiusmodi naues, niſi multum a ſcopo aberrent, tanquam ineptae ſunt cenſendae et regiciendae, ſed opera potius ſumma eſt adhibenda, vt talis defectus quam commodiſſime tollatur. Fiet hoc, dum illi nauis parti, quae extra aquam nimium eminet, ſeu quae illi quae nimium immergitur, eſt opoſita, tanta onerum copia imponatur, donec obliquitas ſitus omnino ſit ſublata. Atque in hac correctione praeſtabit ponderibus maxime grauibus vti, quo iis ſpatium quam minimum occupetur, ſatisque ſpatii ſuperſit, ad reliqua onera ſecundum praecepta imponenda. Interim tamen id eſt tenendum, quo longius haec pondera a communi centro grauitatis remoueantur, eo paucioribus ponderibus intentum aequilibrii ſitum obtineri.

§ 107. Expoſitis his, quae tum ad ipſius nauis pondus tum onerum imponendorum quantitatem ſpectant; quibusque quantitas voluminis aquae immergendi determinatur, inquiramus in alteram huius capitis partem, qua effici debet, vt data portio aquam ſubeat, dataque ſupra aquam emineat, ſeu vt data nauis ſectio fiat horizontalis, atque in aquae ſuperficiem incidat. Quoniam autem haec pro-

proprietas nauibus tam vacuis quam onuſtis communis eſſe debet, primo nauem vacuam ita eſſe oportet, comparatam, vt aquae immiſſa ſeſe in ſitum erectum recipiat, deinde inueſtigandum eſt, quomodo onera ſint diſponenda, vt iis impoſitis nauis denuo ſitum erectum accipiat. Cum igitur ſitus erectus ſit is, quo ſectiones, quae ſupra vocatae ſunt horizontales actu ſecundum horizontem collocantur, vtroque caſu id tantum eſt praeſtandum, vt ſectiones horizontales dictae ſitum horizonti parallelum conſequantur.

§. 108. Cum autem tanta nauis portio infra aquae ſuperficiem eſt depreſſa, vt aqua de loco ſuo depulſa pondere adaequet ipſam nauem, id ad aequilibrium nondum ſufficit, ſed inſuper requiritur vt centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem incidat, in qua centrum grauitatis ſpatii, quod nauis in aqua occupat, verſatur; quod centrum in ſuperiori libro breuitatis et diſtinctionis gratia centrum magnitudinis partis ſubmerſae appellare conſueuimus. Hoc enim centrum minus congrue vocaretur ſimpliciter centrum grauitatis carinae, etſi carina nobis eam nauis partem denotat, quae aquae eſt immerſa; ſed addenda eſſet conditio, qua tota carina ex homogenea materia conſtare ponatur. Qua propter altera conditio ad aequilibrium producendum neceſſaria huc redit, vt centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis carinae in eandem rectam verticalem incidant.

§. 109. Contemplemur nunc nauem ſiue vacuam ſiue onuſtam, ac ponamus huic alteri conditioni iam eſſe ſatisfactum, ita vt aquae immerſa ſitum teneat erectum. Quoniam igitur in hoc ſitu planum diametrale eſt verti-

Digitized by Google

cale, carina ſeu pars aquae immiſſa conſtabit ex duabus partibus ratione figurae externae inter ſe aequalibus et ſimilibus: atque hanc ob rem eius centrum magnitudinis in ipſo plano diametrali erit ſitum. Quia autem poſitio verticalis plani diametralis ſola ad ſitum erectum non ſufficit, ſed praeterea requiritur, vt eae ſectiones ad planum diametrale normaliter factae, quas ante vocauimus horizontales, actu ſecundum horizontem ſint diſpoſitae; ex figura carinae externa ipſe centri magnitudinis locus in plano diametrali per calculum definiri debebit, quo cognito rectae verticalis, in qua hoc centrum exiſtit, poſitio innoteſcet.

§. 110. Cum igitur ſine calculo iam conſtet centrum magnitudinis partis ſubmerſae ſeu carinae in plano diametrali eſſe ſitum, ſi quidem nauis ſitum teneat erectum, duabus inſuper determinationibus ad ipſum huius puncti ſitum definiendum erit opus. Primum enim eius diſtantia a prora vel a puppi determinari debet, ſeu quod eodem redit a ſectione transuerſali ampliſſima: niſi enim in ipſam hanc ſectionem ampliſſimam cadat, vel in proram vel in puppim incidet, atque vtroque caſu eius diſtantia a ſectione ampliſſima ope calculi eſt inueſtiganda. Deinde ſingulari calculo profunditatem iſtius centri magnitudinis in veniri oportet, ſiue diſtantiam a ſectione aquae. Si enim hae duae res fuerint exploratae, ipſum punctum in plano diametrali aſſignari poterit, in quod centrum magnitudinis carinae cadit.

§. 111. Quoniam autem ad inſtitutum noſtrum ſufficit rectam verticalem, in qua centrum hoc magnitudinis eſt ſitum determinaſſe; poſteriore determinatione in hoc

Digitized by Google

hoc capite ſuperſedere poterimus. Cum enim per priorem determinationem cognita fuerit diſtantia centri itius a ſectione ampliſſima vel verſus proram vel verſum puppim; ſimul poſitio rectae verticalis, in qua hoc centrum eſt ſitum, innoteſcet. Namque ſi in plano diametrali ad tantam diſtantiam a ſectione ampliſſima vel verſus proram vel puppim, quantum centrum magnitudinis ab eadem ſectione diſtare inuentum eſt, ducatur recta verticalis, erit haec ipſa recta verticalis illa linea nobis cognitu neceſſaria, in qua ſimul centrum grauitatis totius nauis debet eſſe ſitum. Neque igitur in praeſenti negotio opus eſt, vt ipſum huius rectae punctum, in quod centrum magnitudinis incidit, definiatur; cum ſola rectae verticalis per id tranſeuntis poſitio ad ſitum aequilibrii ſufficiat. At in ſequentibus, cum de firmitate ſitus aequilibrii agetur, iſta determinatio, quam hic tuto negligere poſſumus, maxime erit neceſſaria: contra vero altera negligetur.

§. 112. Conſideremus primum eam tantum lineae verticalis per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſeuntis affectionem, qua inuenimus eam in ipſo plano diametrali eſſe ſitum. Cum igitur centrum grauitatis totius nauis in eandem rectam verticalem cadere debeat, id ante omnia in plano diametrali poſitum ſit neceſſe eſt. Quoniam vero nauis adhuc vacua, ſi in aquam demittatur ſitum erectum tenere debet, etiam nauis vacuae centrum grauitatis in plano diametrali ſitum eſſe oportet. Huic vero conditioni facillime ſatis fit; cum enim nauis ex duabus portionibus ad vtramque plani diametralis partem ſitis conſtet ſimilibus et aequalibus, ſi conſtructio vtrinque

ſimilis

Digitized by Google

ſimilis adhibeatur, eo ipſo centrum grauitatis in planum diametrale incidet.

§. 113. Quando nauis vacua iſta proprietate iam gaudet, eiusque centrum grauitatis in planum diametrale incidit, tum oneratione eadem conditio non difficulter ad implebitur. Quantum enim onerum pondus in vnum nauis latus imponitur, tantumdem in alterum latus erit collocandum; vtrinque in eadem a plano diametrali diſtantia. Hac namque regula obſeruata onerum impoſitorum commune centrum grauitatis in planum diametrale cadet et proinde etiam centrum grauitatis nauis et onerum coniunctim. Hanc ob rem onera vehenda in duas partes aequales diſtribui conuenit, atque ambas ſemiſſes per ambo nauis latera aequaliter diſponi. Neque vero aliae rationes huic onerandi modo aduerſantur, quin potius omnes eundem requirunt. Atque hinc vitium merito cenſetur, ſi ob inaequalitatem ponderis laterum nauis amborum haec lex in oneratione obſeruari non poteſt.

§. 114. Contemplemur nunc ipſam iſtius rectae verticalis, quae per centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt ducta, poſitionem; ac primo quidem ponamus proram puppi omnino ſimilem eſſe et aequalem, ita vt etiam ſectio ampliſſima nauem in duas partes ſimiles et aequales diuidat. Manifeſtum igitur eſt rectam illam verticalem hoc caſu per medium plani diametralis eſſe tranſituram, atque in interſectione huius plani cum ſectione ampliſſima fore ſitam. Hanc ob rem tam ipſius nauis vacuae quam onuſtae centrum grauitatis in eadem recta debebit eſſe poſitum. Quod quidem ad centrum grauitatis ipſius nauis attinet, id ſponte in hanc rectam cadet, ſi quidem porra

et

Digitized by Google

et puppis ſimili modo fuerint conſtructae, quae conditio ob harum partium ſimilitudinem externam facile obtinetur.

§. 115. Cum igitur hoc caſu nauis ex quatuor partibus aequalibus et ſimilibus conſtet, in quas cum a plano verticali diametrali tum a ſectione ampliſſima diſpeſcitur, onera quoque per has quatuor partes aequabiliter diſtribui oportebit. Interim tamen, ſi quae rationes poſtulent, vt in puppim maior minorue onerum copia collocetur, quam in proram; etiam huic conditioni facillime ſatis fieri poteſt. Quo enim plura pauciorave onera puppi debent imponi quam prorae, eo vel propius vel longius a ſectione ampliſſima debent collocari; vt, etiamſi onerum copia proram et puppim occupantium ſit inaequalis, tamen eorum centrum grauitatis in rectam verticalem per medium nauis tranſeuntem cadat. Huicque conditioni, innumerabilibus modis ſatis fieri poteſt, ita vt inſuper plures aliae conditiones, quas firmitas aliaeque circumſtantiae requirent, per onerationem, hac conditione non laeſa ſeruari queant.

§. 116. Hypotheſis haec, qua proram et puppim inter ſe aequales et ſimiles poſuimus, latiſſime patet, ac non ſolum ad omnes decem nauium ſpecies in ſuperiore capite recenſitas extenditur, ſed etiam eiusmodi figuras, quae ad illas ſpecies reuocari nequeunt, ſub ſe complectitur. Quaecunque enim figura prorae detur, ſi eadem ipſa figura etiam puppi tribuatur, orietur figura nauis ſub iſta hypotheſi comprehenſa; in qua centrum magnitudinis partis ſubmerſae in recta verticali per medium nauis ducta ſitum erit. Quamobrem modus, quem tum in conſtru-

Pars II. H ctione

ctione tum in oneratione iſtiusmodi nauium tenere oportet, diligenter eſt notandus, quo, quantum ab eo recedi debeat, ſi nauis figura fuerit diuerſa, facilius intelligi queat. Manifeſtum enim eſt, quo magis figura nauis ab iſta hypotheſi diſcrepet, eo magis ab expoſita cum conſtructionis tum onerationis ratione eſſe diſcedendum.

§. 117. In quacunque autem recta verticali centrum magnitudinis partis ſubmerſae ſitum eſſe reperiatur non ſolum oneratio ſed etiam conſtructio nauium maxime manet indeterminata. Cum enim, quantum quidem ad praeſens inſtitutum attinet, id tantum efficiendum ſit, vt centrum grauitatis totius nauis et onerum in eandem rectam verticalem cadat; momenta ponderum omnium reſpectu huius rectae quaquauerſus aequalia eſſe debent. Neque vero hac aequalitate quicquam aliud determinatur, praeter aequalitatem productorum ex ſingulis ponderibus in diſtantias a duabus rectis horizontalibus per rectam illam verticalem ductis; prouti ex ſtatica ſatis conſtat: cui quidem requiſito innumerabilibus modis ſatisfieri poteſt. Haec vero ideo monenda ſunt, ne regulae, quae infra circa onerationem occurrent, ſuperfluae videantur, ſed iam ante intelligatur per onerationem pluribus conditionibus ſatisfieri poſſe.

§. 118. Infinita multiplicitas onerandi modorum, quibus idem ſcopus, incidentia ſcilicet centri grauitatis in datam lineam verticalem, obtinetur, adhuc clarius percipietur, ſi conſideremus duo tantum pondera infinitis modis ita diſponi poſſe, vt eorum centrum grauitatis locum non mutet: ac ſi tria fuerint pondera, numerus modorum ea collocandi fit denuo infinities maior, hocque pacto multipli-

plici-

Digitized by Google

plicitas creſcit, quo numerus ponderum fit maior. Cum igitur haec ſtupenda varietas ex dato centro grauitatis ſit orta, perſpicuum eſt eam denuo in infinitum augeri ſi ponderum imponendorum non ipſum centrum grauitatis, ſed tantum linea recta, in quam id cadere debet, praeſcribatur. Hicque caſus ad noſtrum praeſens inſtitutum eſt accommodatus, quo ad ſitum aequilibrii producendum ſufficit, ſi centrum grauitatis totius nauis onuſtae in datam rectam verticalem incidat.

§. 119. Ob hanc incomprehenſibilem multiplicitatem onerationis facillime ſitus aequilibrii erectus obtineri poterit. Non enim ad onerationem perficiendam tam ad poſitionem rectae illius verticalis quam ad ipſum ſitum erectum erit reſpiciendum. Quamuis enim incognita ſit rectae illius poſitio, tamen onera ita poterunt diſponi, vt nauis ſitum erectum accipiat. Ac ſi eueniat, vt poſt onerationem quaepiam nauis pars nimis immergatur, medela in promtu erit, vel oneribus illi parti impoſitis diminuendis, vel propius verſus medium nauis admouendis, quorum vtroque modo eorum momentum diminuitur. Neque vero in hoc negotio ad minutias erit reſpiciendum, cum nauis in ſitu aequilibrii firmitatem habere debeat, qua fit, vt, etiam ſi centrum grauitatis omnium onerum parumper immutetur, tamen inde minima inclinatio a ſitu erecto oriri debeat.

§. 120. Quoniam autem hoc non obſtante accuratam cognitionem poſitionis rectae illius verticalis, in qua centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt ſitum, habere conuenit, cum ea non ſolum ad conſtructionem nauium ſed etiam ad diiudicationem ſit neceſſaria, conſideremus

Digitized by Google

nauem, in qua prora quantumuis diſſimilis ſit puppi: caſus enim, quo hae ambae partes inter ſe ſunt ſimiles et aequales, nihil habet difficultatis, et iam eſt ſatis euolutus.

Tab. V. fig. 1. Repraeſentet igitur figura α AHEβ planum diametrale eiusmodi nauis, quod cum ſitus adeſt erectus, non ſolum verticale eſſe debet, ſed etiam neceſſe eſt, vt lineae AB, *a b* quae ſectiones horizontales dictas repraeſentant, ſecundum horizontem ſint diſpoſitae. Sitque *a b* ſectio aquae, ad quam recipiendam nauis etiam nunc vacua debet eſſe accommodata; atque AB ſectio aquae naui onuſtae reſpondens.

§. 121. Conſideremus primo nauem vacuam, ac cum ea aquae immiſſa ſectio aquae debeat eſſe *ab*, erit *a*HE *b* pars aquae immerſa cuius volumen proportionale erit ponderi nauis: ſeu poſito hoc volumine = V, pondus navis aequale erit ponderi molis aquae volumen V habentis. Sit porro *f b* recta verticalis, in qua centrum gravitatis iſtius voluminis V eſt ſitum; in eandem ergo rectam verticalem centrum grauitatis nauis vacuae incidere debebit. Ponamus autem nauem iam vtrinque aequaliter eſſe fabricatam, ita vt eius centrum grauitatis in ipſa plano diametrali ſit poſitum, atque in id tantum inquiramus, per quod centrum grauitatis in ipſam erectam *f b* conſtituatur. Ponamus igitur pondus partis nauis, quae ante rectam *f b* ad proram vsque extenditur, eſſe = M, reliquae vere portionis poſt rectam *f b* ad puppim vsque extantis pondus eſſe = N; ita vt M + N praebeat pondus totius nauis volumini partis ſubmerſae V proportionale.

§. 122. Diuiſio nauis in duas has partes aptiſſime fieri concipitur per ſectionem transuerſalem ad rectam *a b* in

in puncto γ normalem, quae partem anteriorem a poſteriore diſcernet. Sit nunc partis anterioris $\alpha\, A\, b\, f$ centrum grauitatis in recta verticali R M r; partis autem poſterioris $\beta\, E\, b\, f$ centrum grauitatis in recta verticali S N s poſitum. Cum igitur commune centrum grauitatis ambarum partium in rectam $f\, b$ cadere debeat, oportebit eſſe $M. Mg = N. Ng$. Si ergo hae duae partes pondere fuerint aequales, neceſſe eſt vt etiam interualla Mg et Ng ſint aequalia. At ſi pondera M et N fuerint inaequalia, tum interualla Mg et Ng eorum rationem inuerſam tenere debebunt. Ex quibus perſpicitur ad conſtructionem nauium poſitionem rectae $f\, b$ omnino debere eſſe cognitam, ad eamque conſtructionem dirigi oportere.

§. 123. Non exiguum ad hoc negotium afferetur adiumentum, ſi nauis per ſectionem aquae $a\, b$ ſitui erecto nauis vacuae competentem in partem ſuperiorem extra aquam eminentem, et partem inferiorem ſub aqua verſantem diuiſa concipiatur: ſi enim pars inferior ex vniformi materia conſtaret, tum eius centrum grauitatis ſponte in rectam $f\, b$ caderet. Tametſi autem iſta pars caua eſſe ſoleat, tamen non difficulter aberratio eius centri grauitatis ab hac recta $f\, b$ aeſtimabitur: ſufficit enim in hoc negotio ad veritatem proxime aeſtimando accedere, neque opus eſt geometrico rigore; cum per firmitatem naui inducendam omnibus huiusmodi erroribus occurri debeat. Cum autem partis inferioris centrum grauitatis fuerit definitum, facile regulae pro conſtruenda ſuperiori parte formabuntur, vt commune grauitatis centrum in praeſcriptam rectam $f\, b$ incidat.

Digitized by Google

§. 124. Cum igitur nauis vel iam ita erit conſtructa, vt vacua ſitum erectum in aqua obtineat, vel error non nimis magnus, qui forte ſit commiſſus, oneribus quibusdam rite collocatis, erit ſublatus, efficiendum inſuper erit, vt nauis onuſta ſitum teneat erectum: ad quod obtinendum cum formae nauis tum etiam onerationis rationem haberi oportet. Practice quidem nauis ad iſtum ſitum erectum non difficulter inſtruetur: ſi enim recta AB repraeſentet ſectionem aquae ſitui erecto nauis onuſtae convenientem; primo tanta onerum copia imponenda erit, vt volumen AHEB in aquam imprimatur; deinde onera ita diſponi oportet, vt haec ipſa aſſignata pars in aquam ingrediatur. Hocque negotium eo promtius perficietur ſi impoſitio onerum ita dirigatur, vt perpetuo ſectio aquae parallela maneat ſectioni ab, hocque modo pergatur donec AB ſuperficiem aquae contingat.

§. 125. Vt autem inueſtigemus, quo pacto tum conſtructio tum oneratio comparata eſſe debeat, ad iſtum ſcopum attingendum; ponamus ſuperficiem ſectionis aquae ab eſſe $= E$; ac cum ſectio aquae AB pro naue onuſta illi debeat eſſe parallela, ſit diſtantia harum ſectionum $Cc = b$. erit volumen denuo per onera ſubmergendum proxime $= Eb$; ſi quidem amplitudo nauis per ſpatium Cc fuerit fere eadem. At ſi. ſuperficies ſectionis AB multum differat a ſectione $ab = E$, ponatur ſectio AB $= F$; ac volumen inter has ſectiones contentum propius erit $= \frac{Cc(E + \sqrt{EF} + F)}{3}$: conſiderata hac portione, vti ſine notabili errore fieri poteſt, inſtar coni truncati. Ex hoc itaque volumine cognoſcetur quantitas onerum imponendorum;

Digitized by Google

dorum; ex qua iuſta nauis oneratio oritur, ſimulque pondus nauis onuſtae innoteſcit.

§. 126. Ponatur volumen huius portionis nauis inter ſectiones horizontales AB et ab contentae $= U$; atque cum pondus nauis nondum onuſtae eſſet $= M + N$, volumenque partis ſubmerſae naui vacuae reſpondentis $= V$; prodibit quantitas iuſtae onerum imponendorum copiae = ponderi $\frac{U(M+N)}{V}$. Quoniam autem ante omnia requiritur, vt nauis onuſtae centrum grauitatis in ipſum planum diametrale incidat, iſta onerum copia per cauitatem nauis ita diſponi debet, vt eorum commune grauitatis centrum in hoc planum cadat. Huic quidem requiſito facile ſatisfit, diſponenda vtraque onerum medietate per ambo latera nauis aequaliter. Quo facto ſimul vtriusque onerum portionis cum parti anteriori $\alpha A bf$ tum poſteriori $\beta E bf$ impoſitae centrum grauitatis in planum diametrale collocabitur.

§. 127. Quia vero in oneratione ad centrum magnitudinis totius partis ſubmerſae AHEB eſt reſpiciendum, portionis autem aHEb centrum magnitudinis in rectam verticalem bf cadit, verticalem illam definiri oportet, in qua centrum magnitudinis partis ſubmerſae AHEB erit poſitum. Hanc in finem ponamus portionis AabB centrum magnitudinis verſari in recta verticali Cc, quae verſus proram diſtita ſit a recta fb interuallo $Cg = c\gamma$. Hoc poſito centrum magnitudinis partis ſubmerſae AHB, quae naui onuſtae competit, in rectam quandam FH mediam inter Cc et fb cadet. Atque ex natura centri grauitatis erit $V. Gg = U. GC.$ ſeu $V. Cg - V. CG = U. GC$, ex quo fit $CG = \frac{V\, Cg}{V+U}$ atque $Gg = \frac{U \cdot Cg}{V+U}$. Hinc itaque practi-

Digitized by Google

practice ſatis commode poſitio rectae FH determinabitur, cuius cognitio ad vniuerſam nauium doctrinam ſumme eſt neceſſaria.

§. 128. Retineamus nauis diuiſionem ante factam in partem anteriorem $\alpha A b f$ et poſteriorem $\beta E b f$, diſcrimine poſito in ſectione transuerſali per verticalem fb facta: ſitque onerum parti anteriori impoſitorum pondus $=$ P, eorumque centrum grauitatis commune in recta verticali IPt. Simili modo ſit pondus onerum parti poſteriori imponendorum $= Q$, quorum commune centrum gravitatis exiſtat in recta verticali VQv. Cum autem omnium onerum pondus aequale eſſe debeat ponderi $\frac{U(M+N)}{V}$, habebitur haec aequatio $P + Q = \frac{U(M+N)}{V}$: ex qua ſumma onerum $P + Q$ determinatur, diſtributio autem in partes P et Q etiamnum arbitrio relinquitur. Quia ergo totius nauis pondus erit $= M + N + P + Q$, fiet id $= \frac{(V+U)(M+N)}{V}$.

§. 129. Cum igitur ad aequilibrium huius ſitus erecti requiratur, vt totius nauis centrum grauitatis in rectam FH incidat, momenta reſpectu huius rectae cum ipſius nauis tum onerum ſequentem ſuppeditant aequationem $M. MG + P. PG = N. NG + Q. QG$. At ſupra ob ſitum erectum nauis vacuae eſſe debebat $M. Mg = N. Ng$. ſeu $M. MG + M. Gg = N. NG - N. Gg$. Cum igitur ſit $Gg = \frac{U.Cg}{V+U}$ erit $N. NG = M. MG + \frac{U(M+N)Cg}{V+U}$: quae aequatio in ſuperiorem introducta dabit $P. PG = Q. QG + \frac{U(M+N)Cg}{V+U}$ ſiue $P. PG - Q. QG = \frac{V(P+Q)Cg}{V+U}$. vnde oritur $P = \frac{U(M+N)QG}{V.PQ} + \frac{U(M+N)Cg}{(V+U)PQ}$ atque $Q = \frac{U(M+N)PG}{V.PQ} - \frac{U(M+N)Cg}{(V+U)PQ}$.

§. 130.

§. 130. Formulae iſtae atque hinc totius onerationis idea multo fiunt ſimpliciores, ſi recta verticalis Cc in ipſam fb incidat. Tum enim ob $Cg = o$, tota onerationis ratio reducetur ad has duas aequationes $P = \frac{U(M+N)QG}{V.PQ}$ et $Q = \frac{U(M+N)PG}{V.PQ}$. Caſus hic quidem in infinitis nauium figuris locum inuenit; at ſi idem in omnes ſectiones aquae medias inter A B et *a b* aeque competat, tum id aliter euenire nequit, niſi vnius cuiusque ſectionis horizontalis intra ſectiones A B et *a b* contentae centrum grauitatis in rectam verticalem fb incidat. Quodſi autem omnes omnino ſectiones horizontales ita formentur, vt ſingulae habeant ſuum centrum grauitatis in eadem recta verticali ſitum, tum ſimul in quocunque ſitu erecto centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam cadet.

§. 131. Praeterquam autem quod eiusmodi nauis figura iudicium facilius reddat; aliae proprietates, quibus quamque nauem praeditam eſſe opertet, eandem conditionem requirunt. Ex ſuperiori enim libro intelligitur, atque in ſequentibus fuſius exponetur, motum reciprocum nauium eſſe maxime tranquillum, ac ſuccuſſionibus minime obnoxivm, ſi centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat, in qua cum centrum grauitatis totius nauis tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae ſunt ſita. Quare cum quaelibet ſectio horizontalis diuerſis onerationibus vicem ſectionis aquae ſuſtinere queat, neceſſe eſt vt omnes ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant diſpoſita.

§. 132. Quanquam autem iſta ratio ad eas tantum ſectiones horizontales, quae intra ſectiones A B et *ab* continentur, proprie pertinet, quippe quae ſolae vicem ſectio-

nis aquae ſuſtinere ſolent, tamen commode eadem proprietas omnibus prorſus ſectionibus horizontalibus tribuitur. Si enim diuerſae ſectiones horizontales ſua centra grauitatis in diuerſis rectis verticalibus haberent diſpoſita, ita vt modo propius ad proram modo propius ad puppim caderent, figura nauis prodiret perquam irregularis; eo quod aliae ſectiones horizontales ampliores forent in parte anteriore aliae in poſteriore, id quod naues vehementer deformaret. Ad hoc accedit, quod, cum haec proprietas per ſpatium C *c* adeſſe debent, eadem ſine laeſione continuitatis reliquis ſectionibus horizontalibus denegari nequeat.

§. 133. Has igitur ob cauſas tanquam vnam ex principalibus regulis figuram nauium ſpectantibus ſtabilimus, per quam omnes naues ita conformatas eſſe oportet; vt ſingulae ſectiones horizontales ſuum grauitatis centrum in eadem recta verticali habeant poſitum. Quae conditio tam etſi figuram nauium non determinat, tamen iam innumerabiles figuras excludit et tanquam ineptas reiicit, ex quo determinatio figurae perfectiſſimae eo facilior redditur, quo magis numerus figurarum, ex quibus electio eſt facienda, reſtringitur. Ad hanc itaque normam conueniet decem ſupra conſtitutas nauium ſpecies examinari, ac ſingulas ſpecies ita inſtrui, vt iſta proprietas in eas cadat. Qnod cum euoluemus, commode euenire deprehendemus, iſtam proprietatem aliquibus ſpeciebus iam eſſe propriam, reliquas autem noua determinatione indigere. Quamobrem inſtitutum hoc ſequentes ſingulas memoratas decem ſpecies percurremus, iiſque inſignem hanc proprietatem inducemus.

§. 134. Quoniam prima nauium ſpecies alias figuras ſub ſe non complectitur, niſi quarum carinae ſunt parallelepipeda

Digitized by Google

pipeda rectangula, omnes ſectiones horizontales erunt parallelogramma rectangula inter ſe aequalia; earumque adeo centra grauitatis in eandem rectam verticalem incident. Quare ſi per centrum grauitatis ſectionis aquae ducta concipiatur recta verticalis, ea ſimul per vnius cuiusque ſectionis parallelae centrum grauitatis tranſibit. Omnes igitur nauium figurae ad primam iſtam ſpeciem pertinentes iſta proprietate, qua ſingulae ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali poſita habere debent, iam ſponte ſunt praeditae, neque ad hunc finem vlla noua determinatione aut reſtrictione habent opus: vnde perſpicuum eſt Arcam Noae ad tranquillam innatationem apprime fuiſſe accommodatam.

§. 135. Simili praerogatiua gaudent omnes figurae ad ſpeciem ſecundam relatae, in quibus pariter omnes ſectiones horizontales non ſolum ſimiles ſed etiam aequales conſtituuntur. Sit enim huismodi figurae ſectio aquae AEBF, diametro ACB praedita; atque ipſa carina formabitur, dum iſta ſectio aquae motu ſibi parallelo ſecundum directionem verticalium $A\alpha$ Bb promoueri concipitur. Ex qua formatione manifeſtum eſt, ſi ſectionis aquae centrum grauitatis ſit in G, vniuscuiusque ſectionis ipſi parallelae centrum grauitatis verticaliter ſub puncto G fore poſitum; ideoque omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in recta verticali Gg fore poſita. In eadem ergo recta Gg ſitum erit centrum magnitudinis carinae totius, idque in eius puncto medio O, atque in eandem incidere oportet centrum grauitatis totius nauis. Nullam igitur nouam reſtrictionem hoc requiſitum figuris Tab. V. fig. 2.

ſecundae ſpeciei inſert, ſed omnes eadem proprietate iam ſponte ſunt praeditae.

§. 136. Quia in praecedente capite hanc ſpeciem leviter tantum attigimus, eo quod eius proprietates facillime percipiuntur, hic in tranſitu eius praecipuas proprietates notaſſe conueniet. Ac primo quidem manifeſtum eſt ſectionem ampliſſimam $EFfe$ eſſe parallelogrammum rectangulum altitudinem habens CD altitudini carinae aequalem, latitudinam vero EF aequari maximae latitudini ſectionis aquae. Porro omnes ſectiones verticales huic ſectioni ampliſſimae erunt pariter parallelogramma eiusdem altitudinis $Pp = CD$; ſed earum latitudines QQ reſpondent latitudinibus ſectionis aquae. Deinde tam planum diametrale $ABba$ quam ſectiones ipſi parallelae omnes erunt pariter parallelogramma, quorum omnium eadem communis eſt altitudo CD: latitudines vero ex data ſectionis aquae figura determinantur.

§. 137. Inquiramus nunc in locum centri grauitatis G ſectionis aquae $AEBF$, vt poſitio rectae verticalis Gg innoteſcat. Sumta itaque in axe CA abſciſſa $CP = p$, ſit applicata $PQ = q$. Capiatur verſus puppim aequalis applicata $RS = q$; ſitque $CP = p = P + \surd Q$, exiſtentibus P et Q functionibus quibuscunque ipſius q, quarum altera Q non ſit quadratum; erit $CR = \surd Q - P$, atque $PR = QS = 2 \surd Q$; rectae igitur QS centrum grauitatis cadet in V exiſtente $QV = SV = \surd Q$, vnde erit $TV = P$. Multiplicetur per dq, atque inuenietur $CG = \frac{\int p\,dq \surd Q}{\int dq \surd Q}$: ſumtis integralibus vt a valore $q = o$ vsque ad valorem $q = CE = b$ pateant. Ex quo manifeſtum eſt, ſi ſit $R = o$ ſeu $TQ = TS$ tum centrum grauitatis G in ipſum punctum

Digitized by Google

punctum C incidere, ac tum rectam verticalem Gg in ipſa ſectione ampliſſima fore poſitam. Contingit ergo hoc quando prora et puppis eandem habent figuram.

§. 138. Pergamus ad figuras tertiae ſpeciei, cuiusmodi figura citata repraeſentat, in qua omnes ſectiones transverſales EDF eique parallelae ſunt inter ſe aequales et ſimiles. In his igitur figuris non datur ſectio ampliſſima transuerſalis, quoniam omnes ſunt aeque amplae; atque prora ac puppis terminantur figuris planis HaH et IbI ſectioni cuique mediae EDF aequalibus. Cum itaque in huius ſpeciei figuris ſectio aquae ſit parallelogrammum rectangulum HHII, eius centrum grauitatis ſitum erit in puncto medio C axis AB exiſtente $AC = BC$. Quoniam porro omnes ſectiones horizontales reliquae MM NN ſunt pariter parallelogramma rectangula longitudinis $mn = AB$, earum omnium centra grauitatis verticaliter ſub C erunt ſita in punctis G; vnde vniuscuiusque ſectionis horizontalis centrum grauitatis in eandem rectam verticalem CD cadet. Tab. VI. fig. 1.

§. 139. Quod igitur ad hoc requiſitum attinet, vi cuius omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali poſita eſſe oportet; eo tres ſpecies priores hactenus conſideratae iam ſua ſponte ſunt praeditae, neque vlla noua determinatione ad huic conditioni ſatisfaciendum eſt opus. Singulae ergo hae ſpecies ſua natura aquae maxime quiete inſidebunt, neque ſuccuſſionibus erunt obnoxiae, ſicut eiusmodi naues, in quibus centrum magnitudinis carinae extra rectam verticalem per centrum grauitatis ſectionis aquae ductam cadit Maxime autem diuerſae indolis deprehendentur iſtae ſpecies, ſi cum ad fir-

mitatem, tum vero potiſſimum ad reſiſtentiam atque ad propulſionem reſpiciemus; vbi tam inſignia incommoda ſe prodent, vt nulla harum ſpecierum apta reperiatur tum ad reſiſtentiam facillime ſuperandam, quam ad potentias ſollicitantes ſuſtinendas.

Tab. VI. fig. 2. §. 140. Species quarta eiusmodi ſub ſe comprehendit figuras, in quibus omnes ſectiones verticales plano diametrali ADB parallelae eidem ſint ſimiles et aequales. Huius igitur carinae latera vtrinque terminabuntur figuris planis HeI et HfI aequalibus et ſimilibus ſectioni diametrali ADB. In huiusmodi ergo figuris ſectio aquae erit parallelogrammum rectangulum HHII, cuius adeo centrum grauitatis cadet in rectae AB punctum medium C. Concipiatur nunc ſectio quaecunque horizontalis MMNN, quae pariter erit parallelogrammum rectangulum, cuius centrum grauitatis vt cadat in punctum G rectae verticalis CD, neceſſe eſt vt ſit $Gm = Gn$: quod cum vbique eſſe debeat, requiritur vt recta CD ſit diameter plani diagonalis ADB. Ex quo ſequitur figuras quartae ſpeciei ad hunc ſcopum non eſſe accommodatas, niſi puppis et prora figuram habeant ſimilem atque aequalem.

§. 141. Secus itaque res ſe habet in hac ſpecie quarta ac in praecedentibus, cum praecedentes ſua ſponte gaudeant ea proprietate, vt omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali ſint poſita; haec vero ſpecies limitatione indigeat. Scilicet vt figurae quartae ſpeciei ad hoc requiſitum accommodentur, oportet ſectionem transuerſalem ampliſſimam EefF ſimul carinam in duas partes ſimiles et aequales diſpeſcere. Ex quarta igitur ſpecie iam omnes excluduntur figurae, in quibus puppis

puppis et prora inter ſe ſunt diſſimiles, tanquam penitus ineptae ad naues formandas. Quo circa ex hac ſpecie eae ſolae figurae nobis ad vlteriorem inueſtigationem ſupererunt, in quibus planum diametrale diametrum habet verticalem in ſectione ampliſſima ſitam.

§. 142. Ne autem in ſimili examine ſequentium ſpecierum tam a multiplicatione figurarum, quam earundem perplexitate impediamur, viſum eſt relictis figuris ſtereometricis figuras tantum planas, eas carinae ſectiones repraeſentantes, adhibere, quibus ad explicationem opus habebimus. Seorſim itaque conſpectui exponimus cum tres ſectiones principales cuiusque carinae, tum etiam totidem ſectiones illis reſpectiue parallelas; vnde ſex exoriuntur figurae ſimplices, quas ad ſpeciem quamcunque accommodare licebit. Atque hoc pacto non ſolum diſtinctius omnes partes, quas conſiderari oportet, oculis offeruntur ſed etiam linearum ſectionumque perturbatae declineationes euitantur, quibus figurae ſtereometricae ſolent eſſe obnoxiae.

§. 143. Cuiuscunque igitur ſpeciei carina nobis ſit propoſita, figura prima nobis deſignabit ſectionem aquae, cuius diameter A B, maximaque latitudo E F: ac prora verſus A puppis vero ad B ſita ponitur. Figura ſecunda repraeſentat ſectionem ampliſſimam, ortam ſectione verticali per rectam E F in ſectione aquae facta. Tertia autem figura ſignificat planum diametrale, ſeu ſectionem verticalem per diametrum A B ſectionis aquae factam. Tres hae figurae ſectiones principales exhibentes ita ſunt litteris notatae, vt iisdem lineis punctisque eaedem litterae reſpondeant: ita figurae prima et ſecunda communem habent lineam E C F; prima vero et tertia communem habent Tab. VII. fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

lineam

lineam AB; ac ſecunda et tertia profunditatem CD habent communem.

§. 144. Vt etiam vbique easdem denominationes retineamus, maneant, vt hactenus poſuimus $AC = a$; $BC = \alpha$; $EC = FC = b$, et $CD = c$. Deinde ſectionis aquae natura exprimatur aequatione inter coordinatas CP et PQ, ſitque conſtanter $CP = p$ et $PQ = q$; vnde aequationem inter p et q ita comparatam eſſe oportet, vt poſito $p = o$ fiat $q = b$, poſitoque vel $p = a$ vel $p = -\alpha$ euaneſcat q, ſi quidem ſectio aquae curua continua cingatur. Pro ſectione ampliſſima ſint coordinatae $CR = r$ et $RS = s$, eademque aequatio pro vtraque ſemiſſe CDE, CDF valebit. Naturam denique plani diametralis contineat aequatio inter coordinatas $CT = t$ et $TV = u$: ac vel eadem aequatione comprehendantur ambae partes ACD, BCD vel diuerſis, prouti hae partes vel continuam curuam conſtituant vel ſecus.

§. 145. Tribus hiſce ſectionibus principalibus conſideratis, quae ad omnes ſpecies pertineant, contemplemur totidem ſectiones iſtis parallelas; ac primo quidem figura quarta exhibeat ſectionem horizontalem quamcunque, ſeu ſectioni aquae parallelam; quae ſectio ſecet ſectionem ampliſſimam per rectam MTM, planum diametrale vero per rectam VTU, vti conuenientia litterarum indicat. Simili modo figura quinta repraeſentet ſectionem verticalem ſectioni ampliſſimae parallelam, ſectionem aquae ſecantem in QPQ, planum diametrale vero in PN. Denique ſexta figura offert ſectionem verticalem plano diametrali parallelam, quae facta eſt per rectam IRK in ſectio-

ſectione aquae ſumtam, ac per rectam RS in ſectione ampliſſima conſtitutam.

§ 146. Cum igitur intelligatur, quemadmodum ſingulae iſtae figurae ad quamque carinam oblatam ſint referendae, ex iisque ipſa carinae figura determinetur, ad ſequentes ſpecies examinandas progrediamur Primum autem ſe offert ſpecies quinta, in qua omnes ſectiones horizontales cum inter ſe tum ſectioni aquae ſunt ſimiles Hanc obrem erit $AC : CE = TV : TM$ atque $BC : CE = UT : TM$: ex quo ſequitur ſectionem ampliſſimam in figura ſecunda expreſſam, ac planum diametrale in fig. 3. ita a ſe inuicem pendere, vt altera figura ex altera determinetur. Sumtis enim in CD aequalibus portionibus CT, erit $TV : AC = TM : CE$ atque etiam ex altera parte $TU : BC = TM : CF$: vnde iſtae figurae inter ſe erunt affines; dataque earum altera vna cum ſectione aquae, totius carinae figura determinatur.

§. 147. Cum autem requiratur, vt omnes ſectiones horizontales habeant ſua grauitatis centra in eadem recta verticali poſita; ſi ſectionis aquae centrum grauitatis ſitum ſit in G, ſectionis vero ei parallelae ſeu figurae 4. in g, oportet vt ſit $CG = Tg$, eo quod punctum C et T in eadem recta verticali ſint poſita. At ob ſimilitudinem figurarum eſt $CG : Tg = CA : TV$: vnde duplici modo requiſita proprietas obtinebitur; primo nempe, ſi $CA = TV$, hocque euenit, ſi omnes ſectiones horizontales non ſolum inter ſe fuerint ſimiles, ſed etiam aequales; qui caſus ad ſpeciem ſecundam recidit. Altero autem modo, qui proprie ad hanc ſpeciem ſpectat requiſita proprietas obtinetur, ſi fuerit $CG = o$. Quocirca figurae huius

Digitized by Google

quintae ſpeciei ad ſcopum non erunt idoneae, niſi ſectionis aquae centrum grauitatis G in ipſum punctum C, in quo ſectio ampliſſima diametrum ſecat, incidat.

§. 148. Vt igitur carina ad hanc quintam ſpeciem pertinens praedita ſit requiſita proprietate, eius ſectionem aquae ita comparatam eſſe oportet, vt ſit $CG = o$, ſeu vt eius centrum grauitatis G in ipſum punctum C cadat; atque omnes figurae, quae hac proprietate carent, tanquam ineptae ſunt reiiciendae idque eo magis, quo magis centrum grauitatis ſectionis aquae G a puncto C recedit. Sed vt C G euaneſcat, oportet aggregatum omnium RI^2 in porra aequale eſſe aggregato omnium RK^2 in puppi: id quod ob tangentes in E et F ipſi A C parallelas vſu venire non poteſt, niſi partes E A F et E B F inter ſe ſimiles ſint et aequales; ſaltem proxime. Si enim alicubi eſſet $RI^2 > RK^2$, alio loco deberet eſſe $RI^2 < RK^2$, quae compenſatio locum habere commode nequit; niſi vbique inaequalitas ſit fere inſenſibilis.

§. 149. Si igitur ad hanc ſpeciem inſtituto accommodatam efficiendam requiratur aequalitas inter ſectionis aquae partes EAF et EBF, haec ipſa aequalitas poſt ſe trahet aequalitatem inter partes plani diamatralis ACD et BCD. Primo enim erit $BC = AC$; ac deinde quia portio BCD affinis eſt ſemiſſi ſectionis ampliſſimae FCD, cui etiam affinis eſſe debet portio ACD, erit vbique $TV = TU$ ob $CE : TM = CA : TV$ et $CF : TM = BC : TU$. Hinc autem porro ſequitur aequalitas inter partem carinae anteriorem et poſteriorem, ſeu proram et puppim. Quoties vero iſta aequalitas adeſt inter proram et puppim, tunc nauis iſta proprietate perpetuo gaudet, ad quamcunque ea etiam ſpeciem referatur; prouti ſupra iam notauimus. §. 150.

Digitized by Google

§. 150. Quoniam autem tamen aliqua inaequalitas inter partes ſectionis aquae EAF et EBF intercedere poteſt, dummodo hae partes ita ſint comparatae, vt earum commune centrum grauitatis in punctum C cadat, videamus quanta diſſimilitudo admitti poſſit. Ponamus igitur primum partem alteram ACEI eſſe parallelogrammum rectangulum, alteram vero partem CEb eſſe triangulum, ita vt AIEb ſemiſſem ſectionis aquae repraeſentet. Haec igitur figura maximam habebit diſſimilitudinem partium AIEC et ECb, cum in nauibus neque pars AME ad rectangulum excreſcere, neque altera pars ENB vsque ad triangulum extenuari poſſit. Ex quo inaequalitas harum partium AICE et CEb terminum conſtituet, quem nequidem in conſtructione nauium attingere licebit. Tab. VIII. fig. 1.

§. 151. Inquiramus igitur in rationem inter longitudines AC et Cb, quae centrum grauitatis totius figurae in punctum C inferat. Sit igitur AC $= a$; C$b = \alpha$; et CE $= b$; ducaturque recta mPn parallela axi Ab, poſitoque EP $= x$ erit P$m = a$, et P$n = \frac{\alpha x}{b}$. Vt autem huius figurae centrum grauitatis in rectam CE incidat, oportet eſſe ſummam omnium Pn^2 aequalem ſummae omnium Pm^2, ſeu $\int \frac{\alpha^2 x^2 dx}{b^2} = \int a^2 dx$. Hinc itaque oritur $\frac{\alpha^2 x^3}{3 b^2} = a^2 x$ et facto $x =$ CE $= b$, prodit $\alpha^2 = 3 a^2$ ſeu bC $=$ AC $\sqrt{3}$. Maxima ergo inaequalitas, quae inter partes axis AC et Cb intercedere poteſt, minor eſſe ſemper debet, quam ratio $\sqrt{3} : 1$: tantaque inaequalitas nunquam locum habere poteſt.

§. 152. Quando igitur, id quod ſemper ob alias cauſas euenire debet, portio ſectionis aquae altera AME in-

tra rectangulum continetur, tum altera portio, ſiquidem maneat triangulum, breuior erit efficienda, fietque ex hoc capite iam $Cb < AC\sqrt{3}$. Deinde cum figura altera ECB pariter eſſe debeat concaua verſus CB, eo magis eius longitudo Cb contrahetur, ratioque inter AC et CB eo propius ad rationem aequalitatis reducetur. Atque iſta inaequalitas inſuper diminuetur, ſi curuae ENB tangens in E debet eſſe axi AB parallela: quae conditio in nauium conſtructione praecipue requiri ſolet.

§. 153. Examinemus ergo aliquos caſus latius patentes, quibus figurae ex inaequalibus partibus conſtantes ad vicem ſectionis aquae ſuſtinendam aptae redduntur. Manentibus igitur vt ante $EC = b$; $CA = a$; $CB = \alpha$ ſit $EP = x$; $PM = y$ et $PN = z$; ac ponamus $yy = mbx + nxx + \frac{kx^3}{b}$; et $zz = \mu bx + \nu xx + \frac{\varkappa x^3}{b}$; quarum aequatio vtraque tangentem in E praebet axi AB parallelam curuamque realem, dummodo m et μ ſint numeri affirmatiui. Cum autem poſito $x = b$ fiat $y = a$ et $z = \alpha$, erit $a^2 = b^2\,(m + n + k)$ et $\alpha^2 = b^2\,(\mu + \nu + \varkappa)$. Praeterea autem ob locum centri grauitatis in C praeſcriptum debet eſſe $\int yy\,dx = \int zz\,dx$ poſito $x = b$, vnde conſequitur iſta aequatio $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\varkappa}{4}$.

§ 154. Deinde autem natura rei poſtulat, vt applicatae PM et PN, accedente P ad C continuo creſcant; quamobrem differentialia dy et dz, quamdiu x intra limites o et b verſatur affirmatiuum valorem habere debebunt. Vnde oportebit eſſe $mb + 2nx + \frac{3kxx}{b} > o$ itemque $\mu b + 2\nu x + \frac{3\varkappa xx}{b} > o$. Caſu ergo quo $x = b$, fiet $m + 2n + 3k > o$ et $\mu + 2\nu + 3\varkappa > o$ niſi curua in A et B axi AB normaliter occurrat, quo

caſu

Digitized by Google

caſu iſti valores fierent $= o$, ex quo id ſaltem requiritur, vt nec $m + 2n + 3k$ nec $\mu + 2\nu + 3\varkappa$ fiant numeri negatiui. At ſumto $x < b$, omnino habere debent quantitates illae valores affirmatiuos, vnde poſito $x = \frac{1}{2}b$, vtique debebit eſſe $m + n + \frac{3k}{4} > o$ et $\mu + \nu + \frac{3\varkappa}{4} > o$.

§. 155. Quia porro neceſſe eſt, vt ambae curuae AME et ENB vbique ſint concauae verſus axem AB, oportet tam ddy quam ddz negatiuos tenere valores, quamdiu ſaltem $x < b$: cui conditioni ſatisfit ſi fuerit $m^2 > \frac{6mkx^2}{b^2} + \frac{4nkx^3}{b^3} + \frac{3k^2x^4}{b^4}$ et $\mu^2 > \frac{6\mu\varkappa x^2}{b^2} + \frac{4\nu\varkappa x^3}{b^3} + \frac{3\varkappa^2x^4}{b^4}$. Ergo ſi $x = b$, debet eſſe $m^2 > 6mk + 4nk + 3kk$, et $\mu^2 > 6\mu\varkappa + 4\nu\varkappa + 3\varkappa\varkappa$. Atque poſito $x = \frac{1}{2}b$, multo magis eſſe oportebit $m^2 > \frac{3mk}{2} + \frac{nk}{2} + \frac{3k^2}{16}$ atque $\mu^2 > \frac{3\mu\varkappa}{2} + \frac{\nu\varkappa}{2} + \frac{3\varkappa^2}{16}$.

§. 156. Vt his conditionibus ſatisfiat ponamus p, r, ϱ denotare numeros affirmatiuos; p quidem ſatis ingentem, at r et ϱ eiusmodi, vt etiam euaneſcere poſſint. Sitque $\frac{m}{2} + \frac{n}{3} + \frac{k}{4} = \frac{\mu}{2} + \frac{\nu}{3} + \frac{\varkappa}{4} = p$; reperieturque $n = \frac{12p - 5m - r}{2}$; $\nu = \frac{12p - 5\mu - \varrho}{2}$; $k = \frac{2r - 12p + 4m}{3}$ et $\varkappa = \frac{2\varrho - 12p + 4\mu}{3}$. Reliquae vero conditiones implebuntur, ſumendo $m < 8p - 4V(pp + \frac{1}{2}pr)$ et $\mu < 8p - 4V(p^2 + \frac{1}{2}p\varrho)$ ad quod vlterius opus eſt, vt ſit $r < 6p$ et $\varrho < 6p$. Sit $r = 6p - 2s$; $\varrho = 6p - 2\sigma$; debebit eſſe $m < 8p - 4V(pp - ps)$ et $\mu < 8p - 4V(p^2 - p\sigma)$ $n = 3p + s - \frac{5m}{2}$; $\nu = 3p + \sigma - \frac{5\mu}{2}$; $k = \frac{4m - 4s}{3}$; $\varkappa = \frac{4\mu - 4\sigma}{3}$.

§ 157. His valoribus introductis reperietur $a^2 = b^2(3p - \frac{m}{6} - \frac{s}{3})$ et $\alpha^2 = b^2(3p - \frac{\mu}{6} - \frac{\sigma}{3})$ vnde ſe habebit $a^2 : \alpha^2 = 18p - m - 2s : 18p - \mu - 2\sigma$. Vt nunc maxima prodeat inaequalitas tribuatur ipſi s maximus, ipſi σ autem

autem minimus valor, faciendo $s = 3p$ et $\sigma = 0$; erit $m < 4p$ et $\mu < 0$. Fiat $m = 4p$ et $\mu = 0$, qui ſunt extremi limites maximamque inaequalitatem inter a et α producent. Prodibit autem $a^2 : \alpha^2 = 8 : 18 = 4 : 9$; vnde maxima inaequalitas inter a et α erit, ſi $a : \alpha = 2 : 3$, neque maior imo nequidem tanta inaequalitas locum habere poteſt, niſi figurae omnino ineptae admittantur.

§. 158. Ponamus ad caſus reales eruendos $s = 3p - \eta p$ et $\sigma = \theta p$, denotantibus η et θ numeros affirmatiuos quidem ſed valde paruos: cum ſit $m < 8p - 4p\sqrt{(1 + \eta)}$ ſeu $m < 4p - 2\eta p + \frac{\eta^2 p}{2}$ ponatur propterea $m = 4p - 2\eta p$: quia deinde eſt $\mu < 8p - 4p\sqrt{(4 - \theta)}$ ſeu $\mu < \theta p + \frac{\theta^2 p}{16}$, ponatur ergo $\mu = \theta p$. Hinc erit $n = -4(1 - \eta) p$; $\nu = 3p - \frac{3\theta p}{2}$; $k = \frac{4p(1-\eta)}{3}$, $\varkappa = 0$. ex quibus valoribus naſcuntur hae aequationes $yy = 2p(2 - \eta) bx - 4(1 - \eta) pxx + \frac{4p(1-\eta)}{3b} x^3$; et $zz = \theta pbx + \frac{3p(2-\theta)}{2} xx$ atque $a^2 = \frac{2pbb}{3}(2 + \eta)$ et $\alpha^2 = \frac{pbb(6-\theta}{2})$ vnde $a^2 : \alpha^2 = 8 + 4\eta : 18 - 3\theta$.

§. 159. Quando igitur aliae circumſtantiae ſectionem
Tab. VII. aquae poſtulabunt, quae ex duabus partibus diſparibus EAF
f. 1. et ſeqq. et EBF conſtet, niſi diſparitas ſit nimis magna, haec ſpecies quinta figuras idoneas ſuppeditare poterit. Inuenta autem figura idonea, quae centrum grauitatis ſitum habeat in C tota carinae figura non difficulter deſcribetur. Sumta enim pro lubitu ſectione ampliſſima EDF; planum diametrale ADB ita erit formandum, vt partes ACD et BCD ſint figurae affines tum inter ſe, tum ſemiſſi ſectionis aquae CDE, ad eandem altitudinem CD relatae: quo facto ſupereſt, vt omnes ſectiones horizontales inter ſe ſimiles conficiantur.

§. 160.

§. 160, Contemplemur nunc ſpeciem ſextam in qua omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint ſimiles. Sit igitur ſectio quaecunque transuerſalis QNQ per ordinatam QQ ſectionis aquae facta, quae cum ſit ſimilis ſectioni ampliſſimae EDF, erit $CE : CD = PQ : PN$; ex qua analogia perſpicuum eſt figuram plani diametralis (vid. fig. 3) affinem eſſe ſemiſſi ſectionis aquae AEB. Ita ſi fuerit in vtraque figura $CP = p$, et $PQ = q$, erit $PN = \frac{cq}{b}$. Data ergo ſectione aquae vna cum carinae profunditate $CD = c$, ſimul determinabitur figura plani diametralis, ac ſi praeterea detur figura ſectionis ampliſſimae E D F totius carinae figura definita erit, eo quod omnes ſectiones transuerſales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint ſimiles. Tab. VII. fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

§. 161. ponatur in ſectione ampliſſima abſciſſa $CR = r$ et applicata $RS = s$, dataque erit aequatio inter r et s, ex qua vel s per r vel r per s definiri poterit. Quare ſi in ſectione transuerſali QNQ capiatur $Pr = \frac{qr}{b}$, erit $rs = \frac{qs}{b}$. Concipiatur nunc per punctum s facta ſectio horizontalis VMU, in qua punctum q congruat cum puncto s erit $pq = Pr = \frac{qr}{b}$; $Tp = CP = p$; et $TC = rs = \frac{qs}{b}$; quae recta CT denotabit profunditatem huius ſectionis horizontalis ſub ſectione aquae. Cum igitur per totam hanc ſectionem horizontalem CT eandem ſeruet quantitatem, ponatur $CT = \frac{qs}{b} = h$ abſciſſa $Tp = x$, applicata $pq = y$; erit $x = p$, $y = \frac{qr}{b}$, atque $\frac{qs}{b} = h$. Quare cum detur q per $p = x$ erit q functio ipſius x, vnde oritur $r = \frac{by}{q}$, et quia s datur per r habebitur s per x et y, ex quo aequatio $\frac{qs}{b} = h$ exprimet naturam ſectionis horizontalis in fig. 4.

§. 162.

§. 162. Cum igitur ex datis aequationibus pro ſectione aquae et ſectione ampliſſima detur aequatio inter x et y, qua natura ſectionis horizontalis cuiusque exprimitur; hanc aequationem ita comparatam eſſe oportet, vt praebeat huius ſectionis centrum grauitatis in puncto g. quod tantum diſtet a puncto medio T, quantum eſt interuallum CG, centri grauitatis ſectionis aquae G a puncto C. Quoniam autem natura huius ſectionis horizontalis non a ſola ſectione aquae pendet, ſed inſuper a ſectione ampliſſima, difficillimum eſt calculum ita inſtituere, vt iſti requiſito ſatisfiat: curuae enim iſtae ſectionum horizontalium admodum inter ſe fiunt diſſimiles, ex quo vniuscuiusque centrum grauitatis non ſine ſumma moleſtia definiri poteſt. Quodſi autem pro ſectione ampliſſima curua definita accipiatur, tum duae tantum ſupereruut variabiles, quibus calculus facilius abſolui poterit.

§. 163. Sin autem id tantum requiratur, vnde praeſens regula nata eſt, ſcilicet vt centrum grauitatis ſectionis aquae G perpendiculariter immineat centro magnitudinis carinae, huic conditioni per ſolam aquae ſectionem ſatisfieri poterit, neque figura ſectionis ampliſſimae in conſiderationem venit. Cum enim ſectio QNQ ſimilis ſit ſectioni ampliſſimae EDF areae tenebunt rationem duplicatam laterum homologorum PQ. Quare ſi G fuerit centrum grauitatis ſectionis aquae, ſumma momentorum omnium PQ^2 reſpectu G verſus partem anteriorem aequalis eſſe debet ſummae ſimilium momentorum in parte poſteriore inter G et C ſumtorum, ex qua conditione, figurae idoneae pro ſectione aquae determinari debent.

§. 164.

§. 164. Haec ergo conditio, qua centrum grauitatis ſectionis aquae et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem incidere debent, huc recidit, vt cum ipſa ſectio aquae tum ſolidum rotundum genitum rotatione ſectionis aquae circa axem AB commune habeant centrum grauitatis. Atque ex hac proprietate figurae idoneae ab ineptis, quae vicem ſectionis aquae ſuſtinere queant, diſcernuntur; ac quomodo figurae ad ſextam ſpeciem pertinentes ad vſum ſint accomodandae intelligitur. Primo quidem aequalitas partium EAF et EBF ſponte ſe offert, quae autem non ſolum huius ſpeciei, ſed omnium figuras iſti requiſito aptas reddit; quare quanta inaequalitas iſtarum partium pro hac ſpecie admitti queat, videamus.

§. 165. Ponamus iterum, vt quaſi vltimum inaequalitatis terminum definiamus, ſectionis aquae alteram partem eſſe parallelogrammum rectangulum CAIE, alteram vero triangulum ECb; quaeramusque rationem inter AC $= a$ et bC $= \alpha$, vt tam figurae planae AIEb, ſi eadem ſimul ad alteram partem axis Ab conſtituta concipiatur, quam ſolidi conuerſione huius figurae circa axem Ab geniti centrum grauitatis in idem punctum G incidat. Sit AI $=$ CE $= b$, erit area rectanguli CI $= ab$, trianguli CE$b = \frac{\alpha b}{2}$; vnde ex natura centri grauitatis habebitur AG. $b\,(a+\frac{\alpha}{2}) = ab.\frac{a}{2} + \frac{\alpha b}{2}\,(a+\frac{\alpha}{3})$, ſiue Tab. VII fig. 1.

$$AG = \frac{\frac{aa}{2}+\frac{a\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{6}}{a+\frac{\alpha}{2}} = \frac{3a^2+3a\alpha+\alpha^2}{6a+3\alpha} = \frac{a}{2}+\frac{\alpha}{4}+\frac{\alpha^2}{12(2a+\alpha)}.$$

quae aequatio locum centri grauitatis ipſius ſectionis aquae indicat.

§. 166. Solidum autem rotundum, quod generatur conuerſione figurae $AIEb$ circa axem Ab conſtabit ex cylindro, cuius volumen erit $= ab^2$ neglecto coefficiente a quadratura circuli pendente: atque ex cono cuius ſoliditas eſt $= \frac{\alpha b^2}{3}$. Huius igitur corporis compoſiti centrum grauitatis cadet in punctum G, ita collocatum vt ſit AG. $b^2 (a + \frac{\alpha}{3}) = ab^2 . \frac{a}{2} + \frac{\alpha b^2}{3} (a + \frac{\alpha}{4})$ vnde fit $AG = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{12}}{a + \frac{\alpha}{3}} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{12(3a + \alpha)}$. Quodſi igitur iſte valor ipſius AG praecedenti aequalis ponatur, prodibit iſta aequatio: $\frac{a}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{12(2a + \alpha)} = \frac{a}{2} + \frac{\alpha}{6} + \frac{\alpha^2}{12(3a + \alpha)}$ quae reducta dat vel $\alpha = 0$, vel $\alpha^2 + 6 a\alpha + 6 a^2 = 0$. quarum neutra figuram realem exhibet.

§. 167. Cum igitur nulla detur figura ex parallelogrammo rectangulo et triangulo compoſita, quae pro ſpecie ſexta vicem gerere queat ſectionis aquae; intelligitur ſumme difficile eſſe eiusmodi definire figuras, quae memorata proprietate gaudeant, quaeque ſimul ex duabus partibus diſſimilibus ſint compoſitae. Quare cum iſti conditioni, qua tantum centrum magnitudinis partis ſubmerſae ac centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali poſita eſſe debent, tam difficulter ſatisfiat, niſi puppis ſimilis ſit prorae, multo difficilius erit eiusmodi aſſignare figuras, quarum omnes ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant poſita, quae conditio non minus eſt neceſſaria quam altera cum non ſemper eadem ſectio horizontalis in ſuperficie aquae verſetur.

Tab. VII. fig. 1. 2. 3. 4. 5. 6. §. 168. Specie ſexta examinata inueſtigemus quomodo ſpeciei ſeptimae figuras comparatas eſſe oporteat, vt prae-

Digitized by Google

praeſcripta proprietate gaudeant. Retulimus autem ad ſpeciem ſeptimam eiusmodi carinas, in quibus ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſint ſimiles. Quare cum fig. 3. ipſum planum diametrale, fig. 6. vero ſectionem quamcunque ipſi parallelam repraeſentet, erit ob ſimilitudinem primo $CA:CB = RI:RK$, quae analogia ad figuram primam translata indicat ambas ſectionis aquae portiones EAF et EBF inter ſe eſſe affines ſuper communi baſi EF conſtitutas; ita vt ſit $RI:RK = AC:BC = a:\alpha$, ideoque in ratione conſtante. Hinc ſi data fuerit partis anterioris EAF centrum grauitatis in O, cadet totius ſectionis aquae centrum grauitatis in punctum G, ita vt ſit $CG = \frac{(a-\alpha)}{a} CO$. quam expreſſionem computus centri grauitatis ad caſum propoſitum accommodatus ſponte ſuppeditat.

§. *169.* Deinde eadem ſimilitudo ſectionum verticalium plano diametrali parallelarum praebet $CA:CD = RI:RS$, quae eaedem lineae cum in figuris 1. et 2. occurrant, intelligitur ſectionem ampliſſimam EDF pariter affinem eſſe alteri ſectionis aquae portioni EAF vel EBF: cum enim vtrinque Baſis CE ſit eadem, ſi in ea vtrinque capiatur eadem portio CR, tenebunt applicatae RI et RS vbique eandem rationem, eam ſcilicet quam habet $CA = a$ ad $CD = c$. Quare ſi ſola profunditas carinae CD fuerit data, ſimul tota ſectio ampliſſima ex ſectione aquae determinatur; his autem duabus ſectionibus principalibus datis, ſi detur praeterea figura plani diametralis ADB, omnes ſectiones verticales ipſi parallelae ſimul ſimiles erunt conficiendae, ex quo totius carinae figura erit determinata; ac vel omnes ſectiones transuerſales vel horizontales definiri poterunt, ad quas conſtructio nauium commodiſſime dirigetur.

L 2 §. 170.

Digitized by Google

§. 170. Cum igitur ex ſectione aquae et profunditate carinae detur ſectio ampliſſima EDF, in qua erit CE $=$ CF $= b$, CD $= c$, ſumatur ea pro fundamento, quia viciſſim ex ea ſectio aquae definitur. Ponatur itaque abſciſſa CR $= r$, applicata RS $= s$, erit in ipſa ſectione aquae pariter CR $= r$, at RI $= \frac{as}{c}$ et RK $= \frac{\alpha s}{c}$ ob AC $= a$ et BC $= \alpha$. Quare cum O denotet centrum grauitatis partis anterioris ſectionis aquae EAF, fiet ex calculo centri grauitatis CO $= \frac{a\int ssdr}{2c\int sdr}$ integralibus ita ſumtis, vt a valore $r = 0$ vsque ad $r = b$ pateant. Hinc itaque totius ſectionis aquae centrum grauitatis incidet in punctum G vt ſit CG $= \frac{(a-\alpha)\int ssdr}{2c\int sdr}$ in qua expreſſione $\frac{\int ssdr}{2\int sdr}$ denotat diſtantiam centri grauitatis ſectionis ampliſſimae EDF a ſuperficie aquae EF.

§. 171. Cum igitur ante omnia requiratur vt centrum grauitatis ſectionis aquae G in ipſa recta verticali per centrum grauitatis totius carinae ducta ſit ſitum; huius rectae verticalis poſitionem calculo definiamus: tranſibit autem per rectam AB. Ad hoc ſit area plani diametralis ADB $=$ F, cuius, quia data ponitur, centrum grauitatis ſitum ſit in recta verticali per punctum H tranſeunte: ponatur ergo CH $= f$. Quoniam vero huic figurae ſimilis eſt ſectio ISK erit eius area $= \frac{s^2 F}{c^2}$, eiusque centrum grauitatis ſub b cadet exiſtente R$b = \frac{s}{c} f$. Hinc ſumma omnium momentorum reſpectu EF ex ſectionibus verticalibus plano diametrali parallelis ortorum erit $= \frac{Ff\int s^3 dr}{c^3}$, volumenque totius carinae $= \frac{F}{c^2}\int s^2 dr$: ex quibus oritur CG $= \frac{f\int s^3 dr}{c\int ssdr}$, quoniam recta verticalis per centrum grauitatis carinae ducta rectam AB in ipſo puncto G ſecare ponitur.

§. 172.

Digitized by Google

§. 172. Quodſi nunc has binas interualli CG expreſſiones inter ſe aequales ponamus, prodibit $\frac{(a-\alpha)\int ssdr}{2\int sdr} = \frac{\int s^3dr}{\int ssdr}$ ſeu $(a-\alpha)(\int ssdr)^2 = 2f\int sdr.\int s^3dr$. Aſſumamus itaque pro ſectione ampliſſima hanc aequationem generalem $r = b - \frac{ms^2}{c^2} - \frac{ns^3}{c^3} + \frac{(m+n-b)s^4}{c^4}$, quae ita eſt comparata vt poſito $s = c$ fiat $r = o$, et $s = o$, fiat $r = b$. Praeterea, quia in ſectione aquae tangens in E parallela eſſe debet axi AB, in ſectione ampliſſima tangens E normalis eſſe debebit ad CE, cui conditioni aequatio aſſumta pariter ſatisfacit. Erit itaque $dr = -\frac{2msds}{c^2} - \frac{3ns^2ds}{c^3} + \frac{4(m+n-b)s^3ds}{c^4}$, vnde integralia $\int sdr$, $\int s^2dr$ et $\int s^3dr$ debito modo aſſumta ita ſe habebunt $\int sdr = c(\tfrac{2}{3}m + \tfrac{3}{4}n - \tfrac{4}{5}(m+n-b))$ $\int s^2dr = c^2(\tfrac{2}{4}m + \tfrac{3}{5}n - \tfrac{4}{6}(m+n-b))$ et $\int s^3dr = c^3(\tfrac{2}{5}m + \tfrac{3}{6}n - \tfrac{4}{7}(m+n-b))$.

§. 173. His valoribus in aequatione ſuperiore ſubſtitutis obtinebitur $(a-\alpha)(\tfrac{2}{3}b - \tfrac{1}{6}m - \tfrac{1}{15}n)^2 = 2f(\tfrac{4}{5}b - \tfrac{2}{15}m - \tfrac{1}{20}n)(\tfrac{4}{7}b - \tfrac{6}{35}m - \tfrac{1}{14}n)$ ex qua aequatione cum dentur quantitates a, α et b ex ſectione aquae, itemque f ex figura plani diametralis, definiri poterit alterutra quantitatum m vel n; quo facto ob alteram etiam nunc indeterminatam innumerabiles naſcentur formae ſectioni ampliſſimae inducendae, vt propoſito requiſito ſatisfiat. Neque igitur hinc aequalitas inter a et α infertur, ſed hae longitudines quantumuis inaequales aſſumi poterunt; quam latitudinem praecedentes carinae ſpecies non admittebant. Interim ſi huic conditioni eſt ſatisfactum, vt recta verticalis per centrum grauitatis carinae ducta per centrum grauitatis ſectionis aquae tranſeat, de altera conditione, qua etiam omnium ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta ſita

eſſe debeant, non admodum erimus ſolliciti: cum haec proprietas in ſectiones horizontales non nimis remotas proxime cadat.

§. 174. Poteſt etiam ſectio ampliſſima EDF pro lubitu aſſumi, ex qua ſimul, ſi litteris a et α definiti valores tribuantur, ſectio aquae determinabitur. Dati igitur erunt valores formularum integralium $\int s\,dr$, $\int s^2\,dr$ et $\int s^3\,dr$, ex quibus definitur $f = \frac{(a-\alpha)(\int ss\,dr)}{2\int s\,dr.\int s^3\,dr}$. Hinc ergo eiusmodi figura idonea pro plano diametrali ADB exquiri debebit, cuius centrum grauitatis interuallo f a recta CD verſus anteriora diſtet, cui quidem conditioni infinitis modis ſatisfieri poterit. Interim tamen id eſt ante omnia efficiendum vt ſit CA $= a$ et CB $= \alpha$; itemque applicata CD $= c$ omnium fiat maxima. Haec itaque ſpecies maxime eſt foecunda ad figuras carinarum, quae ex partibus diſſimilibus conſtent, ſuppeditandas: qua fertilitate praecedentes ſpecies non gaudent. Neque etiam receptae nauium formae ab hac ſpecie multum diſſentire videntur.

§. 175. Pergamus nunc ad reliquas tres ſpecies, quae latiſſime patent, ac iam tractatas ſub ſe complectuntur. Primo enim in his reliquis ſpeciebus ſectiones, quae vni principalium parallelae ſunt factae, inter ſe non ſimiles ſed tantum affines ponuntur. Deinde ex vna ſectione principali pro lubitu aſſumta neutra reliquarum determinatur, ſed omnes tres ſectiones pro lubitu accipere licet, dummodo iſta conditio obſeruetur, vt lineae AC, BC ſectioni aquae ac plano diametrali, lineae EF ſectioni aquae et ſectioni ampliſſimae, atque profunditates EF ſectioni ampliſſimae et plano diametrali ſint communes. Deinde etiam neceſſe eſt, vt in ſectione aquae tangentes ad E et F ſint

F ſint axi AB, in plano diametrali vero tangens ad O pariter eidem axi AB ſint parallelae. Alias conditiones ipſa praxis conſtructionis nauium et vſus ſuppeditant, quarum rerum ſupra iam mentio eſt facta.

§. 176. Conſideranda itaque venit ſpecies decima, in qua omnes ſectiones horizontales ſectioni ampliſſimae ſunt affines. Manentibus igitur vt hactenus AC $= a$; BC $= a$; CE $=$ CF $= b$ et CD $= c$, datae ſint pro arbitrio omnes tres ſectiones principales; ac primo quidem pro ſectione aquae ſit abſciſſa CP $= p$, applicata PQ $= q$; pro ſectione vero ampliſſima CR $= r$, RS $= s$; atque pro plano diametrali CI $= t$ et TV $= u$. Concipiatur nunc facta ſectio horizontalis VMU per punctum T, quod ſectioni ampliſſimae et plano diametrali eſt commune; erit igitur cum longitudo VU tum latitudo MM ex datis ſectionibus principalibus definita. Fiat igitur in ſectione ampliſſima $s = t$, exprimet r ſimilitudinem TM ſectionis horizontalis. Hanc obrem habebitur TV $= u$, et TM $= r$, atque ob $s = t$, tam u quam r per t erunt determinata.

§. 177. Ponatur nunc in hac ſectione horizontali abſciſſa T$p = x$, applicata $pq = y$, fiatque, vt affinitatis ratio habeatur AC (a): CP $(p) =$ TV (u): Tp (x) ſeu ſumatur $x = \frac{pu}{a}$; atque erit CE (b): PQ $(q) =$ TM (r) : pq (y) ſiue $y = \frac{qr}{b}$. Quoniam vero pro iſta ſectione horizontali VMU quantitas t manet perpetuo eadem ſeu conſtans, quantitates quoque ab ea pendentes r et u erunt conſtantes; quare cum q detur per p, hinc obtinebitur relatio inter x et y, qua natura huius ſectionis horizontalis definietur. Sit huius ſectionis horizontalis centrum

Digitized by Google

trum grauitatis in g ſitum, erit $Tg = \frac{\int yxdx}{\int ydx} = \frac{u\int pqdp}{a\int qdp}$. At ſi ipſius ſectionis aquae centrum grauitatis ſtatuatur in G, erit $CG = \frac{\int pqdp}{\int qdp}$, quamobrem habebitur $CG : Tg = a : u = AC : TV$ ſeu $Tg = \frac{u \cdot CG}{a}$. Vt igitur vbique ſit $Tg = CG$, oportet eſſe vel $CG = o$, vel $u = a$ vbique, qui poſterior caſus huc non pertinet.

§. 178. Haec ita ſe habent ſi et altera portio MUM eandem teneat affinitatis legem reſpectu alterius portionis EBF ſectionis aquae, quam priores portiones proram reſpicientes tenent, hoc eſt ſi fuerit $CA : TV = CB : TU$, qui caſus obtinet, quando in plano diametrali ADB portiones ACD et BCD fuerint inter ſe affines. Vt igitur hoc caſu ſingularum ſectionum horizontalium centra grauitatis in eandem rectam verticalem cadant, oportet vt ſectionis aquae centrum grauitatis ſitum ſit in ipſo puncto C. Quodſi autem portio CDB non debeat eſſe affinis portioni ACD, tum vbicunque ſectionis aquae centrum grauitatis fuerit ſitum, ex natura centri grauitatis ſemper ad datum ipſius TV valorem definiri poteſt quantitas TU, quo huius ſectionis horizontalis centrum grauitatis perpendiculariter ſub G cadat.

§. 179. Quod vt clarius perſpiciatur, ſit ſectio aquae propoſita quaecunque, quae in binas partes anteriorem EAF et poſteriorem EBF ſit diuiſa. Sit porro partis anterioris centrum grauitatis in a poſterioris in b, erit totius ſectionis aquae centrum grauitatis ſitum in G, ita, vt ſit $CG = \frac{C\alpha \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF}$. Simili modo ſi ſectionis horizontalis VMU partis anterioris centrum grauitatis ſtatuatur in v, poſterioris in u, fiet $Tg = \frac{Tv \cdot MVM - Tu \cdot MUM}{MVM + MUM}$.

At

At vero eſt $MVM = \frac{TM \cdot TV}{CE.AC} \cdot EAF$; $MUM = \frac{TM \cdot TU}{CE.BC} \cdot EBF$, atque $Tv = \frac{TV}{AC} \cdot Ca$ et $Tu = \frac{TU}{BC} \cdot Cb$. Quocirca vt ſit $Tg = CG$, eſſe debet $\frac{Ca \cdot EAF - Cb \cdot EBF}{EAF + EBF} = CG = \frac{BC^2 \cdot TV^2 \cdot Ca \cdot EAF - AC^2 \cdot TU^2 \cdot Cb \cdot EBF}{AC.BC^2 \, TV.EAF + BC \, AC^2 \cdot TU \, EBF}$, quae aequatio relationem praebet inter TV et TU, inſtituto idoneam.

§. 180. Sumi igitur poteſt curua quaecunque pro ſectione aquae AEBF hacque aſſumta datae erunt quantitates EAF, EBF ſeu areae partium eius tam anterioris quam poſterioris, itemque diſtantiae Ca et Cb, quibus determinatis habebitur aequatio inter T V et T U. Quodſi ergo pars plani diametralis altera vel anterior ACD vel poſterior BCD pro lubitu formetur, exinde altera pars determinabitur, quoniam autem euenire poteſt vt aſſumto valore TV altera linea TU fiat vel imaginaria vel negatiua vel ſaltem incogruae quantitatis, praeſtabit neutram partem plani diametralis prorſus ad arbitrium ſumere, ſed ope aequationis inuentae vtramque ita accommodare, vt aliis ſcopis maxime ſatisfiat. Sectio autem ampliſſima omnino manet indeterminata, atque hanc ob rem haec ſpecies octaua maxime apta eſt ad carinas nauium idoneas ſuppeditandas.

§. 181. Pergamus ad ſpeciem nonam inueſtigandam, in qua ſingulae ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelae eidem ſint affines. Maneant igitur omnes tres ſectiones principales datae, eae'emque denominationes, quas in praecedente ſpecie adhibuimus atque concipiatur facta ſectio verticalis per ordinatam QQ ſectionis aquae, quae ſit QNQ. In hac capiatur abſciſſa $Pr = y$, applicata $rs = z$; eritque ex ſectionibus principalibus $PQ = q$, $PN = t$. Dabitur autem ex natura ſectionis aquae q

per p, atque ex natura plani diametralis t per u: ſumi autem debet $u = p$, et quia punctum P pro iſta ſectione Q N Q manet inuariatum, erit $CP = p = u$ quantitas conſtans, indeque etiam q et t. Quamobrem ſi fiat CD (b): CR (r) = PQ (q) : Pr (y) ſeu $y = \frac{qr}{b}$ erit CD (c) : RS (s) = PN (t) : rs $(z) = \frac{ts}{c}$ vnde ex aequatione inter r et s data, dabitur aequatio inter y et z, quae naturam huius ſectionis exprimet.

§. 182. Quoniam ex his, niſi ad caſus particulares deſcendere velimus, aequationes pro ſectionibus horizontalibus difficulter eruuntur, multo erit difficilius rem ita expedire, vt omnes ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali habeant poſita. Quamobrem contenti erimus figuram carinae ita adornare, vt totius centrum grauitatis perpendiculariter ſub centrum grauitatis ſectionis aquae G cadat. Ad hoc noſſe oportet aream ſectionis Q N Q, quae ſi area ſectionis ampliſſimae EDF ponatur $= 2$ E, erit $= \frac{2qt}{bc}$ E. Nunc quia tam q quam t ſunt functiones ipſius p erit $\frac{\int 2qtdp}{bc}$ E ſoliditas totius carinae, integrali per totam amplitudinem extenſo; diſtantia vero centri grauitatis carinae ab axe verticali CD verſus proram erit $= \frac{\int qtpdp}{\int qtdp}$, vbi integrale $\int qtpdp$ quod ex parte EBF oritur ſubtrahi debet, ab altero ex parte anteriori orto.

§. 183. Cum igitur ambo integralia $\int qtdp$ et $\int qtpdp$ debito modo fuerint accepta, efficiendum eſt, vt fiat CG $= \frac{\int qtpdp}{\int qtdp}$, ex qua aequatione functio idonea pro t ſubſtituenda debet definiri, quo facto planum diametrale quodammodo determinatur. Expediet autem pro t vel potius pro qt expreſſiones latius patentes aſſumere, vt ſupra fecimus

mus, quae tamen figuram idoneam plano diametrali inducant, atque coefficientes ita definire vt aequationi datae ſatisfiat. In integrationibus vero formularum $\int qtpdp$ et $\int qtdp$ id probe eſt tenendum, vt in priore valor quem puppis ſuppeditat ab eo, qui ex prora oritur ſubtrahatur, in poſteriore vero integratione ambo valores addantur, id quod ad calculum centri grauitatis reſpicienti palam eſt.

§. 184. Reſtat tandem ſpecies decima, quae vltima nobis eſt, in qua ſingulae ſectiones verticales plano diametrali parallelae eidem ſunt affines. Quodſi ergo in diſtantia $CR = r$ ab axe AB fiat huiusmodi ſectio verticalis ISK. Quoniam nunc natura ſectionis aquae exprimitur aequatione inter $CP = p$ et $PQ = q$, ſi fiat $q = r$, abibit p in RI, ſimilique modo ex parte poſteriori prodibit RK. Deinde ex ſectione ampliſſima obtinebitur $RS = s$ per r. At in ſectione, quam nunc contemplamur ISK erit $RS = s$, et $RI = p$, quae quantitates ambae dantur vel in q vel in r, ac quamdiu iſta ſectio ISK conſideratur, manent conſtantes. Ponatur nunc in hac ſectione $Rt = z$ et $tv = x$, quae ob affinitatem cum figura ADB ita definientur vt ſit $z = \frac{ts}{c}$ et $x = \frac{up}{a}$, hincque propter datam aequationem inter t et u elicietur aequatio inter z et x, qua tum ſingulae ſectiones plano diametrali parallelae, tum ipſa figura carinae determinabitur.

§. 185. In hac ſpecie non ſolum difficile eſt aequationem pro quaque ſectione horizontali eruere, eiusque centrum grauitatis determinare, ſed etiam non tam commode totius carinae centrum grauitatis definiri poteſt quam in reliquis ſpeciebus. Etſiamſi enim detur plani diametralis centrum grauitatis, tamen ex eo ſectionum ipſi

 pa-

parallelarum centrum grauitatis non innoteſcit. Quanquam enim alias affinitas figurarum determinationem centri gravitatis facilem reddit, tamen hic portiones proram ac puppim ſpectantes ſeorſim ſunt affines, neque hic valet haec ratio $AB : VU = IK : vu$, etiamſi ſeorſim ſit $AC : VT = IR : vt$ et $BC : UT = KR : ut$. Hanc ob rem cum calculo in hac ſpecie nil poſſit commode expediri, eam tanquam minus idoneam ad praeſens inſtitutum reiiciemus.

§. 186. His igitur decem euolutis carinarum ſpeciebus, quae tam late patent, vt vix figura excogitari queat, quae non in aliqua earum comprehendatur, manifeſtum eſt, quaenam ſpecies magis ſint accommodatae ad naues formandas, et quaenam minus. Hic autem potiſſimum reſpiciendum eſt ad eas figuras, quae inaequalitatem inter proram ac puppim admittunt; quodſi enim prora aequalis ſimilisque fuerit puppi, tum, ad quamcunque etiam ſpeciem figura pertineant, non ſolum illi ſatisfit requiſito, quo centrum grauitatis ſectionis aquae et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem cadunt, ſed etiam alteri, quo poſtulatur, vt omnium omnino ſectionum horizontalium centra grauitatis in eadem recta verticali ſint poſita. Quocirca ſi quae ſpecies alias figuras idoneas non ſuppeditet, niſi in quibus puppis prorae ſit ſimilis, ea ſpecies tanquam inutilis eſt reiicienda.

§. 187. Quoniam igitur duo ſtabiliuimus requiſita, quorum priore tantum requiritur, vt centrum grauitatis ſectionis aquae et centrum magnitudinis carinae in eadem recta verticali ſit poſitum, poſteriore vero, vt omnes ſectiones horizontales ſua centra grauitatis in eadem recta

ver-

Digitized by Google

verticali habeant ſita: hocque poſterius requiſitum in ſe prius iam complectitur; manifeſtum eſt eas ſpecies, quae ad poſterius requiſitum ſunt accomodatae, iis, quae priori tantum ſatisfaciunt, longe eſſe anteferendas. In quibus autem ſpeciebus hoc nequidem obtineri poteſt, vt centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem cadat, in quo collocatur centrum magnitudinis partis ſubmerſae, niſi prora puppi ſimilis fiat, eae ſpecies omnino ſunt reiiciendae. Tales ſunt ſpecies quarta, quae abſolute adhiberi nequit, niſi prora ſimilis puppi conficiatur, ac ſexta nona et decima, quae vix ad inſtitutum accommodari poſſunt.

§. 188. Si requiſito priore contenti eſſe velimus, ſpecies ſeptima innumerabiles ſuppeditat figuras idoneas, vti oſtendimus in eius pertractatione; ac fortaſſe etiam ſpecies decima, quippe quae ſeptimam in ſe complectitur, plures ſuppedditaret, niſi difficultas calculi obſtaret. Sed quoniam poſterius requiſitum, quo ſingulae ſectiones horizontales ſua grauitatis centra in eadem recta verticali ſita habere debent, maximis coniunctum eſt emolumentis in nauigatione, id minime negligi poteſt, et hanc ob rem etiam hae ſpecies prae reliquis, quae ſimul hac praerogatiua gaudent, in conſiderationem venire non merentur. Ex quo ad naues perfecte conſtruendas nobis tantum relinquuntur ſpecies prima, ſecunda, tertia, quinta et octaua, quarum poſtrema praecedentes in ſe omnes complectitur; in omnibus enim ſectiones horizontales inter ſe ſunt vel aequales vel ſimiles vel ſaltem affines.

§. 189. Cum igitur ſub affinitate tam aequalitas quam ſimilitudo contineatur, omnes naues ita comparatas eſſe

Digitized by Google

oportebit, vt ſectiones horizontales omnes carinae ſaltem, partem enim nauis ſupra aquam eminentem non conſideramus, ſint inter ſe affines. Atque ſi nauis hac fuerit praedita, proprietatem eandem conſeruabit, quaecunque ſectio horizontalis vicem ſectionis aquae ſubeat. Quae proprietas locum non habet, ſi ſectiones verticales vel ſectioni ampliſſimae vel plano diametrali parallelae inter ſe ſint affines; quodſi enim ſectio aquae mutetur, ac nauis vel magis vel minus immergatur, quam poſuimus, tum ſimul affinitas harum ſectionum ceſſabit. Quare cum eae figurae, quae omnes ſectiones horizontales inter ſe affines habent, hanc ipſam proprietatem conſeruent, quaecunque ſectio horizontalis ſuperficiem aquae occupet, iſtae figurae reliquis omnibus merito praeferuntur.

§. 190. Vt igitur nauis iis requiſitis, quae quidem hoc caput ſuggeſſit, ſatisfaciat, duplici modo obtineri poteſt: quorum primus in hoc conſiſtit, vt carinae pars anterior parti poſteriori ſimilis ſit et aequalis. Quaecunque enim prorae detur figura, ſiue in aliqua recenſitarum decem ſpecierum contenta ſiue minus, ſi eadem puppi tribuatur, carina ad inſtitutum praeſens erit accommodata. Namque omnes ſectiones horizontales ſua centra grauitatis habebunt ſita in eadem recta verticali, quae cum proram a puppi tum ambo nauis latera a ſe inuicem diſpeſcit. Atque ad hanc nauium formam recidit tota ſpecies prima atque tertia, quippe in quibus prora et puppis ſunt figurae inter ſe ſimiles et aequales. Ex quo hae ſpecies non tam ideo aptae ſunt cenſendae, quod habeant ſectiones omnes horizontales inter ſe affines, quam quod puppim ſimilem et aequalem prorae praebeant.

§. 191.

Digitized by Google

§. 191. Cum autem plures circumſtantiae, quae infra occurrent, prohibeant, quo minus puppis prorae ſimilis conficiatur, figurae conuenientes ex ſpeciebus ſecunda, quinta et octaua ſunt petendae. Species quidem ſecunda nulla indiget reſtrictione, ſed omnes figurae ad eam pertinentes per ſe ita ſunt comparatae, vt eadem recta verticalis per ſingularum ſectionum horizontalium centra grauitatis tranſeat. Species autem quinta vehementer reſtringi debet, vt hanc proprietatem aſſequatur, neque enim nimium diſſimiles figuras pro prora ac puppi admittit. Species vero octaua minori opera ad hoc inſtitutum accommodari poteſt, quoniam tam ſectionem aquae quam ſectionem ampliſſimam pro lubitu aſſumere licet. Ita igitur in inueſtigandis figuris idoneis nauium ſumus verſati, vt ſufficiens rerum adhuc indeterminatarum copia ſuperſit, quibus determinandis pluribus aliis requiſitis, quae aliae conſiderationes ſuggerent, ſatisfieri queat.

Cap.

Digitized by Google

)o(

Cap. III.

DE STABILITATE SITVS AEQVILIBRII.

§. 192.

Quando nauis ita iam fuerit conſtituta, vt aquae in ſitu erecto immiſſa aequilibrium teneat, quod euenit, ſi centrum grauitatis totius nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae in eandem rectam verticalem cadant, tum inſuper efficiendum eſt, vt iſte aequilibrii ſitus ſit ſtabilis, ac viribus inclinantibus reſiſtat. Quodſi enim nauis, cum parumper ex ſitu hoc aequilibrii declinetur, ſeſe vel non reſtituat vel adeo ſubuertatur, ea nullo modo mari committi poterit, vbi continuo praeſto ſunt, vires vel venti vel ipſius maris, quae nauem de ſitu ſuo erecto declinant. Quamobrem circa conſtructionem nauium hoc maxime requiritur, vt ſitus aequilibrii, ad quem nauis eſt apta reddita, ſatis ingenti praeditus ſit ſtabilitate, cuius ope nauis ſine ſubuerſionis periculo omnibus maris ac tempeſtatis iniuriis exponi poſſit. Quo enim ſtabilitas eſt maior eo minus nauis a viribus vrgentibus inclinabitur, eoque minus ſubuerſioni erit obnoxia.

§. 193 Stabilitas autem haec, qua corpus aquae innatans in ſitu aequilibrii perſeuerat, ortum ſuum trahit a viribus aquae, quibus externa carinae ſuperficies premitur; quae vires, ſiquidem aequilibrium affuerit, ſeſe deſtruunt, nullumque effectum ad ſtatum mutandum exercent. At ſi nauis ex ſitu aequilibrii fuerit depulſa, tum iſtae aquae vires

res

res nauem extra ſitum aequilibrii perſiſtere non patientur, ſed eam vel in priſtinum aequilibrii ſitum cogent, vel in alium. Quodſi igitur nauis ex ſitu aequilibrii depulſa ab aquae viribus in eundem aequilibrii ſitum reſtituatur, tum iſte ſitus ſtabilitatem habere cenſetur: e contrario autem, ſi nauis in priſtinum aequilibrii ſitum non reſtituatur, ſed in alium aequilibrii ſitum compellatur, tunc ille aequilibrii ſitus non ſtabilis ſeu labilis vocatur, in quo nauis, niſi ſumma adſit quies, permanere non poteſt. Datur etiam tertius caſus, quo nauis ex ſitu aequilibrii depulſa in eodem ſtatu perſeuerat, neque reſtituitur neque ſubuertitur, cuiusmodi aequilibrii ſitum indifferentem appellari conuenit.

§. 194. Ad ſtabilitatis quantitatem aeſtimandam in ſuperiori libro nauem ex ſitu aequilibrii, cuius ſtabilitas quaeritur, aliquantillum ſeu angulo infinite paruo inclinari poſuimus, ac momentum virium definiuimus, quae ad reſtituendam nauem tendunt. Prodiit autem eiusmodi expreſſio, quae per angulum illum infinite paruum, quo nauem ex ſitu aequilibrii inclinatam fuiſſe aſſumſimus, erat multiplicata; atque hanc ob rem illam expreſſionem per hunc angulum diuiſam elegimus ad ſtabilitatis quantitatem exprimendam. Quando itaque ſtabilitas cuiuspiam aequilibri ſitus tali expreſſione definitur, conſtabit quantum virium inclinantium momentum requiratur, ad nauem ex ſitu aequilibrii ad datum angulum inclinandam. Expreſſio enim ſtabilitatis, ſi multiplicetur per angulum illum, ad quem inclinatio fieri debet, dabit virium momentum, quibus iſta inclinatio produci poteſt. Quoniam autem angulum hunc infinite paruum poſuimus, manifeſtum eſt angulos tantum valde exiguos aſſumi debere.

Digitized by Google

§. 195. Quicquid autem ſit, quoniam hic non de actuali inclinatione quaeſtio inſtituitur, ſed de poteſtate, qua nauis in ſitu aequilibrii conſtituta inclinationi reluctatur; expreſſio deſcripta congrue ad ſtabilitatem metiendam adhibetur. Perſpicuum enim eſt quo maior ſit iſta expreſſio, eo quoque fore maiorem ſtabilitatem, et quidem in eadem ratione; namque duorum aequilibrii ſtatuum ſtabilitates proportionales ſtatui conuenit viribus ſeu potius momentis virium, quibus aequalis inclinatio produci poteſt. Quodſi ergo expreſſio ſtabilitatis euaneſcat, id indicio erit, ſitum aequilibrii eſſe indifferentem, ſeu ita comparatum, vt facta minima inclinatione neque reſtitutio neque ſubverſio conſequatur. Sin autem expreſſio ſtabilitatis fiat negatiua, tum ſitus aequilibrii adeo erit inſtabilis ſeu labilis, atque vel minima facta inclinatione non ſolum non reſtituetur ſed etiam conuertetur, donec nauis in alium aequilibrii ſitum qui ſtabilitate praeditus ſit, fuerit reducta.

§. 196. Quoniam igitur ſtabilitas declarat, quantum datus aequilibrii ſtatus inclinationi reſiſtat, inclinatio autem infinitis modis fieri poteſt, palam eſt, ſtabilitatem abſolute definiri non poſſe, ſed directionem ſecundum quam inclinatio fieri concipitur, ſimul in computum duci debere. Pro ſingulis igitur plagis, in quas inclinatio ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, ſtabilitatem ſeorſim determinari oportet; atque ex ſtabilitate reſpectu datae plagae cognita innoteſcet quantum nauis inclinationi ſecundum eam plagam reſiſtat. Fieri enim omnino poteſt, vt corpus aquae innatans inclinationi verſus vnam plagam magis reſiſtat, quam verſus alias, atque adeo vt datus aequilibrii ſitus in alias plagas ſit ſtabilis, qui reſpectu aliarum plagarum eſt inſtabili-

Digitized by Google

ſtabilis ac labilis. Sic facile perſpicitur naues inclinationi verſus proram ſeu puppim magis reſiſtere, quam inclinationi verſus latera; ex quo cuiusque nauis ſtabilitas reſpectu prorae et puppis maior erit quam ſtabilitas reſpectu laterum. Quoties igitur quaeſtio de ſtabilitate cuiuspiam aequilibrii ſitus inueſtiganda inſtituitur ſimul plagam indicari oportet, reſpectu cuius ſtabilitas requiritur.

§. 197. Corpus autem aquae innatans de ſitu aequilibrii non declinatur, niſi quatenus circa axem horizontalem conuertitur. Quodſi enim corpus eiusmodi circa axem verticalem quemcunque conuertatur, neque portio aquae immerſa neque ſitus relatiuus centrorum grauitatis ac magnitudinis immutatur; vnde tali conuerſione ſtatus aequilibrii non turbatur. Contra vero corpus aquae inſidens circa axem horizontalem conuerti ſeu inclinari nequit, quin ſimul ſtatus aequilibrii perturbetur. Quam ob rem idea ſtabilitatis penitus figetur, ſi ſimul axis ille horizontalis indicetur, circa quem inclinationes fieri concipiantur, quibus ſtabilitas reſiſtit. Vt ergo ſtabilitas dati aequilibrii ſtatus perfecte cognoſcatur, omnes axes horizontales contemplari, et quanta ſit ſtabilitas reſpectu ſingulorum horum axium aſſignari oportebit: hoc enim pacto conſtabit, quantum nauis cuicunque inclinationi circa axem horizontalem aliquem oriundae reſiſtat.

§. 198. Si nunc hanc de ſtabilitate quaeſtionem ad naues accommodemus, inter infinitos axes horizontales, circa quos inclinatio nauis ex ſitu aequilibrii fieri poteſt, duos habebimus principales, quorum alter a puppi ad proram porrigitur, alter ad hunc eſt normalis. Priorem illum axem, qui a puppi ad proram ducitur, vocemus

N 2 lon-

Digitized by Google

longitudinalem; poſteriorem latitudinalem; ex quo pro quaque naui circa ſtabilitatem duae naſcuntur quaeſtiones principales, quarum altera quaeritur, quanta ſit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, altera vero quanta ſit ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis. Priore ſcilicet quaeſtione definiri oportet, quantum nauis inclinationi circa axem longitudinalem, ſeu quae fit ad latera nauis, reſiſtat, poſteriori vero, quantum nauis inclinationi circa axem latitudinalem, ſeu quae verſus proram puppimue fiat, reluctetur.

§. 199. Facile autem intelligitur, ſi cognita fuerit ſtabilitas nauis reſpectu vtriusque axis longitudinalis ſcilicet ac latitudinalis, tum ex eo ſatis prope colligi poſſe ſtabilitatem reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis. Quodſi enim conſtiterit quanta vi nauis cum inclinationibus verſus proram ac puppim, tum etiam verſus latera reſiſtat, non difficulter aeſtimabitur vis, qua inclinationi in quamcunque aliam plagam reſiſtat. Interim tamen hic facilem trademus viam, cuius ope, ſi cognita fuerit ſtabilitas reſpectu duorum axium horizontalium inter ſe normalium, ſtabilitas reſpectu cuiusuis alius axis horizontalis determinari queat. Hancobrem praecipuum negotium noſtrum in hoc verſabitur, vt, quaque naui propoſita, eius ſtabilitatem reſpectu binorum illorum axium principalium longitudinalis ac latitudinalis definiamus, quippe quae cognitio ad ſtabilitatem reſpectu omnium omnino axium horizontalium diiudicandam ſufficit. Atque hoc pacto quaeſtio de ſtabilitate, quae initio ob axes infinitos viſa eſt infinita, nunc ad quaeſtionem bipartitam eſt reducta.

§ 200. In ſuperiori autem libro oſtenſum eſt, dati aequilibrii ſtatus ſtabilitatem reſpectu cuiusuis axis horizontalis

Digitized by Google

talis determinari ex ſequentibus quatuor rebus. Primo ſcilicet in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur pondus totius nauis, deinde diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, tertio volumen partis ſubmerſae, et quarto denique ſectio aquae. Harum quatuor rerum tres priores aequaliter ingrediuntur, quicunque axis, cuius reſpectu ſtabilitas deſideratur, conſideretur; atque huius axis ratio in ſola ſectione aquae habetur. Per centrum ſcilicet grauitatis ſectionis aquae duci debet recta illi axi horizontali, cuius reſpectu quaeritur ſtabilitas, parallela, atque vtrinque ad hunc axem applicatas orthogonales duci oportet, quarum omnium cuborum ſumma dabit illam quantitatem, quae in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur.

§. 201. Ponamus igitur AEBF eſſe ſectionem aquae per eiusque centrum grauitatis C ductam eſſe rectam AB parallelam illi axi cuius reſpectu ſtabilitas quaeritur; ad hanc itaque rectam tanquam axem ducantur vtrinque applicatae normales PM, pm, PN, pn, quo facto quaeri debet per integrationem valor huius expreſſionis $\int(PM^3 + PN^3)\,Pp$, quo cognito ſtabilitas reſpectu axis AB facile determinabitur. Scilicet ſi ponatur pondus nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$ atque interuallum inter centrum grauitatis et centrum magnitudinis $= b$, erit ſtabilitas reſpectu axis $AB = M\left(\frac{\int(PM^3+PN^3)Pp}{3V} \pm b\right)$, vbi ſignum $+$ ſumi debet ſi centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadat, contra vero ſignum $-$. Simili modo ſtabilitas reſpectu axis EF erit $= M\left(\int\frac{(Q\pi^3+QI^3)Qq}{3V} \pm b\right)$, prouti ſuperiori libro luculenter eſt oſtenſum. Tab. VIII. fig. 2.

§. 202. Quodſi iam in naturam harum formularum integralium diligentius inquiramus, deprehendemus formu-

longitudinalem; poſteriorem latitudinalem; ex quo pro quaque naui circa ſtabilitatem duae naſcuntur quaeſtiones principales, quarum altera quaeritur, quanta ſit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, altera vero quanta ſit ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis. Priore ſcilicet quaeſtione definiri oportet, quantum nauis inclinationi circa axem longitudinalem, ſeu quae fit ad latera nauis, reſiſtat, poſteriori vero, quantum nauis inclinationi circa axem latitudinalem, ſeu quae verſus proram puppimue fiat, reluctetur.

§. 199. Facile autem intelligitur, ſi cognita fuerit ſtabilitas nauis reſpectu vtriusque axis longitudinalis ſcilicet ac latitudinalis, tum ex eo ſatis prope colligi poſſe ſtabilitatem reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis. Quodſi enim conſtiterit quanta vi nauis cum inclinationibus verſus proram ac puppim, tum etiam verſus latera reſiſtat, non difficulter aeſtimabitur vis, qua inclinationi in quamcunque aliam plagam reſiſtat. Interim tamen hic facilem tradémus viam, cuius ope, ſi cognita fuerit ſtabilitas reſpectu duorum axium horizontalium inter ſe normalium, ſtabilitas reſpectu cuiusuis alius axis horizontalis determinari queat. Hancobrem praecipuum negotium noſtrum in hoc verſabitur, vt, quaque naui propoſita, eius ſtabilitatem reſpectu binorum illorum axium principalium longitudinalis ac latitudinalis definiamus, quippe quae cognitio ad ſtabilitatem reſpectu omnium omnino axium horizontalium diiudicandam ſufficit. Atque hoc pacto quaeſtio de ſtabilitate, quae initio ob axes infinitos viſa eſt infinita, nunc ad quaeſtionem bipartitam eſt reducta.

§ 200. In ſuperiori autem libro oſtenſum eſt, dati aequilibrii ſtatus ſtabilitatem reſpectu cuiusuis axis horizontalis

talis determinari ex ſequentibus quatuor rebus. Primo ſcilicet in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur pondus totius nauis, deinde diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae, tertio volumen partis ſubmerſae, et quarto denique ſectio aquae. Harum quatuor rerum tres priores aequaliter ingrediuntur, quicunque axis, cuius reſpectu ſtabilitas deſideratur, conſideretur; atque huius axis ratio in ſola ſectione aquae habetur. Per centrum ſcilicet grauitatis ſectionis aquae duci debet recta illi axi horizontali, cuius reſpectu quaeritur ſtabilitas, parallela, atque vtrinque ad hunc axem applicatas orthogonales duci oportet, quarum omnium cuborum ſumma dabit illam quantitatem, quae in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur.

§. 201. Ponamus igitur AEBF eſſe ſectionem aquae per eiusque centrum grauitatis C ductam eſſe rectam AB parallelam illi axi cuius reſpectu ſtabilitas quaeritur; ad hanc itaque rectam tanquam axem ducantur vtrinque applicatae normales PM, *pm*, PN, *pn*, quo facto quaeri debet per integrationem valor huius expreſſionis $\int (PM^3 + PN^3)\, Pp$, quo cognito ſtabilitas reſpectu axis AB facile determinabitur. Scilicet ſi ponatur pondus nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$ atque interuallum inter centrum grauitatis et centrum magnitudinis $= b$, erit ſtabilitas reſpectu axis $AB = M\left(\frac{\int (PM^3 + PN^3) Pp}{3V} \pm b\right)$, vbi ſignum $+$ ſumi debet ſi centrum grauitatis infra centrum magnitudinis cadat, contra vero ſignum $-$. Simili modo ſtabilitas reſpectu axis EF erit $= M\left(\frac{\int (Q\pi^3 + Q\rho^3) Qq}{3V} \pm b\right)$, prouti ſuperiori libro luculenter eſt oſtenſum. Tab. VIII. fig. 2.

§. 202. Quodſi iam in naturam harum formularum integralium diligentius inquiramus, deprehendemus formu-

Digitized by Google

lam $\int \frac{(PM^3 + PN^3)Pp}{3}$ omnino congruere cum ea, quae prodit, ſi ſingulae ſectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata diſtantiarum ab axe AB, haecque producta in vnam ſummam colligantur. Namque conſideretur particula quaecunque Ww, quae poſita $PW = w$ erit $= Pp. dw$, multiplicetur haec per quadratum diſtantiae ſuae PW ab axe AB hoc eſt per w^2, prodibit $Pp. w^2 dw$, cuius integrale vsque in M ſumtum eſt $\frac{PM^3. Pp}{3}$: ex quo manifeſtum eſt $\int \frac{(PM^3 + PN^3)Pp}{3}$ denotari aggregatum omnium productorum, quae oriuntur, ſi ſingulae ſectionis aquae particulae multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe AB.

§. 203. Eiusmodi autem aggregata productorum, quae oriuntur, ſi figurae cuiusuis ſingulae particulae multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum a recta quadam linea fixa, in praecedente libro appellare conſueuimus momenta earum figurarum reſpectu lineae illius rectae fixae. Quodſi igitur ſectionis aquae AEBF momentum reſpectu axis longitudinalis AB per centrum grauitatis C ſectionis aquae ducti ponatur $= I$, atque eiusdem figurae momentum reſpectu axis latitudinalis $EF = K$, erit ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $= M(\frac{I}{V} + b)$, ac ſtabilitas eiusdem nauis reſpectu axis latitudinalis $EF = M(\frac{K}{V} + b)$. Vnde ope illius calculi, quo momenta quarumcunque figurarum definire ſupra docuimus, facile erit ſtabilitatem cuiusque nauis propoſitae tam pro axe longitudinali quam latitudinali determinare.

§. 204. Perſpicuum igitur eſt, ſi ſectionis aquae non ſolum denter momenta reſpectu axium binorum longitudinalis

dinalis A B et latitudinalis E F, ſed etiam reſpectu cuiuscunque alius axis per centrum grauitatis C ſectionis aquae ducti, tum pari modo ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem axis aſſignari poſſe. Quoniam vero inuentio momenti reſpectu iſtiusmodi axium obliquorum plerumque fit vehementer moleſta, methodum hic indicabimus, cuius ope ex datis momentis I et K reſpectu axium longitudinalis A B et latitudinalis E F, momentum reſpectu cuiuscunque alius axis P Q per centrum grauitatis C ſectionis aquae citra calculum definiri queat: ita vt huius compendii beneficio ſufficiat tantum bina momenta ſectionis aquae reſpectu axium A B et E F determinaſſe, ad nauis ſtabilitatem reſpectu axis cuiuscunque definiendam.

§. 205. Ponatur anguli ACP, quem axis propoſitus PQ cum axe longitudinali AB conſtituit, ſinus $= m$, coſinus $= n$ exiſtente ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $m^2 + n^2 = 1$. Iam conſideretur ſectionis aquae particula quaecunque w, ex qua cum ad axem AB tum ad PQ perpendiculares ducantur wp et wq, dicaturque $Cp = x$; $pw = y$; $Cq = t$; et $wq = u$, erit $tt + uu = xx + yy$; $\frac{xu + yt}{xx + yy} = m$; et $\frac{xt - yu}{xx + yy} = n$. Ex his reperitur $u = mx - ny$ et $t = nx + my$. Momentum igitur ſectionis aquae reſpectu axis PQ erit $= \int w . u^2 = \int w (mx - ny)^2 = m^2 \int xx . w + n^2 \int yy . w - 2mn \int xy . w$. Simul vero etiam obtinebitur eiusdem ſectionis aquae momentum reſpectu axis RS, normalis ad PQ quippe quod eſt $= \int w . t^2 = n^2 \int x^2 . w + m^2 \int y^2 . w + 2mn \int xy . w$. Tab. VIII. fig. 3.

§. 206. Quoniam vero momenta ſectionis aquae reſpectu axium longitudinalis ac latitudinalis dantur, erit $\int y^2 . w = \mathrm{I}$ et $\int x^2 . w = \mathrm{K}$. Vnde eiusdem ſectionis aquae mo-

Digitized by Google

momentum reſpectu axis PQ erit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int xy.w$, momentum vero reſpectu axis ad hunc normalis RS erit $= m^2 I + n^2.K + 2mn\int yx.w$. Summa igitur binorum momentorum reſpectu duorum axium inter ſe normalium erit $= I + K$ ob $m^2 + n^2 = 1$. Quare pro eadem ſectione aquae ſumma duorum momentorum reſpectu axium inter ſe normalium ſemper eſt conſtans, atque ea ſumma perpetuo aequalis aggregato omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingulae ſuperficiei particulae w. multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum wC a centro grauitatis C, per quod bini illi axes tranſeunt. Quodſi itaque habeatur iſtud aggregatum ac praeterea momentum reſpectu cuiusuis axis, ſtatim inde innoteſcet momentum reſpectu axis ad illum normalis.

§. 207. Cum igitur momentum reſpectu axis PQ ſit $= n^2.I + m^2.K - 2mn\int yx.w$, id ex datis momentis I et K aſſignari poterit, dummodo conſtaret valor formulae $\int yxw$. At quoniam omnis ſectio aquae ita eſt comparata, vt axi longitudinali AB in duas portiones ſimiles et aequales diuidatur, quatuor portionum ACE, ACF BCE et BCF, in quas ſectio aquae binis axibus principalibus AB et EF diuiditur, tam binae priores ACE et ACF quam poſteriores BCE et BCF inter ſe erunt ſimiles et aequales. Hinc igitur valor ipſius $\int yx.w$, qui ex portione ACF oritur aequalis erit et negatiuus illius valoris, quem portio ACE praebet; ex quo $\int yx.w$ pro parte EAF euaneſcet; ſimilique modo valor ipſius $\int yx.w$, qui reſpondet parti poſteriori EBF erit $= 0$. Cum ergo totalis valor formulae $\int yx.w$ euaneſcat, erit momentum ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = n^2.I + m^2.K$,

Digitized by Google

$m^2.K$, ac momentum reſpectu axis $RS = m^2.I + n^2.K$; ex quo datis momentis reſpectu axium principalium AB et EF, facili negotio ſine calculo momentum reſpectu cuiuscunque axis, per centrum grauitatis C tranſeuntis, determinari poterit.

§. 208. Quia eſt $nn = 1 - mm$, erit momentum ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = I - m^2 (I - K)$, vbi m denotat ſinum anguli ACP, quem axis PQ cum axe longitudinali AB conſtituit. Quod ſi ergo angulus ACP euaneſcat, ſeu axis PQ in AB incidat, prodibit momentum reſpectu eius $= I$ ob $m = 0$, id quod eſt momentum reſpectu axis AB; at ſi axis PQ incidat in latitudinalem EF, ob $m = 1$, fiet momentum eius reſpectu $= K$. Ponamus autem angulum ACP eſſe ſemirectum, ſeu axem PQ medium interiacere inter axes principales AB et EF, erit $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$ atque momentum erit $= \frac{I+K}{2}$: quod ergo eſt medium arithmeticum inter momenta reſpectu axium principalium, ac propterea aequale momento reſpectu axis RS normalis ad axem PQ, id quod ipſa rei natura indicat, cum axis RS hoc caſu ſimiliter ſit poſitus reſpectu axium principalium, ac axis PQ.

§. 209. Quoniam in omnibus ſectionibus aquae, quae occurrere ſolent momentum reſpectu axis latitudinalis EF maius eſt, momento reſpectu axis longitudinalis AB ſeu $K > I$, erit momentum reſpectu axis obliqui $PQ = I + m^2 (K - I)$. Quare momentum reſpectu axis obliqui PQ maius eſt, quam momentum reſpectu axis longitudinalis AB; atque hoc momentum continuo creſcet, quoad axis PQ in latitudinalem EF incidat. In omni igitur naui momentum ſectionis aquae reſpectu axis longitudinalis

omnium eſt minimum, momentum vero reſpectu axis latitudinalis omnium maximum. Quodſi ergo nauis habeat ſtabilitatem reſpectu axium binorum principalium, ea reſpectu omnium omnino axium firmiter in ſitu aequilibrii perſiſtet, ex quo ſufficit ad ſtabilitatem nauibus conciliandam ad binos tantum axes principales attendere, eorumque reſpectu ſtabilitatem ſatis magnam efficere, quippe quo reliquis axibus omnibus ſimul erit conſultum.

§. 210. Si igitur momentum ſectionis aquae reſpectu axis latitudinalis aequale fuerit momento reſpectu axis longitudinalis, tum eidem momento aequalia erunt momenta reſpectu omnium axium obliquorum. Quare ſi nauis eius modi habeat figuram, vt reſpectu binorum axium principalium aeque ſit ſtabilis, tum eandem ſtabilitatem habebit
Tab. VIII. fig. 4. reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis. Si ergo ſectio aquae fuerit quadratum AEBF, quia momenta eius reſpectu axium AB et EF inter ſe ſint aequalia, momenta quoque reſpectu omnium omnino axium per C tranſeuntium erunt aequalia, hincque corpus aquae innatans, cuius ſectio aquae eſt quadratum, ſecundum omnes plagas aeque erit ſtabile, atque aequali vi inclinationibus reſiſtet. Eadem vero proprietas locum habebit ſi ſectio aquae fuerit quaecunque alia figura, dummodo ea ita ſit comparata, vt eius momenta reſpectu binorum axium principalium ſint inter ſe aequalia.

§. 211. Cum igitur ad iudicium de ſtabilitate cuiusque nauis reſpectu cuiuscunque axis horizontalis ferendum ſufficiat ſectionis aquae momenta cum reſpectu axis longitudinalis tum latitudinalis determinaſſe, ante omnia neceſſe erit figuras aliquot inſtar ſectionis aquae conſiderare, pro

pro iisque momenta reſpectu axium principalium analytice definire. Quodſi enim plurium figurarum momenta fuerint cognita, ex iis aliarum quarumcunque figurarum, quae alias difficulter ad calculum reuocentur, momenta ſatis prope, id quod ad vſum practicum ſufficit, colligi poterunt. Calculo quidem hic vtemur eodem, quo in Tab. VIII.
ſuperiori libro ſumus vſi; ſcilicet ſectionem aquae in quatuor portiones ACE, ACF, BCE, et BCF diuiſam fig. 2.
contemplabimur per axes principales AB et EF; calculumque pro ſingulis portionibus ſeorſim inſtituemus. Sic ſi pro quadrante ACE vocetur $CP = x$, $PM = y$, dabit $\frac{1}{3}\int y^3 dx$ momentum huius quadrantis reſpectu axis AB, ac $\int y x^2 dx$ momentum reſpectu axis EF. Tantum igitur opus eſt, vt hae expreſſiones pro ſingulis quadrantibus quaerantur atque in vnam ſummam colligantur; vbi quidem hoc compendium affert, quod momenta cum quadrantum ACE et ACF, tum quadrantum BCE et BCF ſint aequalia, ex quo calculus duplo fit curtior.

§. 212. Sit igitur primum ſectio aquae quadratum AEBF, per cuius centrum grauitatis C ducti ſint axes Tab. VIII.
principales longitudinalis AB et latitudinalis EF. ponaturque $AC = a$, erit poſitis $Cp = x$, $pm = y$, $y = a$ vnde fig. 4.
$\int y^3 dx = a^4$ et $\frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{a^4}{3}$; atque $\int y x^2 dx = \frac{ax^3}{3} = \frac{a^4}{3}$. Quam ob rem momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{4a^4}{3} = \frac{AB^4}{12}$, cui aequale eſt momentum reſpectu axis latitudinalis EF, et reſpectu cuiuscunque alius axis PQ per centrum grauitatis C ducti. Quodſi ergo aream huius ſectionis aquae ponamus $= 2D$, quam deſignationem ſemper ad aream cuiusuis ſectionis aquae deſignandam adhibebimus,

O 2 erit

erit $AB^2 = 2D$; hincque ſtabilitas reſpectu cuiusuis axis per C tranſeuntis erit $= \frac{AB^2.D}{6} =$. Commodum autem erit in ſequentibus conſiderationem areae ſectionis aquae in expreſſionem momenti inducere, quo ea facilius per volumen partis ſubmerſae, quod pariter per aream ſectionis aquae in rectam quandam ductae exprimere conuenit, diuidi queat.

Tab. VIII. fig. 5. §. 213. Sit nunc ſectio aquae parallelogrammum rectangulum AEBF, cuius axis longitudinalis ſit AB, latitudinalis EF. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area ſectionis aquae $2D = 4ab$. Poſito ergo $CP = x$ erit $PM = y = b$, atque $\int y^3 dx = b^3 x$; vnde momentum reſpectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{4ab^3}{3} = \frac{2D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{6}$. Pari vero ratione prodibit momentum reſpectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2.D}{6}$; ex quo momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis longitudinalis AB ſe habebit ad momentum axis latitudinalis EF inuerſe vt quadratum axis longitudinalis AB ad quadratum axis latitudinalis EF.

Tab. IX. fig. 1. §. 214. Sit porro ſectio aquae rhombus AEBF cuius diagonales AB et EF repraeſentent axes principales, illa AB ſcilicet longitudinalem haec EF latitudinalem. Ponatur $AC = a$, $CE = b$, erit $AB = 2a$, $EF = 2b$ et area $2D = 2ab$. Quodſi ergo ponatur $AP = x$ et $PM = y$ erit $y = \frac{bx}{a}$ et $\int y^3 dx = \frac{b^3}{a^3} \int x^3 dx = \frac{b^3 x^4}{4a^3}$. Poſito itaque $x = a$ prodibit momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = \frac{ab^3}{3} = \frac{D.bb}{3} = \frac{EF^2.D}{12}$; ex quo momentum reſpectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{AB^2.D}{12}$; quae expreſſiones a praecedentibus, quae pro parallelogrammo

grammo rectangulo prodierunt, hoc tantum differunt, quod ibi diuiſum erat per 6, hic vero per 12. Manentibus igitur eadem longitudine ac latitudine, momenta parallelogrammi rectanguli duplo ſunt maiora quam rhombi.

§. 215. Accipiatur pro ſectione aquae trapezium $AeBf$ conſtans ex duabus triangulis aequicruris eAf et eBf, Tab. IX. fig. 2.
quae figura hoc diſcrepat a rhombo, quod hic triangula eAf et eBf, ſint inaequalia. Manebit igitur quidem AB axis longitudinalis, at ef, quia per centrum grauitatis figurae non tranſit, non erit axis latitudinalis. Ad veram igitur poſitionem axis latitudinalis EF inueniendam, determinari oportet centrum grauitatis figurae C; id quod ita reperietur. Natura centri grauitatis hanc praebet aequationem $AB.\, ce.\, Cb = Bc.\, ce.\, \frac{1}{3} Bc - Ac.\, ce.\, \frac{1}{3} Ac$, ex qua oritur $Cc = \frac{ce(Bc^2 - Ac^2)}{3\, AB.\, ce} = \frac{Bc - Ac}{3}$. Ducta itaque per punctum C recta EF parallela ipſi ef, erit verus axis latitudinalis cuius reſpectu momentum huius figurae definiri oportet.

§. 216. Quaeramus primum momentum huius trapezii reſpectu axis longitudinalis AB, ponaturque $Ac = a$; $ce = b$; et $Bc = c$. Dicta itaque $AP = x$ erit $PM = \frac{bx}{a} = y$, et $\int y^3 dx = \frac{ab^3}{4}$. Trianguli igitur Ace momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{ab^3}{12}$, trianguli vero $Bce = \frac{cb^3}{12}$, vnde totius figurae momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{ab^3 + cb^3}{6} = \frac{Dbb}{3} = \frac{ef^2 . D}{12}$. Quod ſi vero momentum figurae reſpectu axis ef quaeratur, quia huius reſpectu momentum trianguli Ace eſt $= \frac{a^3 b}{12}$, et trianguli $Bce = \frac{c^3 b}{12}$, prodiret id $= \frac{a^3 b + c^3 b}{6} = \frac{D(aa - ac + cc)}{2}$, poſito $2D$ pro area totius ſectionis aquae.

Tab. IX. fig. 3. §. 217. Ex hac ipſa autem expreſſione momenti figurae reſpectu axis ef definiri poterit ſine peculiari calculo momentum reſpectu axis latitudinalis veri EF. Namque ſi figurae cuiuscunque AEBF detur momentum reſpectu axis ef per eius centrum grauitatis non tranſeuntis, quod ſit $= L$, ex eo definiri poterit momentum reſpectu axis EF illi axi ef paralleli ac per centrum grauitatis C tranſeuntis. Conſideretur enim figurae particula quaecunque w, erit momentum figurae reſpectu axis ef quod datum ponitur ſcilicet $L = \int w.wn^2$, at momentum reſpectu axis EF quod quaeritur $= \int w.wN^2$. Eſt vero $\int w.wn^2 = \int w.wN^2 - 2Nn\int w.wN + Nn^2\int w$. Quoniam autem axis EF per centrum grauitatis figurae C tranſire ponitur, valor huius expreſſionis $\int w.wN$ vtrinque ſeſe deſtruit fitque $= 0$, atque $\int w$ abit in aream figurae $= 2D$. Quocirca momentum figurae reſpectu axis EF erit $= L - 2D.Nn^2 = L - 2D.Cc^2$.

Tab. IX. fig. 2. §. 218. Cum igitur momentum ſectionis aquae $Ae Bf$ reſpectu axis ef inuentum ſit $= \frac{D(aa-ac+cc}{3}$, verus autem axis latitudinalis EF diſtet ab axe ef interuallo $Cb = \frac{c-a}{3}$; obtinebitur per regulam modo inuentam momentum figurae reſpectu axis $EF = \frac{D(aa-ac+cc)}{3} - \frac{2D(c-a)^2}{9} = \frac{D(aa+ac+cc)}{9} = \frac{D(a+c)^2}{12} + \frac{D(c-a)^2}{36} = \frac{D.AB^2}{12} + \frac{D.Cc^2}{4}$. Maius igitur eſt momentum huius figurae reſpectu axis latitudinalis EF, quam ſi eſſet $Ac = Bc$. In huiusmodi ergo figuris quadrilateris, quae eandem habent longitudinem AB eandemque latitudinem ef, momentum reſpectu axis latitudinalis eo erit maius, quo magis fuerint partes Ac et Bc inter ſe inaequales.

§. 219.

§. 219. Sit nunc ſectio aquae ellipſis AEBF, cu- Tab. IX. fig. 3.
ius axis maior AB axem longitudinalem, minor vero EF latitudinalem exhibeat. Sit $AC = BC = a$, $CE = CF = b$, $CP = x$ et $PM = y$, erit $y = b\sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. Hinc itaque momentum quadrantis ACE reſpectu axis latitudinalis CE erit $= \int bxxdx \sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})} = \frac{a^2 b}{4} \int dx \sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$. At $b\int dx \sqrt{(1 - \frac{xx}{aa})}$ exprimit aream quadrantis elliptici $ACE = \frac{D}{4}$, ex quo momentum quadrantis reſpectu axis EF erit $= \frac{a^2 D}{\text{[illegible]}}$, totiusque ellipſis $= \frac{AB^2 . D}{\text{[illegible]}}$. Hinc ſine vlteriori calculo conſtat ellipſis momentum reſpectu axis longitudinalis AB fore $= \frac{EF^2 . D}{\text{[illegible]}}$; quae formulae iterum ſimiles ſunt iis, quae pro parallelogrammo rectangulo ac rhombo prodierunt, excepto ſolo denominatore, qui pro parallelogrammo rectangulo erat 6, pro rhombo 12, nunc vero pro ellipſi, 8.

§. 220. Quoniam ſupra circa figuras quadrilateras vidimus, eas quae partibus diſſimilibus circa axem latitudinalem ſint praeditae, maiora habere momenta, quam eas, quae conſtent partibus ſimilibus, ſeu rhombos ceteris paribus; operae pretium erit hic inueſtigare vtrum idem in figuris curuilineis eueniat. Sit igitur propoſita Tab. IX. fig. 4.
pro ſectione aquae figura AEBF, quae cum praecedente ellipſi communem habeat axem longitudinalem AB, et maximam latitudinem ef, itemque totam aream, ſed in qua maxima latitudo ef axem AB non ſecet bifariam ſed inaequaliter in c, exiſtente O puncto axis longitudinalis medio. Huius ergo figurae centrum grauitatis cadet in punctum C, eritque EF axis latitudinalis cuius reſpectu momentum figurae determinari oportet. Ponatur ergo $AO = BO = a$; $ce = cf = b$, atque $Oc = c$.

§. 221.

Digitized by Google

§. 221. Huiusmodi autem curuae, quae aequalem habeant aream ellipſi, cuius axes ſunt AB et ef innumerabiles exhiberi poſſunt; poſito enim $AP = x$, $PM = y$, haec aequatio $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, vbi Y denotat functionem eiusmodi ipſius y, quae euaneſcat poſito $y = o$, infinitas curuas iſtius proprietatis praebebit. Poſito namque $y = o$, fit x vel $= o$ vel $= 2a$, ex quo axis transuerſus huius curuae erit $AB = 2a$. Deinde maxima huius curuae latitudo eſt $= b$, reſpondetque abſciſſae $x = a + Y$, poſito in Y loco y valore b, ex quo maxima applicata ce non in punctum axis medium O cadet. Denique vero vt curua haec ad vtramque partem axis AB duas habeat partes AEB et AFB ſimiles et aequales, neceſſe eſt vt Y ſit functio par ipſius y. Hancobrem ponamus $Y = \frac{-cyy}{bb}$, quo fiat interuallum $Oc = c$ vti aſſumſimus.

§. 222. Primum autem dico, quamcunque Y ſignificet functionem ipſius y, dummodo non ambiguam cuiusmodi ſunt eae quae ſignum radicale $\sqrt{}$ inuoluunt, aream huius curuae AEBF aequalem eſſe areae ellipſis, cuius axes ſint $2a$ et $2b$. Cum enim ſit $x = a + Y \pm a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$, valor $x = a + Y - a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ valebit pro portione Ace, alter autem valor $x = a + Y + a \sqrt{(1 - \frac{yy}{bb})}$ pro portione Bce. Erit itaque portionis Ace area $= \int y\,dx = \int y\,dY + \frac{a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$, ſi poſt integrale ita acceptum, vt euaneſcat poſito $y = o$, ponatur $y = b$. Contra vero portionis Bce area erit $= \int y\,dY - \frac{a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}}$ ſi poſt integrale ita acceptum vt euaneſcat poſito $y = b$ ponatur $y = o$. Quamobrem area AEB erit $= \frac{2a}{b} \int \frac{yy\,dy}{\sqrt{(bb - yy)}} = D$, quippe quae expreſſio dat aream ſemiellipſeos.

§. 223.

Digitized by Google

§. 223. Deinde dico huius figurae momentum reſpectu axis longitudinalis AB idem prodire, quicquid ſit functio Y, ſeu aequale eſſe momento ellipſis reſpectu axis AB, poſito enim $Y = o$ curua noſtra abit in ellipſin. Eſt enim momentum portionis Ace reſpectu axis $AB = \frac{1}{3}\int y^3 dx = \frac{1}{3}\int y^3 dY + \frac{a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\surd(bb-yy)}$, ſi poſt integrale ita ſumtum vt euaneſcat poſito $y = o$, fiat $y = b$. Portionis vero Bce reſpectu eiusdem axis momentum eſt $= \frac{1}{3}\int y^3 dY - \frac{a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\surd(bb-yy)}$, ſi poſt integrationem inſtitutam, vt fiat integrale $= o$ poſito $y = b$, ponatur $y = o$. Areae igitur AEB momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{2a}{3b}\int\frac{y^4 dy}{\surd(bb-yy)}$, in quo quantitas Y non ineſt. Erit igitur totius figurae plane vt ellipſis momentum reſpectu axis longitudinalis $= \frac{Dbb}{2} = \frac{ef^2 D}{2}$.

§. 224. Vt nunc etiam momentum huius figurae reſpectu axis latitudinalis EF definiamus, determinemus id prius reſpectu axis cuiusdam illi paralleli, puta reſpectu rectae aa in A ad AB normalis: cognito enim hoc momento facile erit momentum reſpectu axis EF aſſignare, dummodo diſtantia AC fuerit definita. Portionis quidem Ace momentum reſpectu axis Aa eſt $= \int y\left(d.Y + \frac{aydy}{b\surd(bb-yy)}\right)\left((a+Y)^2 - \frac{2a(a+Y)}{b}\surd(bb-yy) + aa - \frac{aayy}{bb}\right) = \int y(a+Y)^2 dY - \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\surd(bb-yy) + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) + \frac{a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\surd(bb-yy)} - \frac{2aa}{bb}\int yy\,dy(a+Y) + \frac{a^3}{b^3}\int yy\,dy\surd(bb-yy)$, integralibus ita ſumtis vt euaneſcant poſito $y = o$ tumque poſito $y = b$. Portionis vero Bce momentum reſpectu axis Aa eſt $= \int y(a+Y)^2 dY + \frac{2a}{b}\int y\,dY(a+Y)\surd(bb-yy) + \frac{aa}{bb}\int y\,dY(bb-yy) - \frac{a}{b}\int\frac{yydy(a+Y)^2}{\surd(bb-yy)} - \frac{2aa}{bb}\int yy\,dy(a+Y) - \frac{a^3}{b^3}\int yy\,dy\surd(bb-yy)$ integralibus contrario modo acceptis.

§. 225. Ex his igitur orietur areae AEB momentum reſpectu axis $aAa = -\frac{4a}{b}\int y\,dY(a+Y)\surd(bb-yy) + \frac{2a}{b}\int\frac{yy\,dy(a+Y)^2}{\surd(bb-yy)} + \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\surd(bb-yy) = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\surd(bb-yy) - \frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)^2\surd(bb-yy = \frac{2a^3}{b^3}\int yy\,dy\surd(bb-yy) + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2 dy\surd(bb-yy)$; propterea quod $y(a+Y)^2\surd(bb-yy)$ fit $=o$, tam ſi $y=o$, quam ſi $y=b$. Eſt vero poſito $y=b$ poſt integrationem $\int yy\,dy\surd(bb-yy) = \frac{bb}{4}\int\frac{yy\,dy}{\surd(bb-yy)} = \frac{b^3D}{8a}$. (§. 222.) Ex quo momentum areae AEB reſpectu axis aAa eſt $= \frac{aaD}{4} + \frac{2a}{b}\int(a+Y)^2 dy\surd(bb-yy)$; atque reſpectu eiusdem axis momentum totius figurae $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2 dy\surd(bb-yy)$, ſumta parte AFB ſimili et aequali parti AEB.

§. 226. Ponamus nunc centrum grauitatis totius figurae cadere in C erit $DAC = \int yx\,dx$ integrali per totam aream AEB extenſo. Quodſi ergo iſta formula pro vtraque portione Ace et Bce ſeorſim exprimatur, prodibit $D.AC = \frac{2a}{b}\int\frac{y^2dy(a+Y)}{\surd(bb-yy)} - \frac{2a}{b}\int y\,dY\surd(bb-yy) = -\frac{2a}{b}\int y\,d.(a+Y)\surd(bb-yy) = \frac{2a}{b}\int(a+Y)\,dy\surd(bb-yy)$, vnde obtinebitur $AC = \frac{2a}{bD}\int(a+Y)\,dy\surd(bb-yy)$. Conſequenter, ſi per centrum grauitatis C axis latitudinalis EF ducatur, erit momentum totius figurae eius reſpectu $= \frac{aaD}{2} + \frac{4a}{b}\int(a+Y)^2 dy\surd(bb-yy) - \frac{8aa}{bbD}\left(\int(a+Y)dy\surd(bb-yy)\right)^2$ Quoties nunc eſt Y functio par ipſius y, formulae hae integrales reduci poterunt ad hanc $\int\frac{yy\,dy}{\surd(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$ ſeu hanc $\int yy\,dy\surd(bb-yy) = \frac{b^3D}{8a}$, ſiue etiam ad hanc $\int dy\surd(bb-yy) = \frac{bD}{2a}$.

§. 227. Ponamus eſſe $Y = \frac{-cyy}{bb}$, ſeu $x = a\frac{-cyy}{bb} \pm \frac{a}{b}\surd(bb-yy)$, ex qua fit $Oc = c$ vti aſſumſimus, erit

$\int(a$

$\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy} = a^2\int dy\sqrt{(bb-yy)} - \frac{2ac}{bb}\int yy\,dy$ $\sqrt{(bb-yy)} + \frac{cc}{b^4}\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)}$. Verum eſt $\int dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2a}$; $\int yy\,dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^3D}{8a}$; et $\int y^4 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{b^5D}{16a}$; ideoque $\int(a+Y)^2 dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{abD}{2} - \frac{bcD}{4} + \frac{bccD}{16a} = \frac{bD}{16a}(8aa-4ac+cc)$. Simili modo erit $\int(a+Y)dy\sqrt{(bb-yy)} = \frac{bD}{2} - \frac{bcD}{8a} = \frac{bD}{8a}(4a-c)$, et $AC = a - \frac{c}{4}$ hincque tandem momentum totius figurae AEBF reſpectu axis $EF = \frac{aaD}{2} + \frac{ccD}{8} = \frac{AB^2.D}{8} + \frac{cC^2\,D}{8}$.

§. 228. Confirmatur igitur in his figuris, quod ſupra in trapeziis obſeruauimus, ſcilicet momentum ſectionis aquae reſpectu axis latitudinalis EF maius fieri, quo magis latitudo maxima *ef* a puncto axis AB medio C diſtet, ceteris paribus. Aequatio autem aſſumta $x = a - \frac{cyy}{bb} \pm \frac{a}{b}$ $\sqrt{(bb-yy)}$ non permittit, vt capiatur $c > \frac{1}{2}a$, alias enim curua vltra rectam *aa* excurreret, id quod non conuenit figuris, quae ſectionis aquae vicem tenere debent. Quodſi autem ponatur $c = \frac{1}{2}a$ ſeu $Oc = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{4}AB$, prodibit momentum ſectionis aquae reſpectu axis latitudinalis $= \frac{AB^2\,D}{8} + \frac{AB^2.D}{128}$. Tanta ergo maximae latitudinis *ef* remotione a medio puncto longitudinis O, momentum reſpectu axis latitudinalis ſui parte decima ſexta augetur.

§ 229. Conſideremus nunc alias curuas latius patentes, in quibus praecedentes continentur, ſitque ſectio aquae AEBF compoſita ex duabus partibus AEB et AFB ſimilibus et aequalibus, ſiue eae curuam continuam conſtituant ſiue ſecus; deinde quaelibet ſemiſſis conſtet ex duabus portionibus applicata *ef* a ſe inuicem disiunctis, quae pariter, vtrum ſint continuae an non, nihil intereſt. Manentibus ſcilicet $AO = Bo = a$, $ce = cf = b$, $AP = x$,

Digitized by Google

$PM = y$, exprimat portionis Ace naturam haec aequatio $x = a + Y - a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = AP$, naturam vero portionis Bce haec aequatio $x = a + Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = Ap$, erit ergo $Mm = 2a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$, vnde area AEB prodibit $= 2a\int dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = D$ integrali ita aſſumto vt euaneſcat poſito $y = o$, tumque facto $y = b$. Area itaque manebit eadem, quaecunque functio pro Y ſubſtituatur.

§. 230. Momentum huius figurae reſpectu axis longitudinalis AB facile determinabitur, cum enim ſit $Mm = 2a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$, erit momentum reſpectu axis $AB = 2a\int yy\,dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$, quod pariter a valore functionis Y non pendet. Ad momentum autem huius figurae reſpectu axis latitudinalis EF, qui per centrum grauitatis figurae C eſt ductus determinandum, quaeratur primum momentum reſpectu axis normalis ad AB et per eius punctum medium O ducti. Quia nunc eſt $PO = -Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ et $pO = Y + a\left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$, erit momentum reſpectu huius axis $= \frac{2n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa - 1} + 2a\int Y^2 dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$, ex quo totius figurae momentum reſpectu axis ipſi EF paralleli et per O ducti erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa - 1} + 4a\int Y^2 dy \left(1 - \frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$.

§. 231. Oportebit iam locum centri grauitatis huius figurae C definire, pro quo natura centri grauitatis praebebit hanc aequationem $D.\,CO = 2a\int y\,dY\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{2n\varkappa a}{b^n}\int y^n Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa-1} = -2a\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ ex qua fit $CO = \frac{-2a\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}}{D}$. Quocirca momentum totius figurae reſpectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + 4a\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} - \frac{8aa\left(\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}\right)^2}{D}$.

Quod ſi nunc pro Y accipiatur eiusmodi functio ipſius y, vt ſit $Y = \alpha y^n + \beta y^{2n} + \gamma y^{3n} + \text{etc.}$ et $\varkappa$ denotet vel numerum integrum vel fractum, cuius denominator ſit 2, integratio ſingularum harum formularum reduci poterit ad eam qua area exprimitur, ſcilicet $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{D}{2a}$.

§. 232. Sit primum antequam pro $\varkappa$ valores definitos accipiamus, $Y = \frac{-cy^n}{b^n}$, vt fiat $Ac = a-c$ et $Oc = c$, erit $\int Y\,dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = -\frac{c}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-c}{n(\varkappa+1)+1}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{-cD}{2a(n(\varkappa+1)+1)}$, atque $\int Y^2 dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{cc}{b^{2n}}\int y^{2n}dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)cc}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa} = \frac{(n+1)ccD}{2a(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)}$. Quocirca momentum figurae propoſitae reſpectu axis latitudinalis EF erit $= \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}\int y^n dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} +$

 $2(n+1)$

$$\frac{2(n+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)(n(\varkappa+2)+1)} - \frac{2ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2} = \frac{4n\varkappa a^3}{b^n}$$

$$\int y^n dy \left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} + \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$$: vnde iterum intelligitur hoc momentum maius eſſe, quo maius fuerit interuallum c inter punctum axis longitudinalis medium O et latitudinem maximam ef.

§. 233. Quoniam vero eſt $\frac{\int y^n dy}{b^n}\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = \frac{1}{1+3n\varkappa}$ $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1}$, ponatur $\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{3\varkappa-1} = N\int dy\left(1-\frac{y^n}{b^n}\right)^{\varkappa}$ $= \frac{ND}{2a}$ erit momentum reſpectu axis EF $= \frac{2n\varkappa a^2 ND}{1+3n\varkappa}$ $+ \frac{2nn(\varkappa+1)ccD}{(n(\varkappa+1)+1)^2(n(\varkappa+2)+1)}$. Valores autem ipſius N pro variis ipſius $\varkappa$ valoribus ita ſe habent

$\varkappa=\frac{1}{2}$	$N=1$
$\varkappa=1$	$N=\frac{4n}{2+4n}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$N=\frac{5n\cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)}$
$\varkappa=2$	$N=\frac{6n\cdot 8n\cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)}$
$\varkappa=\frac{5}{2}$	$N=\frac{7n\cdot 9n\cdot 11n\cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)}$
$\varkappa=3$	$N=\frac{8n\cdot 10n\cdot 12n\cdot 14n\cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)}$
	etc.

§. 234. Ponamus eſſe $c=0$, quia ſi hoc caſu momentum reſpectu axis EF fuerit cognitum, ex eo idem momentum pro valore quocunque ipſius c inueniri poteſt. Erit autem momentum hoc pro variis ipſius $\varkappa$ valoribus ita comparatum vt tabula appoſita indicat.

ſi	Momentum reſpectu axis EF
$\varkappa=\frac{1}{2}$	$2a^2D.\frac{n}{2+3n}$
$\varkappa=1$	$2a^2D.\frac{2n\cdot 4n}{(2+4n)(2+6n)}$
$\varkappa=\frac{3}{2}$	$2a^2D.\frac{3n\cdot 5n\cdot 7n}{(2+5n)(2+7n)(2+9n)}$
$\varkappa=2$	$2a^2D.\frac{4n\cdot 6n\cdot 8n\cdot 10n}{(2+6n)(2+8n)(2+10n)(2+12n)}$
$\varkappa=\frac{5}{2}$	$2a^2D.\frac{5n\cdot 7n\cdot 9n\cdot 11n\cdot 13n}{(2+7n)(2+9n)(2+11n)(2+13n)(2+15n)}$
$\varkappa=3$	$2a^2D.\frac{6n\cdot 8n\cdot 10n\cdot 12n\cdot 14n\cdot 16n}{(2+8n)(2+10n)(2+12n)(2+14n)(2+16n)(2+18n)}$

§. 235.

§. 235. Si pro his curuis ponatur $n = 1$, tum anguli, quos curua in A et B cum axe AB conſtituit erunt obliqui, ſin autem $n < 1$ tum hi anguli euaneſcent, hisque igitur caſibus curua puncta habebit flexus contrarii, ideoque ad ſectionem aquae repraeſentandam non erit idonea. Minimus igitur valor, qui litterae n tribui poterit erit vnitas, hocque caſu capacitas ceteris paribus erit minima: creſcente autem littera n, creſcet capacitas figurae, donec, ſi fiat n infinitum, figura abeat in parallelogrammum rectangulum, cuius momentum reſpectu axis latitudinalis erit $= \frac{2a^2D}{3} = \frac{AB^2D}{6}$, id quod accidit, quicunque numerus loco $\varkappa$ ſubſtituatur, dummodo ſit affirmatiuus; negatiuos enim valores ſubſtituere non licet, eo quod curvae tum non claudantur, ſed in infinitum extendantur.

§. 236. Deinde etiam ad praeſens inſtitutum $\varkappa$ vnitate maius accipi non poteſt; poſito enim $\varkappa > 1$ tum curua in e et f habebit cuſpides ac tangentes ad AB normales, cuiusmodi figurae nauibus non conueniunt. Quodſi autem ſit $\varkappa = 1$ anguli ad e et f erunt acuti, hocque caſu continetur figura rectilinea quadrilatera quam §. 215. conſiderauimus. At ſi ponatur $\varkappa < 1$ tum curuae in e et f habebunt tangentes axi AB parallelas, cuiusmodi figurae ſectioni aquae optime conueniunt. Ponamus igitur $\varkappa = 1$, et $n = 1$ prodibit momentum reſpectu axis EF $= \frac{2a^2D}{6} = \frac{AB^2.D}{12}$, qui eſt caſus rhombi: ſin $n = 2$ fit hoc momentum $= \frac{16a^2D}{35} = \frac{4AB^2.D}{35}$, id quod iam multo maius eſt quam illud. Poſitis vero $\varkappa = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ fit hoc momentum $= \frac{2a^2D}{5} = \frac{AB^2D}{10}$, at ſi $n = 2$ fit id $= \frac{a^2D}{2} = \frac{AB^2.D}{8}$, qui eſt caſus pro ellipſi.

§. 237.

§. 237. Exempla haec ſufficere poſſunt ad momenta cuiusuis ſectionis aquae propoſitae proxime aeſtimanda. Si enim vt hactenus AB deſignet axem longitudinalem EF latitudinalem, et D ſemiſſem areae ſectionis aquae, erit momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, ac momentum reſpectu axis latitudinalis $EF = \frac{AB^2 \cdot D}{\mu}$, vbi μ eſt numerus inter limites 6 et 12 contentus. Valorem autem ipſum numeri μ ex hoc aeſtimari licebit, quod, ſi ſectio aquae ſit rectangulum, fiat $\mu = 6$, ſin rhombus, $\mu = 12$; qui ſunt caſus extremi: deinde etiam conſtat ſi ſectio aquae fuerit ellipſis fore $\mu = 8$; et, ſi ea fuerit parabola axem in axe latitudinali poſitum habens, erit pro momento reſpectu axis longitudinalis $\mu = \frac{35}{4}$ at reſpectu axis latitudinalis erit $\mu = 10$. Provt igitur figura propoſita ad aliquem horum quatuor caſuum proxime accedit, ita valorem litterae μ vero proxime definire licebit. Denique ſi ſectionis aquae ſemiſſes proram puppimque ſpectantes inter ſe fuerint inaequales, hac ipſa inaequalitate momentum reſpectu axis latitudinalis augebitur.

§. 238. Expoſitis igitur his, quae ad ſectionem aquae eiusque momenta reſpectu quorumque axium horizontalium per eius centrum grauitatis ductorum ſpectant, reuertamur ad ſtabilitatem, qua naues in ſitu aequilibrii perſtant, diligentius inueſtigandam. Repraeſentet ergo figura AabB carinam nauis ſeu partem aquae immerſam, cuius ſuprema ſuperficies ſeu ſectio aquae ſit AEBF, atque A prora, B vero puppis. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen partis ſubmerſae $= V$, quod ita pendet ab M, vt pondus maſſae aquae cuius volumen eſt $= V$ aequale

Tab IX. fig. 5.

ſit

Digitized by Google

ſit ponderi nauis $= M$, ſit porro centrum grauitatis totius nauis ſitum in G, centrum magnitudinis partis ſubmerſae vero in O, ita vt O infra G cadat, vt fere in omnibus nauibus fieri ſolet. Denique ſit area ſectionis aquae $= 2.D$, eiusque momentum reſpectu axis longitudinalis $AB = I = \frac{EF^2.D}{\mu}$, at reſpectu axis latitudinalis $= K = \frac{AB^2.D}{\nu}$, vbi μ et ν numeros deſignant medios inter 6 et 12 diverſis autem litteras μ et ν aſſumſimus quia non ſemper aequales valores habent.

§. 239. Ex his itaque obtinebitur ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $AB = M(\frac{EF^2.D}{\mu V} - OG)$ atque momentum reſpectu axis latitudinalis $= M(\frac{AB^2.D}{\nu V} - OG)$. Sin autem centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O caderet, tum loco $- OG$ ſcribi deberet $+ OG$; hocque caſu nauis ſemper haberet ſtabilitatem affirmativam atque in ſitu ſuo aequilibrii firmiter perſiſteret. Stabilitas porro hoc caſu eo erit maior, quo profundius centrum grauitatis G infra centrum magnitudinis O cadet. Ratione autem ſectionis aquae ſtabilitas augebitur quo amplior ea accipiatur; tum enim non ſolum area eius 2 D eo fiet maior, ſed etiam eius longitudo AB et latitudo EF, ex quo ſtabilitas duplicem ob rationem augebitur.

§. 240. Quod ſi igitur naues ita confici poſſent vt earum centrum grauitatis infra centrum magnitudinis caderet, tum nulla admodum cura eſſet adhibenda ad ſtabilitatem nauibus conciliandam, quoniam ſponte haberent ſatis magnam. At haec conditio in pleriſque nauibus nullo modo adimpleri poteſt, ſi enim tota nauis moles per carinam aequabiliter diſtribuatur, tum centrum grauitatis in ipſum centrum magnitudinis caderet, ex quo perſpicuum

Digitized by Google

ſpicium eſt ob partem extra aquam eminentem centrum grauitatis altius eſſe poſitum. Quamuis enim maxime ponderoſis oneribus in imum carinae collocandis centrum grauitatis deorſum et quidem infra centrum magnitudinis deduci poſſet; ſi ſpatium carinae ſuppetat; tamen in plerisque nauibus praeſertim bellicis tanta onerum copia neceſſario ſupra ſuperficiem aquae debet eſſe conſtituta, vt memorata onerum impoſitione centrum grauitatis vix ac ne vix quidem infra aquae ſuperficiem deprimi queat.

§. 241. Cum igitur, ſi praeſentem theoriam ad naues accommodare velimus, centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere ponendum ſit, ſumma cura in conſtructione nauium erit adhibenda, vt naues ſtabilitatem ſufficientem obtineant. Hoc autem in negotio ſufficiet, ſi nauibus ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſatis magna concilietur, quae eſt $= M\left(\frac{EF^2.D}{\nu V} - OG\right)$; cum enim fuerit $\frac{EF^2.D}{\nu V} > OG$ multo magis erit $\frac{AB^2.D}{\mu V} > OG$, quia in omnibus nauibus longitudo AB multo maior eſt quam latitudo EF. Vulgo namque longitudo AB quadrupla ſtatuitur latitudinis EF, ex quo $\frac{AB^2.D}{\mu V}$ circiter decies et ſexies maius ſit quam $\frac{EF^2.D}{\nu V}$, quia numeri μ et ν nullo caſu a ſe inuicem multum diſcrepant. Quanquam enim ſtabilitas nauium reſpectu axis latitudinalis multo maior eſſe debet, quam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, tamen ea ſatis fiet ingens, ſi modo ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſit aliqua. Quamobrem ſufficiet ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis tantam effeciſſe, quantam circumſtantiae requirunt.

§. 242. Cum autem nullum ſit dubium, quin nauis, quo maiorem habeat ſtabilitatem, eo ſit perfectior cen-

ſen-

ſenda, tum enim non ſolum aduerſitates tempeſtatum minore periculo ſubit, ſed etiam maiores vires ſuſtinere valet; hanc obrem conueniet naues ita fabricari vt exceſſus quantitatis $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ ſupra OG ſit quam fieri poteſt maximus. Poſſet quidem iſte exceſſus ad lubitum multiplicari augenda area ſectionis aquae, ſed quia hinc alia naſcuntur incommoda, modus quidam eſt ponendus, quem transgredi non liceat. Definietur autem iſte modus cum vſu, cui nauis quaeque deſtinatur, tum etiam aliis nauium non minus neceſſariis proprietatibus, quae non nimis amplam aquae ſectionem admittunt; interim tamen id nunc maxime eſt neceſſarium, vt quantitas $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ notabiliter intervallum OG ſuperet, alioquin enim nauis nequidem aquae committi poſſet.

§. 243. Videamus igitur ante omnia quantum valorem haec quantitas $\frac{EF^2.D}{\gamma V}$ circiter praebeat. Ac primo quidem conſtat volumen partis aquae ſubmerſae V maius eſſe pyramide baſin habente ſectionem aquae 2D et altitudinem $= CD$, ſeu eſſe $V > \frac{2}{3}D.CD$; contra vero minus eſt V quam prisma eiusdem baſis 2D eiusdemque altitudinis CD, ſeu erit $V < 2D.CD$. Videtur autem ſatis prope accipi poſſe $V = D.CD$, tantum enim foret volumen carinae, ſi ea terminaretur rectis a ſingulis circumferentiae ſectionis aquae punctis ad ſpinam *ab* normaliter ductis. Quanquam enim naues circa medium gibboſiores eſſe ſolent, quam in tali figura, tamen ad proram ac puppim tantundem fere deficit, quantum gibboſitas addit: hancque ob rem aſſumamus $V = D.CD$ vnde ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis prodit $= M\left(\frac{EF^2}{\gamma CD} - OG\right)$.

 §. 244.

§. 244. Centrum magnitudinis carinae circiter cadet infra ſectionem aquae interuallo $CO = \frac{1}{3} CD$, ſi igitur centrum grauitatis totius nauis caderet in ipſam ſectionem aquae foret $OG = \frac{1}{3} CD$, ponamus autem, ne nos vlli periculo exponamus $OG = \frac{1}{2} CD$. Hoc nunc valore ſubſtituto debebit eſſe $\frac{EF^2}{\nu CD} > \frac{1}{2} CD$ ſeu $EF > CD \sqrt{\frac{\nu}{2}}$: tribuamus quoque ipſi ν maiorem valorem, quam vnquam habere ſolet, ſcilicet ſit $\nu = 10$, debebitque eſſe $EF > CD \sqrt{5}$. Quocirca cuiusuis nauis maximam latitudinem in ſuperficie aquae plus quam duplo maiorem eſſe oportet quam profunditatem, ad quam ſub aquam mergitur. Quodſi igitur fiat $EF = 3\,CD$, erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis certo maior quam $M(\frac{9}{10} CD - \frac{1}{2} CD)$ hoc eſt maior quam $\frac{2}{5} M.CD$, quae quantitas ſtabilitatis ſufficere poteſt.

§. 245. Ex his iam facile erit pro nauibus cum ratione ſtructurae tum onerum imponendorum diuerſis rationem aſſignare, quam latitudo ſectionis aquae ad profunditatem carinae tenere debet, vt ſtabilitas fiat ſatis ingens. Si enim centrum grauitatis totius nauis cadat vel in ipſam ſuperficiem aquae vel aliquantillum altius, ita tamen vt eius diſtantia a ſuperficie aquae ſextam partem profunditatis CD non ſuperet, tum ſufficiet latitudinem EF triplam ſtatuere profunditatis CD; ſin autem centrum grauitatis altius cadet, vt ſit $OG = CD$, tum oportebit latitudinem EF circiter quadruplum profunditatis CD conſtitui. At ſi centrum grauitatis G infra ſuperficiem aquae fuerit poſitum, ita vt ſit $OG < \frac{1}{3} CD$ puta $= \frac{1}{4} CD$, tum ſatis erit, ſi latitudo EF aliquantulum plus quam duplo accipiatur quam CD. Quodſi autem OG omnino

eua-

euaneſcat et latitudo EF duplo ſumatur maior, quam profunditas CD, tum ſtabilitas erit $= \frac{2}{3}$ M.CD, hoc eſt tanta, quanta inuenta eſt pro caſu OG $= \frac{1}{2}$ CD et EF $=$ 3 CD.

§. 246. Definita nunc ſtabilitate reſpectu axis longitudinalis, paucis videndum eſt, quanta prodeat ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis. Quoniam enim longitudo AB circiter quadruplo maior accipi ſolet quam latitudo EF, erit ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $M\left(\frac{144 CD}{\mu} - \frac{1}{2} CD\right)$ ſi quidem fuerit EF $=$ 3 CD et OG $= \frac{1}{2}$ CD. Vnde ſi ponatur $\mu = 10$, erit ſtabilitas $=$ 14 M.CD, quae plus quam tricies maior eſt quam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis. Neceſſe autem eſt vt ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis multis vicibus maior ſit, quam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, quia omnis nauis multo fortius reſiſtere debet inclinationibus verſus proram puppimue, eo quod maximae vires, quibus nauis exponitur, ad inclinationem verſus proram tendunt.

§. 247. Vt autem rem generaliter expediamus, ponamus eſſe volumen carinae $V = \frac{2D \cdot CD}{m}$ vbi *m* eſt numerus circiter $= 2$. Sit porro OG $= \frac{CD}{n}$, cuius numeri *n* valorem ex figura et oneratione nauis definiri oportet, minor autem *n* vnitate eſſe non poteſt, quia centrum grauitatis nauis intra corpus nauis cadere debet. Hunc fiat EF $= p$. CD et AB $= q$. EF $= pq$. CD, quibus poſitis erit ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $=$ M.CD $\left(\frac{mpp}{2\mu} - \frac{1}{n}\right)$, et ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $=$ M.CD $\left(\frac{mp^3qq}{2\mu} - \frac{1}{n}\right)$. Quod ſi ergo requiratur vt ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis ſit $= \frac{M \cdot CD}{2}$, quam iam vidimus eſſe

ſufficientem, cum nulla fere nanis habeat maiorem erit $\frac{mpp}{2v} - \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$ et $p = \sqrt{(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n})}$, vnde fit $EF = CD \sqrt{(\frac{v}{m} + \frac{2v}{n})}$.

§. 248. Si nunc plures naues magnitudine inaequales at ſimiliter conſtructas et oneratas concipiamus, tenebunt earum pondera M rationem triplicatam laterum homologorum; vnde cum ſtabilitas reſpectu axis ſiue longitudinalis ſiue latitudinalis ſit vt $M.CD$, erunt nauium ſimilium ſtabilitates, in ratione quadruplicata laterum homologorum. Momenta autem virium venti ad naues ſimiles inclinandas tantum ſunt in triplicata ratione laterum homologorum, ex quo nauium ſimilium eae, quae ſunt maiores, inclinationibus magis reſiſtent quam minores, Naves ſcilicet maiores, ſi quidem velorum ſuperficies teneant rationem duplicatam laterum homologorum, minorem perturbationem in ſitu ſui aequilibrii patientur, quam naves minores.

§. 249. Si nunc cum ex his tum ex reliquis principiis fuerit determinata proportio, quam longitudo, latitudo, et profunditas carinae inter ſe tenere debent facile erit quantitatem nauis aſſignare, cuius pondus praeſcribitur, Detur itaque volumen carinae quod ſit $= V$, quia ab eo pondus nauis pendet, ſitque ſuperficies ſectionis aquae $= \frac{AB.EF}{\varkappa} = 2D$, volumen carinae $= \frac{2D.CD}{m} = \frac{AB.EF.CD}{m\varkappa}$, ac ponamus eſſe hanc inuentam legem, qua eſſe debeat $EF = p.CD$ et $AB = q.EF = pq.CD$ prodibit volumen carinae quod eſt datum, $V = \frac{ppq.CD^3}{m\varkappa}$. Quoniam nunc p, q, m et $\varkappa$ ſunt numeri dati, erit $CD = \sqrt[3]{\frac{m\varkappa V}{ppq}}$; inuenitur igitur profunditas carinae CD, ex qua tum

tum latitudo tum longitudo eius cognoſcetur. Nauis itaque conſtrui poterit, quae tam pondus habeat datum quam ſtabilitatem datam.

§. 250. In nauibus bellicis grandioribus ſumi ſolet latitudo carinae $EF = \frac{5}{8}CD$, atque longitudo $AB = 4EF$: erit ergo $p = \frac{5}{8}$ et $q = 4$. Hinc ergo ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis erit $= M.CD\left(\frac{25m}{8\nu} - \frac{1}{n}\right)$, cum igitur hae naues habeant ſtabilitatem affirmatiuam, erit $25mn > 8\nu$. Ponatur $m = 2$, et $\nu = 10$, quoniam ſupra oſtendimus hos valores proxime his litteris reſpondere, erit $50n > 80$ et $n > \frac{8}{5}$; erit ergo $OG < \frac{5CD}{8}$, ſeu diſtantia centri grauitatis nauium harum a centro magnitudinis carinae minor erit, quam quinque octantes profunditatis carinae. Cadit autem in huiusmodi nauibus centrum grauitatis, ob tormenta, quae omnia ſupra aquam ſunt poſita, ſupra aquae ſuperficiem; quodſi ergo ponatur $OG = \frac{1}{2}CD$ ſeu $n = 2$, erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= \frac{1}{8}M.CD$.

§. 251. Quoniam in maioribus nauibus, ſi quidem ſimilitudo obſeruetur ſtabilitas creſcit in ratione quadruplicata laterum homologorum, cum tamen vires inclinantes ad ſummum in ratione triplicata creſcant; in maioribus nauibus ſine periculo ſtabilitate minore contenti eſſe poſſumus. Scilicet ſi ſtabilitas exponatur per hanc expreſſionem $\frac{1}{\varkappa}M.CD$, pro $\varkappa$ in maioribus nauibus ſatis magnum numerum tuto accipere licet, quod in minoribus non ſine periculo fieri poſſet. Hanc obrem in nauibus illis maximis bellicis ſine periculo aſſumitur $EF = \frac{5}{8}CD$, quae proportio in minoribus nauibus damnum afferret, ſi quidem ſimilis centri grauitatis poſitio adeſſet. Quodſi igitur

Digitized by Google

igitur ſic $OG = \frac{1}{2}CD$, pro nauibus maximis ſumi poterit $EF = \frac{5}{2}CD$, pro minoribus autem EF ad CD maiorem rationem tenere debebit, triplam ſcilicet quam ſupra aſſignauimus.

§. 252. Quoniam virium naues inclinantium momenta ſunt proxime vt pondera nauium, naues diuerſae magnitudinis ita conſtrui conueniet, vt earum ſtabilitates teneant rationem ponderum. Sint itaque duae naues, quarum maioris pondus ſit $= M$, latitudo carinae EF, profunditas eius CD; minoris vero nauis pondus ſit $= m$, carinae latitudo ef, profunditas cd, in vtraque autem naui interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aequetur ſemiſſi profunditatis carinae. Sit porro $cd = \frac{CD}{n}$, atque in maiore naui $EF = \frac{5}{2}CD$, quam rationem ad maximas naues eſſe accommodatam vidimus. Erit igitur ſtabilitas maioris nauis reſpectu axis longitudinalis $= M\left(\frac{EF^2}{\nu . CD} - \frac{1}{2}CD\right) = \frac{1}{8}M.CD$ poſito $\nu = 10$: minoris vero nauis ſtabilitas erit $= m\left(\frac{n.ef^2}{10\,CD} - \frac{CD}{2n}\right)$; quae cum ſtabilitates eſſe debeant vt M ad m erit $nn.ef^2 = 5CD^2 + \frac{5n}{4}CD^2$ hincque $ef = \frac{CD}{2n}\surd(5n + 20) = \frac{cd}{2}\surd(5n + 20)$.

§. 253. In nauibus igitur diuerſae magnitudinis quae tamen in hoc conueniant, vt interuallum inter centra magnitudinis et grauitatis aequetur ſemiſſi profunditatis carinae, ratio inter latitudinem carinae et eius profunditatem eo erit maior, quo naues fiant minores. Ponamus ergo in nauibus maximis, in quibus ſumi ſolet $EF = \frac{5}{2}CD$ eſſe $CD = 20$ pedum, atque habebimus ſequentes proportiones inter profunditates carinae minores et latitudines.

Pro-

Digitized by Google

Profunditas carinae	Latitudo carinae
20 ped.	50, 00 ped.
18 ped.	45, 50 ped.
16 ped.	40, 99 ped.
14 ped.	36, 47 ped.
12 ped.	31, 94 ped.
10 ped.	27, 39 ped.
8 ped.	22, 81 ped.
6 ped.	18, 17 ped.
4 ped.	13, 42 ped.
ſi generaliter m ped.	$\sqrt{5m(5+m)}$ ped.

§. 254. Quodſi autem ad datam nauem, cuius pondus eſt M, et ſtabilitas $= \frac{1}{8}M.CD$ et $EF = \frac{5}{2}CD$, qualem modo inſtar fundamenti aſſumſimus, aliam conſtruere velimus, in qua interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis aliam teneat rationem ad profunditatem carinae, cuius tamen ſtabilitas ſe habeat ad ſtabilitatem illius in ratione ponderum. Sit huius alterius nauis pondus $= m$, latitudo carinae ef, profunditas cd, et diſtantia inter centra grauitatis ac magnitudinis $= \frac{1}{\lambda}cd$: erit huius ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= m(\frac{ef^2}{10cd} - \frac{1}{\lambda}cd)$. Debebit ergo eſſe $\frac{ef^2}{10cd} - \frac{1}{\lambda}cd = \frac{1}{8}CD$: ponatur iam $CD = 20$ ped. et $cd = m$ ped. erit $ef^2 = 25m + \frac{10mm}{\lambda}$ ſeu $ef = \sqrt{(25m + \frac{10}{\lambda}mm)}$ ped. quae expreſſio pro norma accipi poteſt, ad rationem inter latitudinem et profunditatem carinae cuiusque nauis determinandam.

§. 255. Haec vero regula non ita ſtricte eſt obſeruanda, quaſi de ea recedi nullo modo liceret; quaecunque enim inuenta fuerit ratio inter latitudinem ac pro-

fùnditatem carinae, tuto ſemper ratio maior accipi poteſt. Namque quo maior latitudo ad datam profunditatem adiungatur ſtabilitas prodibit eo maior, maiorque naui perfectio conciliatur. In omni ſcilicet naui expedit latitudinem reſpectu profunditatis tantam conſtituere, quam reliquae circumſtantiae permittunt; quare ſi reliqua requiſita, quae naues habere debent, patiantur, vt latitudo maior naui detur, quam regula data poſtulat, hoc incrementum maxime erit amplectendum. Minorem autem latitudinem, quam regula data praebet, cum data profunditate minime coniungi conuenit; etſi enim reliqua nauium requiſita minorem latitudinem poſtulent, tamen potius his reliquis requiſitis vis erit inferenda, quam vt in eorum gratiam ſtabilitas nimium diminuatur.

§. 256. Diminutione autem profunditatis carinae reſpectu latitudinis eius non ſolum maior ſtabilitas nauibus affertur, quod quidem per ſe eſt commodum maximi momenti, ſed etiam naues plura alia commoda non contemnenda conſequuntur. Hac enim diminutione fit vt naves eiusdem molis in aqua ad minorem profunditatem immergantur, hocque ipſo in maris regionibus minus profundis tuto curſum inſtituere queant, quas aliae naues, quae in aqua maiorem profunditatem occupant, nequidem ingredi audent. Praeterea etiam huiusmodi naues, quae aquae minus profunde immerguntur complures ſcopulos in mari latentes euitant, tutoque ſupra eos praetereunt, ad quos, ſi aquae profundius immergerentur allideret, atque naufragii periculum ſubirent. Quae rationes coniunctim eo magis ſuadent, vt profunditas ad quam naues mergantur, quantum fieri poteſt, diminuatur.

§. 257.

§. 257. Haec autem praecepta, quae hactenus de ſtabilitate tradidimus, potiſſimum ſunt ad naues iam debito modo oneratas accommodata; verum in conſtructione nauium non ſufficit ad hoc ſolum attendere, vt naues, cum completam onerationem ſint nactae, in ſitu erecto firmiter perſiſtant; ſed etiam naues ita comparatas eſſe oportet, vt vel minori onerum copia onuſtae, vel adeo vacuae in ſitu aequilibrii ſtabilitate ſint praeditae. Quamquam enim naui, quae vacua nullam etiam habet ſtabilitatem, per onerationem ſtabilitas conciliari poteſt, tamen initio naues vacuae aquae immittuntur, ex quo, ſi ſtabilitate carerent, mox ſubuerſioni maximisque hinc oriundis damnis forent obnoxiae. Quamobrem in conſtructione nauium ſumma cura erit adhibenda, vt primum vacuae aquae commiſſae tum vero etiam minori onerum copia onuſtae ſtabilitatem habeant; eam quidem non admodum magnam, quia hoc ſtatu impetibus tempeſtatis nondum ſolent exponi, ſed tamen aliquam, quae ſufficiat ad navem contra minores vires in ſitu erecto conſeruandam.

§. 258. Ac primum quidem perſpicuum eſt, ſi navis ſiue vacua ſiue vtcunque onuſta ſtabilitatem habuerit reſpectu axis longitudinalis, eandem multo ſtabilius fore conſtitutam reſpectu axis latitudinalis. Quocirca ſufficiet naues ita conſtruxiſſe, vt quaecunque eius portio aquam ſubeat ſitus aequilibrii ſtabilitatem habeat reſpectu axis longitudinalis. Minime autem nauis aquae immergitur, ſi eſt vacua, ex quo ſuperfluum foret ſtabilitatem pro minoribus immerſionibus quaerere. Totum igitur hoc negotium huc redit, vt quaecunque nauis ſectio horizontalis, poſita intra ſectiones aquae, quas nauis obtinet, ſi vel eſt vacua

 vel

Digitized by Google

vel completam onerationem conſecuta, vicem ſectionis aquae ſubeat, ſtabilitas adſit reſpectu axis longitudinalis. Quoniam vero haec ſtabilitas ex maxima ſectionis aquae latitudine definitur, ſectionem carinae transuerſalem ampliſſimam conſiderari oportebit, quippe quae cuiusuis ſectionis horizontalis maximam latitudinem praebet.

Tab. X. fig. 1. §. 259. Sit igitur EFD ſectio ampliſſima, cuius figuram quaerimus, vt nauis requiſita proprietate ſit praedita. Cadat nauis vacuae centrum grauitatis ad interuallum DG ſupra fundum carinae, perinde autem eſt ſiue in planum ſectionis ampliſſimae incidat ſiue minus: atque ponamus centrum grauitatis in eadem altitudine permanere, ſi ſucceſſiue nauis magis magisque oneretur. Tuto autem hoc aſſumere licet, nam imponendis oneribus centrum grauitatis ad profundiorem potius ſitum redigi ſolet; ex quo ſi ſtabilitas fuerit naui conciliata, pro ſitu centri grauitatis in G, eo maiorem habebit nauis ſtabilitatem, ſi centrum grauitatis profundius fuerit ſitum. Tranſeat nunc ſectio aquae per ef cuius maxima latitudo ſit haec ipſa recta ef ponaturque portionis aquae ſubmerſae profunditas $Dc = x$, ſemilatitudo ſectionis aquae $ce = y$; atque interuallum conſtans $DG = f$. Portionis autem aquae immerſae centrum magnitudinis proxime erit in o, vt ſit $Do = \frac{2}{3}x$, vnde fiet $oG = f - \frac{2}{3}x$. Ex his erit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= M\left(\frac{4yy}{\nu x} - f + \frac{2}{3}x\right)$ vbi pro ν circiter 9 vel 10 accipi oportet.

§. 260. Debebit ergo in ea ſaltem ſectionis ampliſſimae portione, quae ſectiones aquae ſuppeditare poteſt, eſſe $\frac{4yy}{\nu x} > f - \frac{2}{3}x$, ſeu $4yy > 9fx - 6xx$ poſito 9 pro ν. Quare ſi capiatur $4yy = 9fx - 6xx$, haecque curua deſcriba-

Digitized by Google

ſcribatur, neceſſe eſt, vt ſectio ampliſſima nauis hanc figuram in ſe includat, ſaltem eius portionem, quae intra ſectiones aquae extremas eſt poſita. Perſpicuum autem eſt hanc aequationem $4yy = 9fx - 6xx$ eſſe ad ellipſin DEHF cuius axis verticalis $DH = \frac{3}{2}f$, alterque horizontalis $EF = \frac{3f\sqrt{6}}{4}$. Data ergo eleuatione centri grauitatis G ſupra fundum nauis D, capiatur $DH = \frac{3}{2}DG$, pro vno ellipſis axe, et $EF = \frac{3}{4}DG\sqrt{6}$ pro altero, ita vt ſit $DH^2 : EF^2 = 2:3$ atque deſcripta ellipſi HEDF, notatisque ſectionibus aquae extremis EF et ef, quarum illa EF naui penitus onuſtae haec ef naui vacuae reſpondeat, ſectionem nauis ampliſſimam ita comparatam eſſe oportet, vt ſpatium ellipſis EefF in ſe includat, pariterque in puncto D terminetur, quippe quod eſt imum nauis.

§. 261. In naui vacua centrum grauitatis G communiter ſupra ſectionem aquae, quae naui etiam oneratae competit, cadit. Cum enim plerumque pars nauis extra aquam eminens multo ſit maior, quam pars ſubmerſa ob ingentem eleuationem, quae cum verſus proram tum vero maxime verſus puppim fieri ſolet, etiam centrum grauitatis ſupra mediam altitudinem cadet. Quoniam igitur in ellipſi inuenta centrum C infra G cadit, et quidem parte tertia ipſius CD, axis transuerſus EF proxime ſectionem aquae naui onuſtae competentem repraeſentabit; ac hanc ob rem latitudo ſectionis aquae ef, quam obtinet nauis vacua minor erit quam EF. Quamobrem ſectio nauis ampliſſima tuto ita confici poteſt, vt verſus fundum D conuergat: interim tamen conuergentia non debet eſſe nimis magna, in profunditate enim c ſectio ampliſſima maior eſſe debet, quam recta ef, quo ipſo convergen-

vergentia limitatur. Cognito autem loco centri grauitatis nauis vacuae, deſcriptaque ellipſi inuenta, ſtatim indicari poterit vtrum nauis vacua aquae immiſſa ſtabilitatem ſit habitura, an ſecus; ac praeterea quanta ea futura ſit.

§. 262. Conſtructa autem ad normam quamcunque naui, ingeſtaque debita onerum copia, ab ipſa onerum per nauem diſtributione ſtabilitas plurimum pendet. Quanquam enim onera per primum requiſitum ita diſponi debent, vt totius nauis centrum grauitatis in eam rectam verticalem incidat, in qua verſatur centrum magnitudinis partis ſubmerſae, tamen vt iam ſupra vidimus, huic requiſito innumerabilibus modis ſatis fieri poteſt, cum id tantum eſſet efficiendum, vt centrum grauitatis in aſſignatam rectam verticalem incidat. Nunc vero cardo rei potiſſimum in hoc verſatur, in quonam huius rectae verticalis puncto centrum grauitatis conſtituatur; ad ſtabilitatem enim nauis definiendam noſſe oportet interuallum, quod inter centra grauitatis ac magnitudinis eſt interiectum. Ex formula enim ſtabilitatis data intelligitur, eo fore ſtabilitatem maiorem, quo minus fuerit illud interuallum inter centra grauitatis et magnitudinis, ſi quidem centrum grauitatis ſupra centrum magnitudinis ſit poſitum.

§. 263. Hinc itaque colligitur, quo magis oneribus diſponendis centrum grauitatis nauis deprimatur, eo magis ſtabilitatem auctum iri; ex quo cum in nauibus ſtabilitas, quantum fieri poteſt, ſit augenda, haec naſcitur pro diſpoſitione onerum regula, vt centrum grauitatis nauis quam maxime deorſum perducatur. Huic igitur regulae ſatisfiet, ſi onera ad tantam profunditatem collocentur, quantum circumſtantiae permittunt; quo quidem in negotio

Digitized by Google

tio aduertendum eſt, vt ea onera, quae maximam habeant grauitatem ſpecificam, profundiſſime ponantur, quo grauioribus enim oneribus infima carinae cauitas impleatur, eo magis centrum grauitatis deorſum redigetur. Regula haec in praxi etiam ſollicite obſeruatur, ſolent enim pleraeque naues circa infimam cauitatem grauiſſimis materiis, cuiusmodi ſunt ſaburra, lapides, ferrum etc. adimpleri, quae plerumque per ſe nullius prorſus ſunt vtilitatis, ſed eum tantum in finem ingeruntur, vt nauis ſtabilitas augeatur.

§. 264. Haec rerum alias inutilium ingeſtio eo magis eſt neceſſaria, quo reliquae merces vehendae minorem habent grauitatem ſpecificam. Quodſi enim talibus mercibus leuioribus infima nauis cauitas impleretur, ob earum exiguum pondus centrum grauitatis non ſolum parum deorſum detraheretur, ſed etiam a reliquis mercibus ſuperiorem partem nauis occupantibus multo magis eleuaretur. Si ergo onera imponenda ita fuerint comparata, vt perinde ſit, quonam in loco quaeque collocentur, primum quidem omnia quam maxime deorſum erunt detrudenda; tum vero ea, quae ſunt ſpecifice grauiora, ad infimum locum, leuiora autem ad ſupremum collocari oportebit, ſin autem plura onera maximi ponderis ex ſua natura in ſuperiore nauis parte verſari debent, vt tormenta in nauibus bellicis, tum niſi ſtabilitas nauis per ſe ſatis ſit magna, aliis ponderoſiſſimis oneribus infima nauis cauitas erit adimplenda. Ex his autem ſatis ſuperque perſpicitur, quomodo nauium onerationem dirigi oporteat, vt per eam maximum ſtabilitatis incrementum obtineatur.

§. 265.

Digitized by Google

§. 265. Vt autem diſtinctius intelligatur, quantum translatione onerum ſtabilitas nauis afficiatur atque vel augeatur vel diminuatur, calculum ſubduci conueniet. Primo quidem ex formulis datis, quibus ſtabilitatis quantitas exprimitur, perſpicuum eſt, ſi transpoſitione onerum in naui contentorum centrum grauitatis per ſpatium quoddam s deorſum perducatur, tum ſtabilitatem nauis reſpectu cuiusuis axis augeri quantitate $= M.s$ denotante M pondus nauis. Quodſi autem onerum tranſpoſitione centrum grauitatis ſurſum promoueatur per interuallum $= s$, tum ſtabilitas diminuetur quantitate $= M.s$. Quoniam enim onera, quae in naui iam actu inſunt, tantum transponuntur, neque ſectio aquae, neque volumen partis ſubmerſae mutabitur, ſed vel depreſſione vel eleuatione centri grauitatis ſolum interuallum inter grauitatis centrum et centrum magnitudinis partis ſubmerſae vel diminuetur quantitate s vel augebitur; ex quo ſtabilitas priori caſu quantitate $M.s$ augebitur, poſteriori vero caſu tantundem minuetur.

Tab. X. fig. 2. §. 266. Sit nunc in naui quacunque cuius pondus $= M$. DG recta illa verticalis in qua centrum grauitatis totius nauis G ſit ſitum; atque ponatur onus aliquod, cuius pondus ſit $= P$, transferri in locum humiliorem p, qua translatione quantum ſtabilitas augeatur, inueſtigemus. Ponamus autem primum, oneris huius P centrum grauitatis P tam ante quam poſt translationem ſitum eſſe in ipſa recta verticali DG per centrum grauitatis nauis G tranſeunte. Separemus igitur ſaltem cogitatione pondus hoc P a tota naui, ita vt reliquae nauis pondus ſit $= M - P$; eiusque centrum grauitatis poſitum ſit in γ. Cum vero totius nauis centrum grauitatis verſetur in G, erit $(M - P)\gamma G =$

P.PG ideoque $G\gamma = \frac{P.PG}{M-P}$. Translatum iam ſit pondus P in ſitum p, ſitque nunc totius nauis centrum grauitatis in g, erit $P.pg = (M-P)\gamma g$ ſeu $P.pG - P.Gg = (M-P)$ $Gg - P.PG$, ex qua aequatione oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M}$. Deſcenſu ergo oneris P per ſpatium Pp ſtabilitas augetur quantitate $P.\ Pp$.

§. 267. Quanquam autem hic centrum grauitatis oneris deorſum moti in ipſa recta verticali DG poſuimus, tamen idem augmentum ſtabilitatis obtinebitur, ſi in nauis loco quocunque onus verticaliter deorſum transferatur. Nam ponamus onus $= P$, cuius centrum grauitatis ſitum Tab. X. fig. 3. eſt in P, deorſum ferri, vt eius centrum grauitatis perveniat in p; hacque translatione deſcendat totius nauis centrum grauitatis G in g vsque. Sit γ centrum grauitatis reliquae nauis $M-P$ erit $PG : G\gamma = M-P : P = pg : g\gamma$: atque componendo $P\gamma : G\gamma = M : P = Pp : Gg$ ex qua analogia oritur $Gg = \frac{P.Pp}{M.}$. Cum igitur incrementum ſtabilitatis ſit $= M.Gg$ erit id $= P.Pp$. Quoties ergo in naui onus aliquod cuius pondus $= P$, in locum humiliorem defertur, ſtabilitas nauis augetur, et quidem producto, quod oritur ſi pondus oneris deorſum translati multiplicetur per altitudinem, per quam deſcendit. Ex quibus quantum augmentum ſtabilitatis per commodam et bene directam onerationem afferatur, luculenter perſpicitur.

§. 268. Inquiramus nunc etiam quantum ſtabilitas nauium vel appoſitione nouorum onerum, vel ablatione onerum, quae ante affuerant, afficiatur; vbi quidem onera tum in ipſum centrum grauitatis apponi, quam ex eo aufferri ponemus, quia ſi vel in aliud apponantur vel inde auferantur, mutatio ſtabilitatis ex caſu praece-

dente definiri poteſt. Conſideremus tantum ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis, ſitque M pondus nauis, V volumen partis ſubmerſae, 2 D area ſectionis aquae, E F eius maxima latitudo, O centrum magnitudinis partis ſubmerſae, G centrum grauitatis totius nauis, erit ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis $= M\left(\frac{EF^2 . D}{\nu V} - OG\right)$. Eſt vero vti ſupra vidimus $\nu = 9$ vel 10 proxime, et $V = D . CD$ atque $CO = \frac{1}{3} CD$ circiter. Quoniam ergo eſt $CD = \frac{V}{D}$ erit $OG = DG - DO = DG - \frac{2V}{3D}$, atque ſtabilitas prodibit $= M\left(\frac{EF^2 . D}{9V} + \frac{2V}{3D} - DG\right)$.

§. 269. Ponamus iam huic naui in ipſo centro grauitatis G nouum apponi pondus $= P$, eo pondus nauis fiet $= M + P$, atque ideo nauis profundius immergetur. Quodſi ergo ſumamus tali maiore immerſione ſectionem aquae eiusdem quantitatis manere, id quod tuto aſſumere licet, quia latera nauis circa aquae ſuperficiem ſolent eſſe verticalia, retinebit D poſt noui oneris impoſitionem priſtinum valorem; at maius volumen aquae ſubmergetur, quod ſe habebit ad volumen V vt $M + P$ ad M. Cum igitur facta hac impoſitione ponderis P, abeat M in $M + P$, et V in $V + \frac{PV}{M}$, at E F, D, et DG maneant inuariata, erit ſtabilitas nauis poſt impoſitionem ponderis P reſpectu axis longitudinalis $= (M + P)\left(\frac{M . D . EF^2}{9V(P + M)} + \frac{2V(M + P)}{3M . D} - DG\right) = \frac{M . D . EF^2}{9V} + \frac{2V(M + P)^2}{3M . D} - M . DG - P . DG$; quae excedit ſtabilitatem priſtinam quantitate $+ \frac{2P . V(2M + P)}{3M . D} - P . DG$.

§. 270. Quodſi autem ponamus pondus hoc P non in centro grauitatis nauis G ſed alio loco puta P imponi, augebitur nauis ſtabilitas inſuper incremento $= P . GP$, vnde

de totum ſtabilitatis incrementum, quod ex hac impoſitione ponderis P eſt natum erit $= \frac{2P.V(2M+P)}{3M\,D} - P.DP$. Cum autem pondus hoc P valde exiguum ponitur reſpectu totius nauis, loco $2M + P$ ſcribere licet $2M$, ex quo ſtabilitatis accrementum erit $= \frac{4PV}{3D} - P.DP$. Quoniam vero porro eſt $\frac{V}{D} = CD$ erit ſtabilitatis augmentum $= P(\frac{4}{3}CD - DP)$. Ex quibus perſpicitur non ſolum omnia pondera quae naui infra aquae ſuperficiem ingeruntur ſtabilitatem augere, ſed etiam quae ſupra aquae ſuperficiem adduntur, dummodo eorum diſtantia a ſuperficie aquae non excedat tertiam partem profunditatis carinae.

§. 271. Vt igitur normam habeamus, quam ſequi conueniat, cum in appoſitione tum in ablatione onerum ſupra ſectionem aquae ACB alia concipienda eſt ſectio horizontalis MLN cuius a ſectione aquae diſtantia LC aequalis ſit tertiae parti profunditatis carinae CD. Notata autem hac ſuperficie horizontali MLN, omnia onera quae infra eam in nauem imponuntur ſtabilitatem nauis augebunt, contra vero onera quae ſupra eam ſuperficiem adduntur, ſtabilitatem diminuent. Quod vero ad ablationem ſeu eiectionem onerum attinet ex iisdem principiis manifeſtum eſt ſi onera auferantur ex parte nauis ſuperiori $MN\beta\alpha$ tum ſtabilitatem nauis augeri, contra vero ſi onera ex parte inferiori $M\,ab\,N$ eiiciantur, tum ſtabilitatem diminui. His autem ſingulis caſibus tam incrementa quam decrementa ſtabilitatis inuenientur, ſi onera tam impoſita de nouo quam ablata multiplicentur per ſuas a ſuperficie horizontali MN diſtantias, ex quo intelligi licet, quantum lucrum tam ex adiectione quam ablatione onerum expectari debeat. Tab. X. fig. 5.

S 2 §. 272.

§. 272. Quamuis vox ſtabilitatis, qua in hac doctrina vtimur, omnino noua videatur, tamen res ipſa omni tempore ſatis fuit nota; quoniam enim ſecuritas nauigationis potiſſimum a ſtabilitate nauium, qua in ſitu erecto perſiſtere conantur, pendet, haec res nautis ignota manere non potuit, etiamſi nemo adhuc diſtincte oſtenderit, quomodo ea ſit comparata. Naues autem, quae ſufficienti ſtabilitate ſunt praeditae, nautis ita deſcribi ſolent, vt dicant, eas velis portandis eſſe pares, ſeu vim velorum ſuſtinere valere, quae definitio a noſtra non multum diſcrepat. Cum enim vis venti in vela impingens non ſolum nauem propellat, ſed etiam inclinare conetur, perſpicuum eſt, niſi nauis ſatis magnam habeat ſtabilitatem, eam a vi venti nimium inclinari debere, praecipue in curſu obliquo, quo vis velorum nauem ad latera inclinare annititur. Quo igitur maiorem vim venti nauis ſine periculoſa inclinatione ſuſtinere valet, eo maiori ſtabilitate praedita ſit, neceſſe eſt.

§. 273. Saepe numero autem euenire ſolet, vt naues, quando iam ſunt conſtructae atque aquae immiſſae, nimis paruam ſtabilitatem habere deprehendantur; quod quidem vitium, ex theoria noſtra expoſita non ſolum facile praeuideri ſed etiam euitari poſſet. Ac Paulus Hoſtis ſcriptor de re nautica celebris atque expertus refert pleraſque naves in Gallia fabricari ſolitas hoc vitio laborare, vt niſi medela adhibeatur, velorum vim ſuſtinere non valeant; atque ob hunc defectum complures naues perire ſolere. Ratio ſcilicet huius vitii in hoc eſt poſita, quod vel pro data carinae latitudine profunditatem nimis magnam vel pro data profunditate latitudinem nimis paruam effecerint;

ex

ex quo ſtabilitas nimis debilis exiſtit. Plerumque igitur teſtimonio eiusdem Auctoris naues in Gallia conſtructas noua contabulatione extrinſecus muniri oportuit, vt ipſis maior ſtabilitas conciliaretur; cuius medelae ratio cum noſtra Theoria apprime congruit; hoc enim munimento amplitudo nauis ac proinde etiam ſectio aquae dilatatur, vt eidem profunditati carinae maior latitudo eiusdem reſpondeat.

§. 274. Quo frequentius igitur hoc vitium in conſtructione nauium committi ſolet, eo maior cura erit adhibenda, vt medela maxime idonea reperiatur, quae non ſimul, ſi adhibeatur, nauibus alia vitia inferat, cuiusmodi eſt ea contabulatio, cuius Auctor allegatus mentionem facit, qua reſiſtentia nauis in aqua admodum augetur, celeritasque notabiliter retardatur. Quamobrem nunc potiſſimum inquiramus, quo pacto nauis iam fabricatae, quae nimis exiguam habeat ſtabilitatem, ſtabilitas quam commodiſſime augeri queat. Ac primo quidem iam expoſuimus quomodo per onerationem, onerumque translationem ſtabilitati incrementum addi poſſit, verum haec medela plerumque vel minus parum prodeſt, vel ob reliquas circumſtantias non adhiberi poteſt, quin ſimul nauis inutilis reddatur; vt ſi velimus in naui bellica omnia tormenta infra aquae ſuperficiem detrudere.

§. 275. Ex expreſſione autem, qua ſtabilitatis quantitatem definiuimus, intelligitur ſtabilitatem triplici modo augeri poſſe. Primo enim ſtabilitas creſcit ſi centrum grauitatis nauis in humiliorem locum perducatur, quod fit grauioribus oneribus deorſum transferendis, quem vero modum in praeſenti negotio parum adiumenti afferre iam

Digitized by Google

indicauimus. Deinde etiam ſtabilitas augeri poteſt, ſi centrum magnitudinis carinae altius promoueatur, quod autem ſine dilatatione carinae in parte ſuperiori fieri nequit; dilatata vero carina in parte ſuperiori incrementum ſtabilitatis ſimul a tertio modo oritur. Tertio enim ſtabilitas incrementum capit, ſi ſectio aquae fiat amplior, hoc namque modo non ſolum centrum magnitudinis carinae ſurſum aſcendit, ſed quod maximum ſtabilitatis incrementum producit, momentum ſectionis aquae reſpectu cuiusque axis augetur. Praecipue autem efficiendum eſt vt momentum reſpectu axis longitudinalis maxime augeatur, quia hoc in omnibus nauibus ſolet eſſe minimum, atque ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis debiliſſima; ex quo haec ſtabilitas perpetuo maxime indiget augmentatione.

Tab. XI. fig. 1. §. 276. Inueſtigemus igitur, quantum incrementum ſtabilitas nauis reſpectu axis longitudinalis AB per amplificationem ſectionis aquae nanciſcatur. Ac primo quidem modum vſitatum contemplemur, qua naui circa ſuperficiem aquae vtrinque quaſi alae Mem, Nfn adiungi ſolent, quo fit vt ſectio aquae AEBF augeatur vtrinque ſpatiis $MEme$ et $NFnf$ circa eius maximam latitudinem EF. Ponamus ſectionis aquae proprie ſic dictae AEBF momentum reſpectu axis AB eſſe $= I$, pondus nauis $= M$, volumen carinae $= V$, centrum magnitudinis carinae ſitum eſſe in O et nauis centrum grauitatis in G, erit ſtabilitas nauis, quam ante adiunctionem alarum habuit $= M(\frac{I}{V} - OG)$. Nunc autem momentum ſectionis aquae I augeri debet aggregato omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingulae ſpatiorum $MEme$ et $NFnf$ particulae multi-

multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe AB. Hoc igitur aggregatum ſeu momentum ſi fuerit $= i$ ſtabilitas nauis augmentum accipiet $= \frac{Mi}{V}$.

§. 277. Ad quantitatem huius momenti i aeſtimandam ſit area $MEme$ vel $NFnf = s$; atque accipiatur in altera particula infinite parua w cuius ab axe AB diſtantia ſit Rw, erit $i = 2\int w . Rw^2$ et $s = \int w$. At $\frac{\int w . Rw^2}{\int w . Rw}$ dat diſtantiam centri oſcillationis areae $MEme$ ab axe AB ſi circa axem AB oſcillaret, quae ſit $= f$; ac $\frac{\int w . Rw}{\int w}$ dat diſtantiam centri grauitatis areae $MEme$ ab axe AB, quae ſit $= g$. Erit itaque $fg = \frac{\int w . Rw^2}{\int w} = \frac{\int w . Rw^2}{s}$, ex quo oritur momentum areae $MEme$ reſpectu axis AB, $\int w . Rw^2 = fgs$ et $i = 2fgs$. Eſt autem vt ex natura centri oſcillationis patet $f > g$, et ſi p et q ſint horum additamentorum centra grauitatis erit $i > 2s . Cp^2$ quia autem in hoc negotio praeſtat pro i valorem vero minorem accipere, ponamus $i = 2s . Cp^2$; quia etiam differentia eſt inſenſibilis.

§. 278. Incrementum igitur ſtabilitatis, quod oritur ab adiunctione iſtarum alarum erit $= \frac{2Ms . Cp^2}{V} = \frac{Ms . pq^2}{2V}$. Quodſi igitur ponamus alas tantum verſus proram ac puppim extendi, vt earum centra grauitatis in E et F cadant, erit ſtabilitatis incrementum $= \frac{M . EF^2}{2V}$ quae expreſſio etiam ſemper a vera ſenſibiliter vix diſcrepat, quia latitudo alarum Ee et Ff vehementer parua eſſe ſolet. Sin autem area ſectionis aquae proprie $AEBF = 2D$ in computum ducatur et ſumatur $V = D . CD$, atque ponatur $EF = CD\sqrt{6}$, eo quod ratio EF ad CD non ſatis magna cenſetur, quia ſtabilitas augmentatione opus

habet,

habet, erit ſtabilitatis incrementum $= \frac{3Ms \cdot CD}{D}$. Si porro ponatur area $MEme = \frac{3}{n}$ ABE $= \frac{3}{n}D$ prodibit ſtabilitatis incrementum $= \frac{3}{n}M.CD$. Idem ergo proficitur, ac ſi centrum grauitatis nauis G per interuallum $= \frac{3}{n}CD$ deorſum foret perductum.

§. 279. Huiusmodi igitur appoſitione alarum ſtabilitas multo magis augetur, quam per translationem ponderum vix fieri poteſt; tantundem enim hoc modo obtinetur, quantum translatione ponderis $= \frac{3}{n}M$ a ſuperficie aquae ad imum nauis. Praeterea vero non ſolum ob auctam ſectionem aquae ſtabilitas augetur, ſed quia haec contabulatio infra ſectionem aquae porrigitur, carinae volumen etiam amplius euadit in parte ſuperiori, vnde eius centrum magnitudinis eleuatur. Interim tamen hinc parum lucri accedit, quia ob eandem cauſam nauis aliquantulum extra aquam extollitur; (ſemper enim aequale volumen ſub aqua verſari debet), ex quo eius centrum magnitudinis iterum deprimitur. Sed quia haec ſunt vix ſenſibilia, parum intereſt, vtrum aſcenſus an deſcenſus huius centri magnitudinis praevaleat.

§. 280. Quanquam autem huiusmodi alis ſtabilitas admodum augetur, tamen ex iis aliud incommodum nauibus infertur, quo fit vt reſiſtentia in motu directo ab alliſione aquae ad has alas multum augeatur, in motu autem obliquo curſus aduerſus venti plagam non parum impediatur. Ad ſcopum quidem praeſentem ſufficeret alas has maxime tenues effeciſſe, quoniam ſtabilitatis incrementum a ſola aucta area ſectionis aquae proficiſcitur, quo pacto reſiſtentiae nullus locus concederetur: ſed quia nauis non perpetuo ſitum erectum exactiſſime tenet, verum ad

latera

latera ſaepenumero non parum inclinetur, neceſſe eſt, vt alae notabilis craſſitiei conficiantur, quo in quauis nauis inclinatione ſectionem aquae ampliorem reddant. Interim tamen hinc intelligitur, quomodo craſſities alarum ex data inclinationum quantitate definiri debeat, ne nimia earum craſſitie reſiſtentia praeter neceſſitatem multiplicetur.

§. 281. Vt autem clarius appareat ad quantam profunditatem alae hae ad latera nauis pertingere debeant conſideremus ſectionem ampliſſimam EDF, ad quam repraeſentent *m*E*p* et *n*F*q* ſectiones verticales iſtarum alarum. Deinde notetur maximus angulus ad quem nauis in ſumma tempeſtate circa axem longitudinalem inclinari ſoleat, qui ſit EC*p* vel FC*q*; ducantur tum rectae *mq* et *np*, quae deſignabunt, quantum alae tam ſupra aquam eminere, quam infra aquam demergi debeant. At ſpatium hoc plerumque tam fiet magnum, vt reſiſtentia vehementer augeatur; quando enim nauis iſtiusmodi medela indiget, eo ipſo ad inclinationes perquam eſt procliuis, angulusque *m*C*p* valde magnus prouenit. Quodſi autem hae alae non ſatis altae conficiuntur, atque nauis eo vsque inclinaretur, donec altera ala tota ex aqua eſſet egreſſa, tum ceſſante incremento per alam acquiſito ſubito nauis penitus ſubuerteretur. Tab. XI. fig. 2.

§. 282. Poſſunt vero hae alae nauibus ita applicari, vt iis nec reſiſtentia augeatur nec motus nauis impediatur, id quod fiet, ſi eae naui poſt maximam latitudinem EF verſus puppim B adiungantur, ita vt ſectionis aquae pars anterior EAF maneat immutata, poſterior vero abeat in parallelogrammum rectangulum E*ef*F. Quoniam enim hoc modo EF manet latitudo maxima, et corpus verſus Tab. XI. fig. 3.

puppim adiunctam aqua non irruat, ſiquidem nauis motu directo feratur, patet reſiſtentiam alis hoc modo adiungendis non augeri. In motu vero nauis obliquo tantum abeſt, vt hae alae acceſſionem aduerſus plagam venti impediant, vt eam potius adiuuent atque declinationem a curſu directo eo minorem efficiant; quemadmodum ex libro ſuperiori abunde colligere licet, tum infra pluribus docebitur. Hancque ob cauſam iſta alarum applicatio praecedenti longe anteferenda videtur.

§. 283. Inquiramus igitur quantum incrementum ſtabilitas nauis per alas hoc modo adhibitas capiat. Ponamus igitur ſectionis aquae primitiuae AEBF momentum reſpectu axis AB eſſe $= I$, atque D denotare aream AEB ſeu ſemiſſem ſectionis primitiuae, erit vt ſupra vidimus $I = \frac{EF^2 \cdot D}{\mu}$, vbi μ denotat numerum 9 vel 10. Quoniam nunc pars anterior EAF adiectis alis manet immutata, erit eius momentum reſpectu axis $AB = \frac{EF^2 D}{2\mu}$, ſiquidem portiones EAB et EBF proxime aequales ponantur. Partis vero poſterioris, quae eſt rectangulum momentum reſpectu axis AB erit $= \frac{2}{3} CE^3 . BC = \frac{1}{12} BC . EF^3$ ex quo ſectionis aquae alis auctae momentum reſpectu axis longitudinalis AB erit $= \frac{1}{12} BC . EF^3 - \frac{D . EF^2}{2\mu}$. Quocirca ſi volumen carinae vocetur $= V$, habebitur ſtabilitatis reſpectu axis longitudinalis incrementum $= \frac{M \cdot BC \, EF^3}{12 V} - \frac{M . D \cdot EF^2}{18 V}$ poſito $\mu = 9$.

§. 284. Quoniam EF circiter per medium ſectionis aquae tranſire cenſetur, erit area $EBF = D$, quae eadem proxime aeſtimatur $\frac{2}{3} BC . EF$, ita vt ſit $BC . EF = \frac{3 D}{2}$. Si ergo hic valor ſubſtituatur prodibit ſtabilitatis incrementum

mentum $= \frac{M.EF^2}{V}\left(\frac{D}{8} - \frac{D}{18}\right) = \frac{5M.D.EF^2}{72V}$. Priſtina vero ſtabilitas ante alas has adiunctas erat $= M\left(\frac{I}{V} - OG\right) = M\left(\frac{D.EF^2}{9V} - OG\right)$: vnde ſtabilitas priſtina minor fuit quam $\frac{M.D.EF^2}{9V}$, quae nunc augmentum accipit $= \frac{5M.D.EF^2}{72V}$ quod niſi interuallum OG valde ſit exiguum, maius eſt quam ſtabilitas praecedens. Ac ſi nauis ſine alis nullam omnino habuiſſet ſtabilitatem, alis adiiciendis aequireret ſtabilitatem $= \frac{5M.D.EF^2}{72V} = \frac{5}{12}M.CD$ denotante CD profunditatem carinae, poſitoque $V = D.CD$ et $EF = CD\sqrt{6}$ quae ſane ſtabilitas ſatis foret magna.

§. 285. Tali igitur alarum applicatione videmus non ſolum ſtabilitatem nauis inſigniter augeri, vt vel in ſolo incremento acquieſcere poſſimus, ſi ante nulla omnino ſtabilitas adfuiſſet, ſed etiam incommoda, quibus praecedens alarum appoſitio erat obnoxia, hic nullum habent locum. Primo enim motus nauis directus his alis non impeditur, quia reſiſtentia prorae iis non augetur; deinde in motu obliquo his ipſis alis nauis magis apta redditur, adverſus plagam venti progrediendi, eo quod declinatio a curſu directo diminuitur. Has igitur ob cauſas iſte modus alas applicandi illi priori, qui vulgo in vſu eſſe ſolet maxime eſt anteferendus. Quicquid autem ſit, etiam talis alarum applicatio multis laborat difficultatibus; niſi enim hoc eſſet, praeſtaret naues ſtatim ab initio ita fabricaſſe, neque per vitium ad tantam perfectionem deduci conveniret.

§. 286. Tria autem potiſſimum ſunt vitia, quae iſtiusmodi alarum annexio nauibus infert; quorum primum eſt, quod hoc modo centrum grauitatis ſectionis aquae nimium verſus puppim deducitur; quod quidem eſt vi-

Digitized by Google

tium non exigui momenti, quia hoc modo centrum gravitatis ſectionis aquae de recta verticali per centrum gravitatis nauis tranſeunte remouetur. At quia ob hunc defectum oſcillationes nauis tantum magis impetuoſae redduntur, hoc vitium facile tolerari poteſt, dummodo alterum, quod in ſtabilitatis inopia verſatur, tollatur. Alterum autem vitium quod cum iſta alarum applicatione eſt coniunctum maioris eſt momenti; cum enim ob inclinationes nauis hae alae ad notabilem profunditatem porrigi debent, iis alliſio aquae ad gubernaculum vehementer impedietur. Atque tertio ob eandem rationem centrum magnitudinis carinae verſus puppim perducitur, quod centrum grauitatis ſequi debebit; quo nauibus quae vento propelluntur, ingens incommodum affertur.

§. 287. Quae cum ita ſint, eo maior opera et cura eſt adhibenda, ne naues, quando iam ſunt fabricatae, tali emendatione indigeant, quod quidem nunc perſpectis cauſis ſtabilitatem efficientibus haud difficulter praeſtabitur. Quae enim emolumenta ex correctione modo deſcripta conſequuntur, ea quatenus non aliis difficultatibus ſunt permiſta, praeſtabit ſtatim ab initio nauibus inducere, quam tum demum, cum vitium iam eſt commiſſum. In iſto autem capite ſatis oſtendimus, quomodo cum fabricatione nauium tum oneratione ſtabilitas ſatis magna poſſit obtineri; praecipuum vero momentum in conſtructione nauium eſt ſitum. Nam quantum oneratione profici poteſt, id plerumque non ſatis ad arbitrium tractari licet, ob circumſtantias externas, ad quas naues accommodatas eſſe oportet; quibus quantum ſtabilitatem augeri concedatur, iam ante proſpiciendum, ne nimis magnum ſubſidium inde expectetur.

Caput

Cap. IV.

DE MOTV NAVIVM OSCILLATORIO.

§. 288.

Omnes motus, quos nauis aquae commiſſa recipere valet, commodiſſime ad duas claſſes reuocantur, quarum prima eos complectitur motus, quibus ſtabilitas nauis reluctatur, et qui ita ſunt comparati, vt iis ſtatus nauis aequilibrii continuo perturbetur. Huiusmodi motus oſcillationum ſunt ſimiles, cum enim nauis a vi quacunque ex ſitu aequilibrii fuerit depulſa, ob ſtabilitatem ſeſe in ſitum aequilibrii reſtituere conabitur, propter motum autem conceptum in ſitu aequilibrii, quando eum attigerit acquieſcere non poterit, verum in plagam oppoſitam ex eo declinabitur, quoad motus fuerit conſumtus; atque hoc modo circa ſtatum aequilibrii eundo ac redeundo oſcillationes abſoluet. Motus vero, qui ad alteram claſſem pertinent, ſtatum aequilibrii non perturbant, ſed ſaluo ſitu aequilibrii abſoluuntur, cuiusmodi ſunt motus nauis progreſſiuus, ac rotatorius circa axem verticalem, qui vi gubernaculi produci ſolet.

§. 289. In capitibus praecedentibus naues in quiete adhuc conſtitutas conſiderauimus, ac primo quidem definiuimus, quomodo naues comparatas eſſe oporteat, vt in ſitu erecto aequilibrium teneant, tum vero quomodo efficiendum ſit docuimus, vt ſitus aequilibrii ſufficienti ſtabilitate ſimul ſit praeditus: atque in vtroque negotio expo-

Digitized by Google

ſuimus, quomodo tam conſtructio nauium quam oneratio dirigi debeant, vt his requiſitis maxime ſatisfiat. Nunc igitur pergimus ad naues in motu poſitas conſiderandas, inueſtigaturi, quales regulae inde cum ad conſtructionem tum ad onerationem conſequantur, vt naues ad motum recipiendum maxime idoneae reddantur. Cum enim hoc libro in formam nauium perfectiſſimam inquiramus, ſingulos ſtatus, quibus naues exponi ſolent, ordine percurrere, regulasque perſcrutari conuenit, quibus obſeruatis nauis in quolibet ſtatu ſecundum intentionem atque ad vſum maxime accommodate verſetur.

§. 290. In praeſenti igitur capite motum nauium oſcillatorium examini ſubiicere conſtituimus, eo quod is ſine potentiis ſollicitantibus, de quibus demum poſtea tractabitur, cognoſci queat. A quacunque enim cauſa nauis ex ſitu ſuo aequilibrii depellitur, vi ſua propria ſe reſtituere conabitur oſcillationesque peraget, ex quo praecipua oſcillationum cauſa in vi nauium propria non externa eſt ſita. Contra autem res ſe habet in motibus alterius claſſis, qui ſine potentiis ſollicitantibus externis nec perſeuerare nec commode pertractari poſſunt, quamobrem eos motus poſtea euoluemus. Circa motum igitur nauium oſcillatorium hoc praecipue requiri ſolet, vt is ſit maxime tranquillus, qui enim ſibi ideam nauis omnibus numeris abſolutae fingit, huius proprietatis non obliuiſcetur, vt oſcillationes minime ſint impetuoſae, ſed quantum fieri poteſt tranquillae. Cui quidem requiſito ſatisfieri palam eſt, ſi oſcillationes reddantur maxime tardae, perſpicuum enim eſt, quo oſcillationes ſint tardiores, eo minus eas fore vehementes atque tales quales a perfecta naui requiruntur.

§. 291.

§ 291 Cum autem naues duplici modo ex ſitu aequilibrii depelli queant, altero ſcilicet ſi nauis vel magis vel minus aquae immergitur, quam ſitus aequilibrii poſtulat, altero vero ſi nauis circa axem quempiam horizontalem inclinetur, duo quoque genera oſcillationum omnis nauis recipiet. Oſcillationes nimium primi generis orientur, ſi nauis ex aqua attollatur vel deorſum deprimatur; hinc enim nauis alternatim in aqua deſcendet et aſcendet, donec omnis motus fuerit conſumtus, hasque oſcillationes vocabimus verticales. Alterius vero generis oſcillationes oriuntur, ſi nauis vi quacunque circa axem horizontalem fuerit inclinata, tum enim nauis ob ſtabilitatem, quae eſt vis ſeſe in aequilibrium reſtituendi, motu pariter oſcillatorio agitabitur, donec tandem in ſitu aequilibrii acquieſcat. Hae ergo oſcillationes fient circa axem aliquem horizontalem, eumque vel fixum vel variabilem, prout inclinatio eſt facta, priori caſu oſcillationes exiſtunt ſatis regulares, poſteriori vero confuſae, quemadmodum haec fuſius in ſuperiori libro ſunt expoſita.

§. 292. Oſcillationes has tam verticales, quam eas, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, hic vehementer exiguas et quaſi infinite paruas contemplabimur. Nam vti in omni oſcillationum genere, ita etiam in hoc oſcillationes maiores plerumque fiunt admodum irregulares, neque inter ſe iſochronae deprehenduntur, cum contra minimae oſcillationes non ſolum conſtantiorem legem ſequantur, ſed etiam multo facilius definiri queant. Ad noſtrum praeterea inſtitutum ſufficit oſcillationes tantum minimas conſiderare, quodſi enim hae fuerint factae tardiſſimae ſeu maxime tranquillae, nullum eſt dubium, quin etiam oſcillationes

tiones maiores futurae ſint minime impetuoſae. Poſitis igitur oſcillationibus infinite paruis, ſectio aquae neque quantitate neque figura mutabitur, ex quo tam calculus oſcillationumque dimenſio facilior euadet, quam ipſae oſcillationes ſimpliciorem magisque vniformem legem ſequentur; quod fieri non poſſet, ſi variabilitas ſectionis aquae in computum duci deberet.

§. 293. Quemadmodum autem ad aequilibrium conſtituendum duae res requiruntur, primum nempe tantum nauis volumen aquae ſubmerſum, cuius ſi ex aqua conſtaret, pondus aequale eſſet ponderi nauis; ac deinde vt centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis partis ſubmerſae vtrumque in eadem linea recta verticali ſit poſitum: ita etiam dum nauis oſcillationibus peragendis in ſtatum aequilibrii tandem peruenit, vel quantitas voluminis ſubmerſi tantum mutatur, vel poſitio rectae lineae centra grauitatis ac magnitudinis iungentis, vel vtrumque. Oſcillationes illas, quibus alterutrum tantum mutatur, vocabimus puras, illas autem quibus vtrumque mutatur mixtas. Ita oſcillationes verticales erunt purae, quando inter oſcillandum tantum mox maius mox minus volumen aquae immergitur, perpetuo autem recta iungens centra grauitatis et magnitudinis manet verticalis. Similique modo oſcillationes alterius generis erunt purae, ſi continuo aeque magnum nauis volumen in aqua verſatur, ſolaque recta iungens centra grauitatis ac magnitudinis ſitum ſuum permutat.

§. 294. Ponamus iam, vt initium ab oſcillationibus verticalibus faciamus, nauem aquae vel profundius immergi, vel ex aqua extrahi, ita tamen vt ſectio aquae de nouo

orta

Digitized by Google

orta priori ſit parallela; niſi enim nauis tali motu ex ſtatu aequilibrii deturbetur, oſcillationes verticales oriri non poterunt. Quodſi autem nauis motu verticali vel magis vel minus immergatur, quam ad aequilibrium requiritur, tum ob volumen aequilibrio non conueniens aquae ſubmerſum orientur quidem oſcillationes verticales; at ſi ſimul voluminis aquae ſubmerſi centrum magnitudinis extra rectam verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem excedat, tum etiam nauis circa axem quendam horizontalem inclinabitur ſimulque oſcillationes alterius generis conficiet. Cum igitur tali duplici motu oſcillatorio tranquillitas nauis vehementer deſtruatur, nauem perfectam ita comparatam eſſe oportebit, vt vtriusque generis oſcillationes puras abſoluere queat.

§. 295. Quodſi enim neque oſcillationes verticales perfici queant, quin ſimul oſcillationes circa axem horizontalem eueniant, nec hae ſine illis exiſtere poſſint, quaelibet cauſa nauem ex ſitu aequilibrii declinans duplicem motum oſcillatorium producet; ex quo motus parum tranquillus naſcitur. Neque vero tantum ob motum duplicem oſcillationes magis fiunt violentae, ſed quod praecipuum eſt inaequalitas temporum oſcillationum, qua fit, vt motus vtriusque generis modo magis modo minus conſpirent, motum maxime perturbatum atque impetuoſum producit. Quamobrem hoc tanquam praecipuum huius capitis requiſitum eſt ſtabiliendum, quo nauis ita fabricatas eſſe oportet, vt ad ambo oſcillationum genera ſeorſim ſuſcipienda ſint aptae: hocque requiſitum obtinetur ſi centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali fuerit ſitum, in qua cum centrum grauitatis nauis tum cen-

Digitized by Google

centrum magnitudinis carinae iacent, quam proprietatem nauibus iam ſupra cap. II. induximus.

§ 296. Perſpicuum autem eſt, ſi nauis motu verticali aquae vel magis immergatur, vel ex aqua aliquantillum extrahatur, centrum magnitudinis partis ſubmerſae in recta verticali per centrum grauitatis totius nauis tranſeunte non manere, niſi centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta ſit poſitum. Hanc itaque ob rem in conſtructione nauium haec regula minime eſt negligenda, quae poſtulat, vt centrum grauitatis ſectionis aquae, centrum grauitatis nauis, et centrum magnitudinis carinae in vna eademque recta verticali contineantur. Quemadmodum autem huic requiſito per nauium figuram ſatisfieri queat iam ſupra in capite ſecundo fuſius expoſuimus, vbi omnes ſpecies, ad quas nauium figurae reduci queant, euoluimus. Eo maioris vero momenti eſt hoc requiſitum, quod ſine eo non ſolum oſcillationes verticales purae exiſtere nequeant, ſed etiam oſcillationes, quae fiunt circa axem aliquem horizontalem.

§. 297. Haec vero regula eatenus tantum eſt obſeruanda, quatenus aliis regulis maioris momenti non aduerſatur. Quoniam enim haec regula ex tranquillitate motus oſcillatorii originem traxit, facile intelligitur, eam poſt poni debere aliis regulis, quae vel ex ſtabilitate, vel curſus celeritate, vel diminutione declinationis a curſu directo conſequuntur. Ante omnia enim incolumitas nauis maxime eſt ſpectanda, atque efficiendum vt nauis tuto ac ſine periculo in vndis verſari queat; tum ſequitur curſus nauis, vt is quantum fieri poteſt celer reddatur, atque ſi nauis vento propellatur, aduerſus plagam venti maxime dirigi

poſſit.

Digitized by Google

poſſit. His nimirum primariis requiſitis cum fuerit ſatisfactum, videndum eſt, quantum reliquis, quae incolumitatem et curſus celeritatem minus reſpiciunt, ſed commoditatis gratia deſiderantur, ſatisfieri queat. Neque enim conueniret requiſita maioris momenti in gratiam aliorum, quae non abſolute ſunt neceſſaria, negligi.

§. 298. Repraeſentet igitur figura AEDFB nauem aquae in aequilibrio inſidentem, cuius ſectio aquae EF ita ſit comparata; vt eius centrum grauitatis C in illa ipſa recta verticali CD ſit poſitum, in qua cum centrum grauitatis nauis tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt conſtitutum. Immergatur iam haec nauis motu verticali aquae profundius, vt abeat in ſitum *aedfb*, in quo etiamnum recta iungens centra grauitatis nauis et magnitudinis partis ſubmerſae E*d*F erit verticalis. In hunc ergo ſitum peruenit nauis deſcendendo per ſpatium C*c*, ex hocque ſitu in ſtatum aequilibrii reuertetur aſcendendo per idem ſpatium C*c*. Quoniam enim in hoc ſitu *aedfb* centra grauitatis et magnitudinis in recta verticali ſunt conſtituta, aliam vim nauis non patietur ab aqua, niſi qua verticaliter ſurſum in ſitum aequilibrii pellatur. Quia vero oſcillationes tantum infinite paruas contemplamur, omnes ſectiones aquae, quas nauis durante motu per ſpatium C*c* ſucceſſiue induet, inter ſe aequales erunt. Tab. XI. fig. 4.

§. 299. Ponamus totius nauis pondus $= M$, volumen partis ſubmerſae, cum tenet ſitum aequilibrii, EDF $= V$, amplitudinem ſectionis aquae ſeu aream eius $= 2D$, et ſpatium $Cc = x$, quo nauis aquae profundius eſt immerſa. Hoc igitur ſitu *aedfb* aquae ſubmerſa eſt nauis volumen $= V + 2Dx$, maius, quam ſtatus aequilibrii

V 2 requi-

requirit, ex quo vis aquae nauem ſurſum vrgens erit $= M + \frac{2MDx}{V}$. Cum igitur nauis proprio pondere deorſum nitatur vi $= M$, nunc actu ſurſum ſollicitabitur vi $= \frac{2MDx}{V}$; quae ergo vis proportionalis eſt ſpatio x, quod naui eſt abſoluendum, donec ſitum aequilibrii attingat. Ex quo intelligitur, oſcillationes, quas nauis aſcendendo ac descendendo alternatim perficiet, inter ſe eſſe iſochronas. Quodſi nunc ponamus longitudinem penduli ſimplicis iſochroni eſſe $= L$, debebit ſollicitatio qua nauis in ſitu *adb* conſtituta ſurſum vrgetur eſſe $= \frac{Mx}{L}$, quae cum ſit $= \frac{2MDx}{V}$ erit $L = \frac{V}{2D}$. Longitudo igitur penduli iſochroni aequalis eſt altitudini cylindri, cuius baſis eſt ſectio aquae, et ſoliditas aequalis volumini partis aquae ſubmerſae in ſtatu aequilibrii.

§. 300. Tempus igitur quo nauis huiusmodi oſcillationes abſoluens ex ſitu imo ad ſummum vel contra pertingit aequale erit tempori vnius oſcillationis ſeu itus reditusue penduli ſimplicis, cuius longitudo eſt $= \frac{V}{2D}$. Cum ergo in omni naui proxime ſoleat eſſe $V = D.CD$ vti ſupra animaduertimus, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{CD}{2}$, ex quo ſemiſſis profunditatis CD ad quam nauis aquae immergitur proxime dabit longitudinem penduli iſochroni: ſi quidem carina deorſum ita conuergat, vt volumen ipſius aequale ſit cylindro cuius baſis eſt ſectio aquae et altitudo ſemiſſis profunditatis CD, vt ſere fieri ſolet. Quare cum naues ad ſummum immergi ſoleant aquae ad profunditatem circiter 24 pedum, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni 12 pedum, hincque maxime naues ſuas oſcillationes verticales abſoluent binis prope-

mo-

Digitized by Google

modum minutis ſecundis. Diuerſarum vero nauium tempora oſcillationum verticalium tenebunt rationem ſubduplicatam profunditatum, ad quas naues aquae immerguntur.

§. 301. Si oſcillationes has quam tardiſſimas efficere velimus, quantitatem $\frac{V}{2D}$ maximam reddi oporteret. Quoniam autem volumen carinae V per pondus nauis, quod datum eſſe ponitur, determinatur, idque propterea immutari nequit, ſectionem aquae 2D minimam fieri oporteret. Quoniam autem ſtabilitas nauium requirit, vt ſectio aquae quam fiat ampliſſima, tarditas oſcillationum verticalium obtineri non poterit, niſi ſtabilitas diminuatur. Neque vero ſtabilitati parum detraxiſſe ſufficeret ad oſcillationes tardiores reddendas, ſed ſi eas vel vno minuto ſecundo lentiores reddere vellemus, ſtabilitas omnino euaneſceret, ſitusque aequilibrii labilis fieret. Quamobrem minime erit conſultum harum oſcillationum verticalium rationem tantum habere in conſtructione nauium, ſed potius praeſtabit eas maxime celeres admittere, vt ſtabilitas eo maior efficiatur. Accedit ad hoc, quod hae oſcillationes parum durent, moxque euaneſcant, ob ingentem reſiſtentiam quam nauis in deſcenſu offendit; ex quo celeritas harum oſcillationum ne in conſiderationem quidem duci meretur.

§. 302. Huius de oſcillationibus nauium verticalibus tractationis, quae in libro primo erat praetermiſſa, commonefactus ſum a Viro Celeb. Ioh. Bernoulli, cum ipſi meditationes meas de oſcillationibus, quae circa axem horizontalem fiunt, et quae in nauigatione maxime ſunt ſpectandae, perſcripſiſſem. Arbitratur autem Vir Celeb. harum oſcillationum verticalium inſignem vſum eſſe poſſe

ad pondera nauium per experientiam inueſtiganda. Quodſi enim cognita ſit area ſectionis aquae, quam poſuimus $= 2D$, atque nauis ad oſcillationes huiusmodi verticales perficiendas impellatur, obſeruari debet duratio harum oſcillatiorum, ex iisque longitudo penduli ſimplicis iſochroni definiri; quae ſi reperta fuerit $= L$, erit volumen carinae $V = 2DL$, ex quo ſimul pondus nauis M innoteſcit. Verum iſta ponderis nauis determinatio non ſatis exacta videtur, primo quod ſectionis aquae centrum grauitatis in ipſa illa recta verticali centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae iungente ſitum aſſumitur; deinde quod hae oſcillationes non tam diu durant, vt longitudo penduli ſimplicis iſochronii ſatis exquiſite definiri poſſit.

§. 303. Quanquam iſta penduli ſimplicis iſochroni determinatio tantum ad oſcillationes minimas atque adeo infinite paruas ſpectare videtur, tamen etiam pro maioribus oſcillationibus valere poteſt, ſi quidem circumſtantiae hypotheſibus aſſumtis non aduerſentur. Poſuimus enim inter oſcillandum ſemper aeque magnam nauis ſectionem horizontalem in ſuperficie aquae eſſe poſitam, quodſi igitur idem in oſcillationibus maioribus eueniat, eae oſcillationes eandem tenebunt legem, minimisque erunt iſochronae. Haec autem proprietas locum habebit, ſi nauis circa ſectionem aquae per ſatis notabile interuallum tam ſupra quam infra eam fuerit cylindriforme, ſeu omnes ſectiones horizontales per hoc interuallum habeat inter ſe aequales, hoc enim ſi acciderit, oſcillationes etiam maiores erunt iſochronae, dummodo inter oſcillandum portio nauis in hoc interuallo contenta perpetuo in ſuperficie aquae verſetur. Pro oſcillationibus autem verticalibus corporum

porum omnino cylindricorum iſta regula ſine vlla exceptione valebit.

§. 304. Expoſitis oſcillationibus nauium verticalibus peruenimus ad alterum oſcillationum genus, quae circa axem aliquem horizontalem abſoluuntur; in quibus iterum diſcrimen ante omnia obſeruari meretur, vtrum eae ſint purae an oſcillationibus verticalibus contaminatae. Purae ſcilicet erunt iſtiusmodi oſcillationes, quando inter oſcillandum centrum grauitatis nauis immotum perſiſtit, hoc eſt neque aſcendit neque deſcendit, contra vero oſcillationes erunt impurae, ſeu oſcillationibus verticalibus mixtae, ſi inter oſcillandum centrum grauitatis nauis vel aſcendat vel deſcendat. Hoc enim caſu ab alia vi diuerſa centrum grauitatis in ſitum debitum redigetur, ab alia autem conuerſio circa axem horizontalem producetur, ex quo motus orietur mixtus ex oſcillatorio verticali, et oſcillatorio circa axem horizontalem; atque hinc motus ex vtroque compoſitus eo magis erit irregularis et ſuccuſſionibus referṫus, quo magis ambo illi motus oſcillatorii a ſe inuicem diſcrepabunt.

§. 305. Diſcrimen autem horum duorum oſcillationum generum non ſolum in ipſa motus diuerſitate eſt poſitum, ſed etiam vires, quibus eae oſcillationes producuntur maxime inter ſe differunt. Cum enim nauis ex ſitu aequilibrii deturbatur, reſtitutio oritur a duabus viribus, quarum altera eſt ipſum nauis pondus cuius directio deorſum tendit ac per centrum grauitatis nauis tranſit, altera vero ex preſſione aquae reſultat, verticaliter ſurſum eſt directa, atque per centrum magnitudinis partis ſubmerſae tranſit. Niſi igitur hae duae vires ſe mutuo deſtruant, id quod

quod in ſtatu aequilibrii accidit, vel eae inter ſe erunt inaequales vel tantum directiones non in eandem rectam incident, vel vtrumque. Ex inaequalitate virium iſtarum oriuntur oſcillationes verticales purae, ſi quidem directiones incidant in eandem rectam; ſin autem vires fuerint quidem aequales, at directiones diſcrepent, orientur oſcillationes circa axem quempiam horizontalem purae. At ſi nec vires fuerint aequales, nec directiones coincidant, tum oſcillationes orientur mixtae ex verticalibus, atque alteris, quae circa axem quendam horizontalem perficiuntur.

§. 306. Quoniam igitur ad eas oſcillationes, quae circa axem horizontalem fiunt, puras producendas requiritur, vt centrum grauitatis quieſcat, vel ſaltem a ſuperficie aquae aequaliter maneat remotum, axis ille horizontalis, circa quem oſcillationes peraguntur, per ipſum centrum grauitatis tranſire debebit. Hoc vero etiam natura motus poſtulat; omnes enim vires, quae corpori cuipiam motum gyratorium imprimere valent, id circa axem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertunt; vti in libro praecedente cumulate eſt oſtenſum. Vt igitur iſtae oſcillationes purae exiſtant, neceſſe eſt, vt, dum nauis aliquantillum circa axem horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem conuertitur, volumen nauis, quod in aqua verſatur neque maius fiat neque minus, quam erat in ſtatu aequilibrii. Si enim vel maius volumen nauis vel minus durante conuerſione aquam ſubiret, tum aequalitas inter pondus nauis et vim ex preſſionibus aquae reſultantem ceſſaret, atque oſcillationes ſimul verticales orirentur.

§. 307.

§. 307. Dum autem nauis circa axem quemcunque horizontalem per centrum grauitatis tranſeuntem aliquantillum conuertitur ſeu infinite parum (hic enim tantum oſcillationes infinite paruas conſideramus) volumen perpetuo nauis aequale in aqua verſabitur, ſi centrum grauitatis ſectionis aquae centro grauitatis verticaliter immineat. Quamobrem ſi ſitus nauis aequilibrii ita fuerit comparatus, vt recta verticalis, in qua cum centrum grauitatis nauis, tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae eſt ſitum, ſimul per centrum grauitatis ſectionis aquae tranſeat, tum nauis apta erit ad oſcillationes circa axem horizontalem puras ſuſcipiendas. Supra autem vidimus eandem hanc proprietatem requiri ad oſcillationes verticales puras producendas: ex quo haec proprietas eo maiori curā nauibus induci debebit. Atque hanc ob rem in capite ſecundo circa inuentionem figurarum idonearum, ad quas carinae nauium formentur, in hoc praecipue ſumus occupati, vt centrum grauitatis ſectionis aquae verticaliter immineat centro magnitudinis carinae; huiusque praecepti vſus in hoc potiſſimum conſtat, vt oſcillationes nauium maxime tranquillae reddantur.

§. 308. Quodſi igitur naui eiusmodi figura tribuatur, vt in ſtatu aequilibrii centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem incidat, in qua poſita ſunt centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis carinae, tum nauis non ſolum apta erit ad oſcillationes verticales puras abſoluendas, ſed etiam ad oſcillationes circa axem quemcunque horizontalem puras peragendas. Sin autem centrum grauitatis ſectionis aquae extra rectam illam verticalem cadat, tum nauis neutrius generis oſcil-

lationes ſuſcipere poterit, quin ſimul alterius generis oſcillationes ſint permixtae. Nauis ſcilicet, a quacunque vi ex ſtatu aequilibrii declinetur, duplicem ſtatim motum oſcillatorium recipiet, alterum verticalem, alterum circa axem quempiam horizontalem, neque vllo modo effici poterit, vt alterius tantum generis oſcillationes puras perficiat.

§. 309. Vtilitas autem huius requiſiti, quo volumus, vt centrum grauitatis ſectionis aquae verticaliter immineat cum centro grauitatis nauis, tum centro magnitudinis partis ſubmerſae, per ſe quidem ſatis perſpicua, cum eo naues ad oſcillationes vtriusque generis puras abſoluendas accommodentur, quo ipſo motus oſcillatorius magis erit tranquillus minusque turbulentus. Magis vero vtilitas elucebit, ſi conſideremus oſcillationes verticales per breue admodum tempus durare, alteras vero, quia reſiſtentia minus obeſt, diutius manere. Quodſi igitur oſcillationes verticales purae effici nequeant, eae non ſolum magis erunt impetuoſae quam purae, ſed etiam diutius durabunt, ob oſcillationes horizontales cum iis permixtas. Deinde oſcillationes circa axem horizontalem frequentiſſime occurrunt ab appulſu vndarum ad latera nauis; ex quo ſi eae ſemper coniunctae eſſent cum oſcillationibus verticalibus, multo violentioribus ſuccuſſionibus nauis perpetuo foret expoſita. Has igitur ob rationes iure nobis poſtulare videmur, vt ſectionis aquae centrum grauitatis in eam ipſam rectam verticalem, in qua poſita ſunt centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae, incidat.

§. 310. Aſſumamus igitur naues ita fabricatas vti capite ſecundo expoſuimus, atque oſcillationes quae oriuntur

Digitized by Google

tur a vi quacunque horizontali, qua centrum grauitatis nauis neque attollitur nec deprimitur, fient circa axem horizontalem, eruntque purae, neque aſcenſu deſcenſiue centri grauitatis perturbatae. Huiusmodi ergo oſcillationibus durantibus centrum grauitatis nauis vel penitus quieſcet vel mouebitur ſecundum directionem horizontalem vniformiter in directum. In ſuperiori enim libro oſtendimus huiusmodi motus gyratorios in quolibet corpore perinde ſe habere, ſiue corporis centrum grauitatis quieſcat, ſiue progrediatur vniformiter in directum. Quocirca ad oſcillationes nauium definiendas non habemus neceſſe ad motum eius progreſſiuum attendere, ſed vtcunque nauis motu progreſſiuo feratur, poterimus tuto centrum grauitatis tanquam quieſcens conſiderare.

§. 311. Conſtituto igitur nauis centro grauitatis in quiete oſcillationes perficientur circa axem quendam horizontalem per ipſum centrum grauitatis tranſeuntem. Quare cum iſtiusmodi axes horizontales numero infiniti per centrum grauitatis nauis duci queant, innumerabiles orientur ſpecies huius oſcillationum generis. Supra vero in praecedente libro oſtendimus harum oſcillationum alias eſſe regulares alias irregulares; regulares ſcilicet appellamus eas, quae quamdiu durant, circa eundem axem fixum et immobilem abſoluuntur; irregulares vero, in quibus axis ipſe circa quem motus fit, perpetuo permutatur, ita vt initium cuiusque oſcillationis circa alium inſtituatur axem, medium circa alium, finisque circa alium. Harum idcirco oſcillationum irregularium determinatio maxime eſt difficilis, ob ipſius axis mutabilitatem, eamque propterea nequidem ſuſcepimus; verum tamen eae; ſi oſcillationes

regulares fuerint cognitae, ſatis prope ex iſtis colligi poterunt.

§. 312. In omni autem naui duae dantur ſpecies oſcillationum regularium, quarum altera axem habet longitudinalem per centrum grauitatis nauis a puppi ad proram porrectum; altera vero circa axem latitudinalem per centrum grauitatis nauis pariter ductum abſoluitur: haeque binae oſcillationum ſpecies, quia in nauibus maxime conſpiciuntur, prae reliquis imprimis conſiderari merentur. Oſcillationes igitur, quae circa axem longitudinalem abſoluuntur ita ſunt comparatae, vt quieſcentibus prora et puppi latera nauis alternatim eleuentur atque deprimantur; hicque oſcillatorius motus a Gallis *le Roulis* appellari ſolet. In altera vero oſcillationum ſpecie, circa axem latitudinalem fixum facta, alterno motu prora ac puppis eleuantur et deprimuntur, hicque motus Gallis voce *le Tangage* inſignitur. Vtriusque autem motus oſcillatorii cognitio in nauigatione maximi momenti eſſe iure cenſetur.

§. 313. Antequam autem vtrumque hunc motum oſcillatorium ſeorſim fuſius proſequamur quid vtrique commune ſit videamus. Ac primum quidem ſe offert iſochronismus vtriusque harum oſcillationum ſpeciei, quo oſcillationes minimae inſtar penduli aequalibus temporibus abſoluuntur. Non quidem oſcillationes, quae circa axem longitudinalem fiunt, et eae, quae circa axem latitudinalem peraguntur, aequalibus temporibus abſoluuntur, ſed in eadem naui oſcillationes omnes circa axem longitudinalem inter ſe ſunt iſochronae, dummodo ſint minimae, etſi inter ſe ſint inaequales. Pari modo oſcillationes circa axem latitudinalem minimae inter ſe ſunt iſochronae. Ac

prae-

Digitized by Google

praeterea eadem proprietas competit in oſcillationes irregulares quae circa alios axes mutabiles perficiuntur, quanquam iſtae oſcillationes ob axem mutabilem non facile diſtincte obſeruari poſſunt.

§. 314. Deinde vtriusque ſpeciei oſcillationes ſimili modo definiuntur; cum enim ſint iſochronae motus earum commodiſſime cognoſcetur, ſi longitudo penduli ſimplicis aſſignetur, quod ſuas oſcillationes aequalibus temporibus abſoluat. Longitudo autem penduli ſimplicis iſochroni pro vtraque oſcillationum ſpecie ſimiliter inuenitur. Scilicet ad oſcillationes circa axem longitudinalem determinandas, totius nauis momentum reſpectu huius axis quaeri oportet, quod per ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem axis longitudinalis diuiſum praebebit longitudinem penduli ſimplicis iſochroni. Pari modo ſi momentum nauis reſpectu axis latitudinalis per centrum grauitatis ducti diuidatur per ſtabilitatem nauis reſpectu eiusdem axis latitudinalis, prodibit longitudo penduli ſimplicis, cuius motus oſcillatorius congruet, cum oſcillationibus nauis, quae circa axem latitudinalem peraguntur.

§. 315. Vt igitur motum oſcillatorium, qui fit ad latera nauis circa axem longitudinalem per centrum grauitatis nauis tranſeuntem definiamus, ante omnia ſtabilitatem nauis reſpectu axis longitudinalis noſſe oportebit: quae cum ſit productum ex pondere nauis M in rectam quampiam lineam quae ſit $= f$, erit ea $= Mf$. Deinde momentum totius nauis reſpectu eiusdem axis longitudinalis obtinebit, ſi ſingulae nauis particulae multiplicentur per quadrata diſtantiarum ſuarum ab illo axe longitudinali atque omnia haec producta in vnam ſummam colligantur:

ex quo momentum totius nauis erit productum ex tota nauis pondere M in quadratum rectae cuiusdam lineae, quae ſit $= g$, ideoque $= Mg^2$. Ex his longitudo penduli ſimplicis iſochroni oſcillationibus, quae fiunt circa axem longitudinalem erit $= \frac{g^2}{f}$.

§. 316. Quodſi ergo ſtabilitas nauis reſpectu huius axis longitudinalis fuerit nulla, ſeu $f = o$, oſcillationes erunt infinite lentae, hoc eſt nullae, id quod ipſa ſtabilitatis natura declarat. Namque ſi nauis nullam habeat ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis atque aliquantillum ad alterutrum latus inclinetur, nulla fiet reſtitutio, hincque nullus motus oſcillatorius, quod ipſum longitudo penduli ſimplicis infinete magna indicat. Quo maior autem fuerit ſtabilitas nauis, eo minus prodit pendulum iſochronum, ex quo aucta ſtabilitate oſcillationes celeriores euadunt, ſi quidem momentum totius nauis Mg^2 maneat idem. Quanquam autem oſcillationes lentae celerioribus anteferendae ſunt, tamen ideo ſtabilitatem nauis diminui non conuenit; ſtabilitas enim eſt requiſitum nauis eſſentiale, ſine quo ſubſiſtere omnino nequit, et hanc ob rem minime eſt conſultum ſtabilitatem imminuere, vt oſcillationes tantum tardiores obtineantur.

§. 317. Stabilitate autem nauis illaeſa oſcillationes tardiores effici poſſunt, ſi longitudo rectae g ſeu momentum totius nauis reſpectu axis longitudinalis augeatur. Pendet vero haec quantitas g plurimum ab oneratione nauis, cum Mg^2 ſit ſumma omnium productorum, quae oriuntur ſi ſingula ponduscula ex quibus nauis conſtat, per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe longitudinali multiplicentur. Quamobrem oſcillationes tardiores reddentur, ſi one-

ra

ra quantum fieri poteſt ab axe hoc longitudinali remoueantur. Atque hinc noua naſcitur regula pro oneratione nauium, quam obſeruare eatenus iuuabit, quatenus cum aliis regulis conſiſtere poteſt. Minime enim conduceret alias regulas in gratiam huius infringere, cum haec tantum commoditatem nauigationis habeat propoſitam.

§. 318. Praeterea autem vſus, cui nauis deſtinatur, ac reliquae regulae, ſecundum quas onerationem dirigi oportet, parum admodum quantitatem g augeri permittunt. Quodſi enim omnia onera per interuallum vnius pedis ab axe longitudinali magis remoueantur, atque adeo quantitas g vno pede maior reddatur, id quod tamen ne in maximis quidem nauibus praeſtari queat, tamen vix ſenſibilis retardatio oſcillationum exinde orivetur, ſaltem non tanta, ob quam mereantur tot translocationes ſuſcipi. Sunt enim manente ſtabilitate oſcillationum tempora vt interualla g, quare ſi iam ante fuerit g aliquot pedum, atque remotione onerum g augeatur vnitate, oſcillationes tardiores fierent ſui parte $\frac{1}{g}$, quae retardatio in vaſtis nauibus, vbi g complures pedes denotat non eſt ſenſibilis, in minoribus autem augmentum vnius pedis obtineri nequit.

§. 319. Haec omnia, quae circa oſcillationes laterares ad axem longitudinalem relatas notauimus, valent quoque pro oſcillationibus, quae circa axem latitudinalem peraguntur, neque idcirco pro his oſcillationibus easdem animaduerſiones repeti neceſſe eſt. Quodſi enim ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis ponatur $= Mb$, ac momentum nauis reſpectu axis eiusdem latitudinalis per centrum grauitatis nauis ducti ponatur $= Mk$, erit longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus hisce iſochroni $= \frac{k^2}{b}$.

Quod

Quod ergo in caſu praecedenti erat g, hic nobis eſt k, et quod ibi erat f, hic eſt b; vnde factis his ſubſtitutionibus, locoque vocis longitudinalis poſita voce latitudinalis, obſeruationes factae circa piorem oſcillationum ſpeciem traducentur ad oſcillationes, quae fiunt circa axem latitudinalem.

§. 320. Vnum tamen diſcrimen inter oſcillationes circa axem longitudinalem et latitudinalem intercedit, cuius ratio eſt habenda. Quoniam nempe omnes naues ita fabricari ſolent, vt ſi vlla ſit ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis, ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis per ſe fiat vehementer magna; quemadmodum etiam ſupra oſtendimus ſtabilitatem reſpectu axis latitudinalis multis vicibus excedere ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis ſeu quantitatem b multum excedere quantitatem f. Ob hanc igitur rationem oſcillationes circa axem latitudinalem fierent multo celeriores; at ex altera parte momentum nauis reſpectu axis latitudinalis multo fit maius quam momentum reſpectu axis longitudinalis, ob onera in puppi ac prora collocata, quae ab axe latitudinali valde diſtant, hancque ob rationem in tarditate oſcillationum per momentum compenſabitur, quod per ſtabilitatem detrahitur.

§. 321. Definiamus paulisper quantum circumſtantiarum incertitudo permittit, ipſam penduli ſimplicis iſochroni longitudinem, vt quodammodo duratio oſcillationum quae tam circa axem longitudinalem quam latitudinalem fiunt, praeter propter innoteſcat. Ac contemplemur quidem naues maximas bellicas, in quibus ſi carinae profunditas ponatur $= c$, latitudo ſolet eſſe $= \frac{5}{2} c$ et longitudo $= 10\, c$. Ex praecedente autem capite conſtat huius-

huiusmodi nauium ſtabilitatem reſpectu axis longitudiualis circiter fore $= \frac{3}{4} M c$, ſtabilitatem vero reſpectu axis latitudinalis $= 10 M c$; quarum expreſſionum illa data opera ita eſt aſſumta, vt ſit iuſto minor. Ibi enim ad ſecuritatem nauium potiſſimum reſpeximus, cum praeſtaret ſtabilitatem actu maiorem deprehendi, quam calculus ſuppeditaret. Nunc igitur, quoniam incolumitas nauium nobis non amplius eſt propoſita, quippe quae in praecedente capite iam ſatis eſt confirmata, tuto ſtabilitatem maiorem aſſumere poterimus, non tam vt veritatem propius accedamus, quam vt oſcillationes potius celeriores reperiamus quam reuera ſunt. Pariter enim expedit ſi oſcillationes actu tardiores deprehendantur, quam calculus eas oſtenderit.

§. 322. Ponamus igitur ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis eſſe $= \frac{5}{4} M c$, qui valor fere ex §. 250. prodit ſi pro v non 10 ſed 8 ponamus; ſimilique modo ſit ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $= 12 M c$, ita vt ſit $f = \frac{5}{4} c$ et $b = 12 c$. Iam ad momentum nauis reſpectu axis longitudinalis inueniendum, notandum eſt onera quae maxime ab hoc axe diſtent et ad latera nauis ſint poſita, diſtare ab hoc axe interuallo ſemilatitudinis nauis $= \frac{5}{4} c$; cum autem maxima onerum copia propius ad hunc axem ſit ſita, media quaedam diſtantia pro quantitate g debebit accipi, maior tamen quam ſemiſſis $\frac{5}{8} c$, cum ſpatia magis remota ſint ampliora, atque quadrata harum diſtantiarum capi debeant, quo fit vt maiores diſtantiae magis praeualeant minoribus; ſumamus igitur c pro hac diſtantia media, ita vt ſit $g = c$; ex quo longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus circa axem longitudinalem factis iſo-

Pars II. Y chro-

chroni erit $= 4\,c$. Quare ſi c ſit 20 pedum circiter pro maximis nauibus, oſcillationes hae abſoluentur tempore circiter 5 minutorum ſecundorum.

§. 323. Ad tempora oſcillationum, quae circa axem latitudinalem peraguntur, cognoſcenda, aeſtimandum eſt momentum nauis reſpectu axis latitudinalis. Ab hoc autem ſi omnia onera maxime eſſent remota, diſtarent interuallo ſemilongitudinis nauis, quae eſt $= 5\,c$, cuius quantitatis ob rationes modo allegatas pars ſemiſſe maior loco k ſubſtitui debet. Ponamus igitur $k = 3\,c$, eritque longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{k^2}{b} = \frac{3}{4}\,c$, quae plusquam quadruplo minor eſt, quam longitudo penduli ſimplicis pro oſcillationibus circa axem longitudinalem inventa. In nauibus itaque maximis quae habent $c = 20$ ped. oſcillationes circa axem latitudinalem circiter abſoluentur duobus minutis ſecundis. Hinc in qualibet naui, niſi eius figura maxime abhorreat a conſueta, oſcillationes circa axem latitudinalem multo erunt celeriores, quam eae quae fiunt circa axem longitudinalem.

§. 324. Expediamus hanc oſcillationum determinationem generalius, ponamusque, ſi carinae profunditas ſit $= c$, latitudinem carinae eſſe $= p\,c$ et longitudinem $= p\,q\,c$. Ponatur porro diſtantia inter centrum grauitatis nauis et centrum magnitudinis carinae $= \frac{1}{2}\,c$, ac pro numeris μ et ν ſumatur 8, erit ex §. 247. ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis $= M\,c\,(\frac{pp}{8} - \frac{1}{2})$ ac ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis $= M\,c\,(\frac{ppqq}{8} - \frac{1}{2}.)$ Deinde cum maxima onerum ab axe longitudinali diſtantia ſit $= \frac{1}{2}\,p\,c$, ſumantur huius duo trientes pro diſtantia media, ita vt ſit momentum nauis reſpectu axis longitudinalis $= \frac{1}{9}\,M\,p^2\,c^2$. Atque ſimi-

li

li ratione ponatur momentum nauis reſpectu axis latitudinalis $= \frac{1}{9} M p^2 q^2 c^2$: qui valores a veris non multum diſcrepabunt, dummodo carina deorſum conuergat, vti in calculo ſtabilitatis aſſumſimus.

§. 325. His poſitis erit pro oſcillationibus circa axem longitudinalem penduli iſochroni ſimplicis longitudo $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, pro oſcillationibus autem circa axem latitudinalem erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{8ppqqc}{9ppqq-36}$. Cum igitur ſit longitudo cuiusque nauis maior latitudine ſeu $q > 1$, erit $\frac{8ppc}{9pp-36}$ ſemper maior quam $\frac{8ppqqc}{9ppqq-36}$; exceſſus enim illius expreſſionis ſupra hanc eſt $= \frac{32ppc(qq-1)}{9(pp-4)(ppqq-4)}$. Quamobrem quo magis longitudo nauis ſuperat latitudinem, eo magis erunt celeres oſcillationes circa axem latitudinalem, ſi cum oſcillationibus circa axem longitudinalem comparentur. Vnde animaduerſio ante facta latiſſime patet, quod in omni naui oſcillationes circa axem latitudinalem celeriores ſint, quam oſcillationes circa axem longitudinalem.

§. 326. Intelligitur porro, quo maior latitudo nauis cum data carinae profunditate c coniungatur, quo pacto ſtabilitas nauis inſigniter augetur, eo celeriores fieri oſcillationes nauis. Cum enim longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus circa axem longitudinalem ſit $= \frac{8ppc}{9pp-36}$, ea fit infinita ſi capiatur $p = 2$, ſeu latitudo nauis duplo maior quam profunditas carinae c. Tribuendis vero ipſi p, continuo maioribus valoribus fit pendulum iſochronum breuius, donec tandem, ſi p infinitum ſeu ſaltem admodum magnum accipiatur, fiat longitudo penduli iſochroni $= \frac{8}{9} c$. Hoc autem facto longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus circa axem latitudinalem

fiet quoque $= \frac{8}{9} c$. Ex quo, quo maior capiatur latitudo nauis reſpectu profunditatis carinae c eo magis ambae hae oſcillationum ſpecies ad aequalitatem reducentur.

§. 327. Si plures naues diuerſae magnitudinis cum ratione conſtructionis tum onerationis inter ſe perfecte ſimiles concipiantur, ita vt p et q in omnibus eosdem valores obtineant, ſolaque profunditas carinae c diſcrepet, longitudo pendulorum oſcillationibus vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem factis iſochronorum tenebit ipſam profunditatum carinae, hoc eſt laterum homologorum rationem. Ex quo tempora oſcillationum, quas naves hae circa homologos axes conficient, erunt in ratione ſubduplicata laterum homologorum. Nauis igitur, quae quadruplo longior eſt quam alia nauis oſcillationes peraget duplo tardiores. Quodſi autem in minoribus nauibus ipſi p maior valor tribuatur, quam obtinebat in maioribus, etiam ob hanc rationem oſcillationes in nauibus minoribus euadent celeriores. Supra ſcilicet obſeruauimus, vt maiores et minores naues aequalibus inclinationibus fiant obnoxia ſtabilitatem ponderi nauis oportere eſſe proportionalem, ſeu $c\,(\frac{pp}{8} - \frac{1}{2})$ eſſe debere quantitatem conſtantem puta i; ex quo fiet $pp - 4 = \frac{8i}{c}$ et $pp = \frac{4(2i+c)}{c}$; hinc ergo prodibit longitudo penduli oſcillationibus circa axem longitudinalem iſochroni $= \frac{4(2i+c)c}{9i} = \frac{8}{9} c + \frac{4cc}{9i}$.

§. 328. Tanta oſcillationum celeritas praeſertim in minoribus nauigiis, pleriſque non parum ſuſpecta videbitur, atque adeo experientiae contraria. Quando enim cymbas aliasque minoris formae nauiculas mari vndis agitato iactari videmus, motum quidem oſcillatorium deprehendimus ingen-

ingentem ac vehementem, verum multo tardiorem quam vi theoriae noſtrae eſſe deberet. At ad ſcrupulum iſtum eximendum notari oportet agitationem iſtiusmodi nauicularum ab vndis maris prorſus eſſe diuerſam a motu oſcillatorio, quem hic definiuimus. Hic enim aſſumſimus ac ſemper ponimus ſuperficiem aquae in ſumma quiete, atque oſcillationes determinauimus, quae oriuntur ſi nauis aliquantulum inclinètur ac repentino dimittatur. Quando autem nauicula in mari vndis agitato verſatur, tum ſuperficies maris maxime eſt inaequabilis, atque oſcillationes non tam a conatu nauis ſeſe in ſtatum aequilibrii reſtituendi proficiſcuntur, quam a continua vndarum ſollicitatione, quibus eadem pars modo eleuatur modo deprimitur: quamobrem iſte motus nauium quoque a motu vndarum maxime pendebit.

§. 329. Quod autem ad motum attinet quem maris agitatio nauibus imprimit, is altioris eſt indaginis, neque etiamnunc hydroſtatica eousque eſt exculta, vt eius determinationem ſuſcipere queamus. Primum enim noſſe oportet quanta vi et in quanam directione aqua, cum eius ſuperficies non eſt ad libellam diſpoſita, corpora innatantia ſollicitet; ac deinde ipſum motum vndarum exploratum habere neceſſe eſt. Motum quidem vndarum vel inuenire liceret, vel ad arbitrium aſſumere, vt cum experientia maxime conueniat; verum aquae preſſiones, quando eius ſuperficies non eſt horizontalis, longe diuerſas leges ſequi videntur, quarum ne veſtigium quidem adhuc innotuit. Obſeruantur enim naues, quod contra omnem expectationem videatur, per vndas aſcendere motu accelerato, deſcendere vero motu retardato; atque ſi in

vaſe aqua ad marginem magis eſt eleuata quam in medio, leuia corpuſcula innatantia ſponte ad marginem accedunt, atque adeo ſurſum vrgentur; quod quam ſit paradoxon, quilibet agnoſcet, qui haec phaenomena per nota hydroſtaticae principia explicare conatus fuerit.

§. 330. Quae igitur hic de oſcillationibus expoſita ſunt, atque in hoc capite adhuc ſequentur, ea non de agitatione nauium, quae ab vndis oriri ſolet, intelligi oportet, ſed de illo motu reciproco, quem nauis quaeque in aqua maxime tranquilla recipere poteſt. Orientur autem huiusmodi oſcillationes ſi nauis a vi quacunque e ſitu aequilibri deducatur ac ſubito iterum dimittatur, tum enim ob ſtabilitatem ſeſe in ſtatum aequilibrii reſtituet quidem, ſed, quia eum cum celeritate attingit, in plagam contrariam inclinabitur, quoad impetus omnis ſit abſumtus; hincque ſimili motu redibit, atque inſtar penduli oſcillationes abſoluet. Oſcillationes vero circa axem longitudinalem conficiet, ſi initio circa eundem axem hoc eſt ad alterutrum latus inclinetur: oſcillationes autem circa axem latitudinalem producentur, ſi circa hunc axem vel verſus proram vel puppim inclinetur. Haeque oſcillationes conuenient cum theoria data, ſi modo ſectionis aquae centrum grauitatis in eam ipſam rectam verticalem incidat, in qua centra grauitatis nauis, et magnitudinis carinae ſunt poſita.

§. 331. Quodſi igitur eiusmodi oſcillationes circa axem vel longitudinalem vel latitudinalem actu efficiantur, ac longitudo penduli ſimplicis iſochroni obſeruetur, tum per experientiam cognoſcetur relatio inter ſtabilitatem nauis et momentum totius nauis reſpectu eius axis circa

quem

Digitized by Google

quem fiant oſcillationes. Si enim poſito nauis pondere $= M$, reſpectu eius axis circa quem oſcillationes abſoluuntur ſtabilitas ſit $= Mf$ et momentum $= Mg^2$; dabit longitudo penduli ſimplicis iſochroni obſeruata valorem fractionis $\frac{gg}{f}$; ita vt ſi L exprimat longitudinem penduli iſochroni futurum ſit $gg = fL$. Apparet quidem in hac expreſſione pondus nauis M non ineſſe, quia cum in momento nauis tum in ſtabilitate aequaliter inerat, verumtamen vi propria pondus M in ea latet, cum neque momentum nauis neque ſtabilitas ſine nauis pondere cognito determinari queat.

§. 332. Obſeruandis igitur huiusmodi oſcillationibus, poterit vel ex data nauis ſtabilitate eius momentum reſpectu eius axis, cuius reſpectu cum oſcillationes fiunt, tum ſtabilitas cognoſcitur, determinari vel contra ex momento hoc aliunde cognito ſtabilitas. Dabimus autem in ſequente capite methodum ſtabilitatem reſpectu cuiusuis axis per experientiam definiendi; haec ergo ſi fuerit cognita atque aequalis Mf, denotante M pondus totius nauis, ac longitudo penduli ſimplicis oſcillationibus nauis iſochroni reperta ſit $= L$; ſumi oportebit mediam proportionalem inter f et L, quae praebebit valorem ipſius g, ex qua momentum nauis innoteſcet, quippe quod eſt $= Mgg$. Vel cum ſit $gg = fL$, ſtabilitas nauis quae iam conſtat et eſt $= Mf$ multiplicetur per longitudinem penduli obſeruatam L dabitque productum MfL ipſum nauis momentum quaeſitum; ita vt hac via adhibenda nequidem opus ſit pondus nauis ſeorſim noſſe.

§. 333. Quodſi autem momentum nauis reſpectu illius axis, circa quem oſcillationes peraguntur, aliunde quocun-

cunque modo fuerit compertum atque adeo valor Mgg inuentus, non difficulter ex cognito motu oſcillatorio ſtabilitas nauis reſpectu illius axis determinabitur. Cum enim ex cognito motu oſcillatorio conſtet longitudo penduli ſimplicis iſochroni L, ſitque $gg = fL$, erit $f = \frac{gg}{L}$, et ſtabilitas nauis quaeſita $= Mf = \frac{Mgg}{L}$; vnde iſta naſcitur regula: momentum nauis iam notum diuidatur per longitudinem penduli ſimplicis L, iſochroni cum oſcillationibus nauis, et quotus reſultans praebebit ipſam nauis ſtabilitatem. Quo circa etiam haec inueſtigatio inſtitui poteſt, etiamſi pondus nauis abſolutum ignoretur.

§. 334. Summopere autem expedit nullam praeter mittere occaſionem, qua eiusmodi experimenta inſtituere licet, ex quibus vlla cognitio nauium deduci queat. Cum enim ad omnia nauium phaenomena tam intelligenda quam proſpicienda tot tamque variarum rerum ad naues pertinentium cognitio requiratur, quae a priori vel difficulter vel non ſatis acurrate cognoſci poſſunt, inſtitutio experimentorum quorumcunque hanc cognitionem magnopere promouebit ac perficiet. Sic tam oſcillationum verticalium, quam harum quae fiunt circa axem aliquem horizontalem, obſeruatio ingentem afferet vtilitatem, ex illis enim relatio inter ſectionem aquae et volumen aquae immerſum; ex his vero relatio inter momentum nauis ac ſtabilitatem definitur; quorum vtrumque notitiam nauium plurimum promouet.

§. 335. Quoniam autem ex motu oſcillatorio nauium circa axem horizontalem vel longitudinalem vel latitudinalem per obſeruationes cognito definiri poteſt ſtabilitas nauis ſi momentum nauis reſpectu eiusdem axis habeatur, non

non abs re erit exponere, quo pacto ad cognitionem momenti nauis reſpectu dati axis horizontalis peruenire queamus. Ac primum quidem praeſto eſt methodus a priori petita, qua ſingulae tam ipſius nauis particulae, quam onerum ingeſtorum multiplicantur per quadrata diſtantiarum ab axe propoſito, cunctaque haec producta in vnam ſummam colliguntur, ad quam operationem perfecta notitia cum ſtructurae totius nauis, tum rationis onerationis requiritur. Deinde vero momentum tale etiam per ſingularia experimenta poteſt determinari, quae inter notari praecipue merentur ea, quibus motus oſcillatorius nauis in libero aere ex dato axe ſuſpenſae obſeruatur; quo circa quemadmodum momentum nauis ex iſtiusmodi obſeruationibus colligi poſſit, explicabimus.

§. 336. Ponamus igitur cognitas eſſe oſcillationes, quas nauis $aCDb$ in libero aere ex axe horizontali immobili PQ ſuſpenſa abſoluat; huncque axem PQ parallelum eſſe illi axi horizontali AB per centrum grauitatis nauis G ducti, reſpectu cuius momentum nauis deſideratur. Sit nauis totius pondus $= M$, eius momentum reſpectu axis AB quod quaerimus $= Mg^2$, et diſtantia centri grauitatis nauis G ab axe PQ circa quem oſcillationes fiunt ſcilicet $OG = b$, quae diſtantia cognita ponitur. Obſeruata iam ſit longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus, quas nauis in hoc ſtatu conſtituta abſoluit, ſitque ea longitudo $= k$: quae recepto loquendi modo diſtantiam centri oſcillationis ab axe ſuſpenſionis PQ denotabit. Tab. XII. fig. 1.

§. 337. Ex principiis autem mechanicis, quibus theoria centri oſcillationis innititur, conſtat longitudinem pen-

duli ſimplicis iſochroni, quae nobis eſt $= k$ obtineri, ſi momentum corporis oſcillantis reſpectu axis ſuſpenſionis, ſeu ſumma omnium corporis particularum per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe ſuſpenſionis reſpectiue multiplicatarum diuidatur per productum totius corporis in diſtantiam centri grauitatis eius ab axe, ex quo corpus eſt ſuſpenſum: quod productum noſtro caſu ob $OG = b$ eſt $= Mb$. Quamobrem momentum totius nauis reſpectu axis PQ erit $= Mbk$; ac propterea ex obſeruato motu oſcillatorio dabitur. Quaeſtio itaque huc redit vt ex dato momento corporis cuiusque reſpectu axis cuiuscunque definiatur momentum eiusdem corporis reſpectu axis per centrum grauitatis ipſius ducti illique axi paralleli.

§. 338. In libro autem ſuperiori methodus eſt tradita, cuius ope ex dato momento corporis cuiuscunque reſpectu axis cuiuspiam per eius centrum grauitatis tranſeuntis reperiri poteſt momentum reſpectu alius cuiusuis axis illi axi paralleli; ad hoc quippe definiendum tantum opus eſt, vt ad momentum reſpectu axis per centrum grauitatis tranſeuntis addatur productum totius corporis per quadratum diſtantiae amborum memoratorum axium multiplicati. Cum igitur noſtro caſu ſit momentum nauis reſpectu axis AB, quod quidem quaerimus, $= Mgg$ erit momentum eius reſpectu axis PQ $= Mgg + Mbb$ quod cum per obſeruationes ſit inuentum $= Mbk$ erit $gg = bk - bb$ et $g = \sqrt{b(k-b)}$; innoteſcit itaque longitudo illa g, per cuius quadratum ſi multiplicetur maſſa nauis M, obtinetur momentum eius reſpectu axis AB.

§. 339. Pro corpore igitur quocunque circa axem horizontalem oſcillationes peragente methodum nacti ſumus

mus expeditam momentum illius corporis reſpectu axis illi axi paralleli ac per centrum grauitatis ducti determinandi; quae methodus regula iſta facili continetur. Maſſa ſeu pondus corporis multiplicetur primum per diſtantiam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis, hocque productum denuo multiplicetur per exceſſum longitudinis penduli ſimplicis iſochroni ſupra diſtantiam illam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis; vel quaeratur media proportionalis inter diſtantiam centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis et inter diſtantiam centri oſcillationis a centro grauitatis, quo facto productum ex maſſa corporis et quadrato mediae huius proportionalis dabit momentum corporis reſpectu axis per centrum grauitatis tranſeuntis et axi ſuſpenſionis paralleli.

§. 340. Quaecunque igitur accipiatur diſtantia axis ſuſpenſionis PQ a centro grauitatis G corporis eadem perpetuo prodibit quantitas momentum corporis reſpectu axis AB exprimens. Quodſi igitur ſucceſſiue idem corpus in variis diſtantiis ad oſcillandum ſuſpendatur erit ſemper diſtantia centri oſcillationis a centro grauitatis reciproce vt diſtantia centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis. Interim tamen ad noſtrum inſtitutum non omnino perinde eſt quanta diſtantia axis ſuſpenſionis PQ a centro grauitatis G accipiatur; ſed eam neque nimis magnam neque nimis paruam accipi conuenit. Cum enim factum $b(k-b)$ ſit conſtans, expediet diſtantiam b mediocris aſſumſiſſe quantitatis vt factores b et $k-b$ non admodum fiant diſpares, atque concluſio eo certior inde inferri queat. Hoc vero obtinebitur, ſi eiusmodi eligatur ſuſpenſio, quae oſcillationes maxime celeres producat.

§ 341. Modus quidem iſte, etſi in ſe admodum expeditus ac facilis, nullo modo ad naues praecipue maiores accommodari poteſt, ob ingens pondus et volumen quae impediunt, quo minus in libero aere ſuſpendi atque ad oſcillandum impelli queant. Verum tamen vtilitatem afferre poterit non contemnendam, ſi ad ſimilitudinem vaſtiorum nauium minora exempla ſumma diligentia conficiantur, qualia fere ſemper fabrefieri curantur. Si enim iſtae minoris moduli nauiculae ipſis nauibus omnino ſint ſimiles, experimenta quae in iis inſtituuntur ſimul proprietates maiorum declarabunt. Inſeruient itaque iſtiusmodi moduli cum ad ſectionem aquae tum ad volumen aquae ſubmerſum, tum etiam ad ſtabilitatem ac momentum reſpectu cuiusque axis determinanda, quae res in ſcientia nauali ſummam vtilitatem habebunt.

§. 342. Quodſi autem nauiculae, in qua experimentum inſtituitur, centrum grauitatis non tam accurrate fuerit exploratum, quemadmodum opus eſt, ex duplici ſuſpenſione duplicique motu oſcillatorio momentum nauiculae reſpectu axis per centrum grauitatis tranſeuntis poterit concludi etiam ignoto loco centri grauitatis. Ponamus enim in primo motu oſcillatorio repertam eſſe longitudinem penduli ſimplicis iſochroni $= k$; deinde axem ſuſpenſionis a corpore magis remoueri per interuallum $= x$, ita vt ſi priori caſu fuerit diſtantia centri grauitatis ab axe ſuſpenſionis $= b$, ea caſu altero futura ſit $= b + x$: ſit autem hoc altero caſu longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= q$: ob $b(k-b) = (b+x)(q-b-x)$ reperietur $b = \frac{x(q-x)}{q-k-2x}$ atque $gg = b(k-b) = \frac{x(k-q+x)(k+x)(q-x)}{(k-q+2x)^2}$, quae quantitas per

per pondus corporis M multiplicata dabit momentum eius quaeſitum reſpectu axis AB per centrum grauitatis G ducti et paralleli axibus binis, ex quibus erat ſuſpenſum.

§. 343. Non difficile itaque erit pro data naui momentum eius reſpectu axis cuiusuis horizontalis per experimenta definire, dummodo nauis accuratum habeatur exemplum idoneae magnitudinis fabrefactum. Non ſolum autem hoc exemplum ratione figurae et conſtructionis omnino ſimile eſſe oportet ipſi naui quam repraeſentat, ſed etiam oneratio vbique ad ſimilitudinem debet eſſe conſtituta. Primo ſcilicet non ſolum pondus nauiculae minoris ad pondus maioris triplicatam tenere debet rationem laterum homologorum, ſed etiam pondera ita debent eſſe diſpoſita vt centrum grauitatis ſimiliter ſit poſitum. Deinde etiam omnia pondera in ipſa naui eiusque exemplo cum in ſe ſpectata ſimilia eſſe debent, tum ſimiliter diſtributa, vt etiam momenta reſpectu ſimilium axium prodeant ſimilia.

§. 344. Quemadmodum autem ex momento minoris nauiculae reſpectu cuiuspiam axis determinato momentum reſpondens in naui maiori ſimili concludi debeat, ex dictis facile colligi licet. Cum enim momentum ſit productum ex pondere corporis in quadratum cuiuspiam lineae rectae, corporum ſimilium momenta ſimilia tenebunt rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quoniam autem pondera ſunt in ratione triplicata, ſi inuenta fuerit linea illa, per cuius quadratum pondus nauiculae multiplicatum praebet momentum eius reſpectu axis cuiuspiam; tum pro ipſa naui per regulam auream quaeratur ſimilis linea recta in ratione ſimplici laterum homologorum;

quae ſi fuerit inuenta, eius quadratum per pondus ipſius nauis multiplicatum dabit momentum nauis reſpectu axis in ea ſimiliter poſiti.

§. 345. Modus iſte per oſcillationes momenta corporum reſpectu cuiusuis axis per centrum grauitatis ducti explorandi, etiam adhiberi poteſt ad momenta ſuperficierum planarum in veſtiganda, atque ideo parem vtilitatem afferet ad momenta ſectionis aquae nauium cognoſcenda, quae ad ſtabilitatis cognitionem requiruntur. Ex lamina ſcilicet aequabili ac perquam tenui exſcindatur figura ſectioni aquae omnino ſimilis, eaque in ſitu verticali poſita ſuſpendatur ex axe horizontali, ita vt vel axis longitudinalis vel latitudinalis ſitum teneat horizontalem; tum lamina ad oſcillandum impellatur noteturque longitudo penduli ſimplicis iſochroni k. Quodſi nunc diſtantia centri grauitatis laminae ab axe ſuſpenſionis fuerit $= b$, erit $\sqrt{b(k-b)}$ linea illa, per cuius quadratum ſuperficies laminae multiplicari debet, vt prodeat eius ſuperficiei momentum reſpectu axis vel longitudinalis vel latitudinalis, eius videlicet qui in motu oſcillatorio ſitum horizontalem obtinuit.

§. 346. Quodſi autem pro huiusmodi lamina definita fuerit ea linea, per cuius quadratum ſuperficies laminae multiplicata praebet eius momentum reſpectu axis propoſiti, tum fiat vt longitudo illius laminae ad longitudinem ſectionis aquae, cui figura laminae ſimilis eſt ſumta, ita linea illa inuenta $\sqrt{b(k-b)}$ ad quartam. Haecque quarta linea proportionalis inuenta erit ea ipſa longitudo per cuius quadratum ſuperficies ſectionis aquae multiplicari debet, vt obtineatur eius momentum, cuius cognitio ad ſtabilitatem nauis definiendam requiritur. Manifeſtum autem eſt, vt

iſta

iſta concluſio ſit legitima, laminam primo vbique eiusdem craſſitiei atque ex materia homogenea paratam eſſe debere, deinde etiam neceſſe eſt vt lamina illa ſit tenuiſſima, ſeu vt eius craſſities prae ſuperficie euaneſcat; quemadmodum iam indicauimus.

§. 347. Ad longitudinem autem penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus iſtiusmodi experimentorum inueſtigandam, plures modi adhiberi poſſunt, quorum commodiſſimus mihi videtur, qui nititur longitudine penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis, quae etſi in variis terrae regionibus aliquantillum diſcrepat, tamen ſatis tuto his praecipue locis accipi poteſt $3166\frac{1}{4}$ part. mill. pedis Rhenani. Numerentur iam oſcillationes corporis ſuſpenſi, quae vno minuto primo abſoluuntur, ſitque eorum numerus $= n$, et longitudo penduli ſimplicis iſochroni, quae quaeritur ponatur $= k$ partium milleſimarum pedis Rhenani, erit ex natura oſcillationum $\frac{60}{n} : 1 = \sqrt{k} : \sqrt{3166\frac{1}{4}}$ hincque $k = \frac{11398500}{nn}$. Oſcillationes vero efficiendae ſunt admodum exiguae, vt arcus circulares per quos fiunt cum cycloidicis confundantur, atque oſcillationes inter ſe iſochronae obtineantur.

§. 348. His itaque continetur doctrina de oſcillationibus nauium, quas peragunt vel circa axem longitudinalem vel latitudinalem, quae duo oſcillationum genera non ſolum ſunt praecipua, quae in nauibus inueſtigari merentur, ſed ea etiam ſola ad calculum reuocari poſſunt. Quae enim oſcillationes circa alium axem horizontalem fieri concipiuntur, eae rariſſime circa axem fixum contingunt, ſed plerumque inter oſcillandum axis circa quem fiunt oſcillationes continuo mutatur. Pendet autem haec irregularitas a diffi-

a diſſimilitudine partium nauis vtrinque circa axem diſpoſitarum, qua fit vt linea recta per centra oſcillationis ambarum ſectionis aquae partium non ſit ad axem oſcillationis ſeu ei parallelum in ſectione aquae ſumtum normalis, quae conditio ad oſcillationes puras et regulares producendas abſolute eſt neceſſaria.

§. 349. Siue autem oſcillationes, quae circa alium axem horizontalem praeter longitudinalem et latitudinalem fiunt, ſint regulares ſiue irregulares, eae tamen ſatis prope ex cognitis oſcillationibus circa axem longitudinalem et latitudinalem factis concludi poterunt, medium ſcilicet aliquod inter has tenebunt. Facile namque ex forma nauium colligere licet alteras harum oſcillationum fore celerrimas alteras tardiſſimas. Quicquid autem ſit, ſi quis voluerit oſcillationes iſtas irregulares circa axem quemcunque horizontalem obliquum eodem modo; quo regulares, definire, is quidem a veritate non multum aberrabit. Oportebit autem pro tali axe obliquo tam ſtabilitatem nauis reſpectu iſtius axis, quam momentum cognitum eſſe; atque momentum per ſtabilitatem diuiſum dabit longitudinem penduli ſimplicis, cuius oſcillationes cum oſcillationibus nauis proxime congruent.

§. 350. Quemadmodum autem ad ſtabilitatem reſpectu axis obliqui definiendam, calculo particulari opus non eſt, ſed ea ex cognitis ſtabilitatibus reſpectu axium longitudinalis et latitudinalis facile colligi poteſt; ita etiam momentorum ratio eſt comparata. Namque ſi cognita fuerint momenta nauis reſpectu axis cum longitudinalis tum latitudinalis, ex iis momentum reſpectu alius cuiusuis axis horizontalis per centrum grauitatis tranſeuntis definiri poteſt.

Quod

Quod vt appareat, ſit G centrum grauitatis nauis, AB axis longitudinalis et CD latitudinalis, quorum reſpectu momenta ponuntur cognita. Sit vero EF axis obliquus in plano horizontali ACBD aſſumtus reſpectu cuius momentum quaeritur. Sumatur nauis particula quaecunque M, ex qua primum in planum horizontale perpendiculum ML demittatur atque ex L in axes perpendicula LP, LQ et LR.

§. 351. Momentum igitur nauis reſpectu axis EF quaeſitum erit $= \int M . MR^2 = \int M . ML^2 + \int M . LR^2$. Sit ſinus anguli AGE $= m$, coſinus $= n$, erit $LO = \frac{LP}{n}$, Tab. XII. fig. 2. $PO = \frac{m LP}{n}$, $GO = PG - \frac{m . LP}{n}$, et $OR = m PG - \frac{mm . LP}{n}$; vnde $LR = m PG + n . LP$. Hinc erit momentum reſpectu axis $EF = \int M . ML^2 + m^2 \int M . PG^2 + 2 m n \int M . PG . LP + n^2 \int M . LP^2$, in qua expreſſione ob nauem circa axem AB vtrinque ſimilem terminus $\int M . PG . LP$ euaneſcet. Cum igitur ſit momentum reſpectu axis longitudinalis AB, quod ſit $R = \int M . ML^2 + \int M . LP^2$, et momentum reſpectu axis latitudinalis CD quod ſit $S = \int M . ML^2 + \int M . PG^2$, erit momentum reſpectu axis obliqui $EF = m^2 S + n^2 R$ ob $mm + nn = 1$. Ex quo ſine peculiari ſiue calculo ſiue experimento momentum nauis reſpectu axis cuiusuis obliqui horizontalis expedite poterit determinari, ex datis momentis reſpectu axium longitunalis atque latitudinalis.

§. 352. Poſuimus in iſta de oſcillationibus nauium tractatione perpetuo centrum grauitatis ſectionis aquae in eadem recta verticali eſſe ſitum, quae tranſit per centrum grauitatis totius nauis ſimul ac per centrum magnitudinis carinae: hancque hypotheſin ideo aſſumſimus, quod cum

ea ad oſcillationes maxime tranquillas reddendas requiratur, tum vero oſcillationes tam verticales quam horizontales ſeu circa axem horizontalem motu angulari factas puras, et vniformes atque in ſuo genere iſochronas producat. Quodſi autem aliae nauium conditiones non permittant, vt ſectionis aquae centrum grauitatis verticaliter immineat centro magnitudinis carinae, atque ad eas conditiones magis reſpiciendum ſit, quam ad tranquillitatem oſcillationum oſcillationes neque verticales neque horizontales purae exiſtere poterunt, ſed alterum genus perpetuo cum altero erit permixtum, ſi quidem axis horizontalis per centrum grauitatis ductus, circa quem oſcillationes fiunt, cum centro grauitatis ſectionis aquae non fuerit in plano verticali conſtitutus.

§. 353 Quando autem centrum grauitatis ſectionis aquae non in rectam verticalem per centrum grauitatis nauis ductam cadit, id erit vel magis verſus proram vel verſus puppim promotum. Vtroque tamen caſu neceſſe eſt, vt id ſit poſitum in interſectione plani diametralis et ſectionis aquae; quoniam ſectio aquae vtrinque circa hanc interſectionem ex duabus partibus ſimilibus et aequalibus conſtat. Quamobrem axis longitudinalis etiam ſublata hypotheſi prius aſſumta, cum centro grauitatis ſectionis aquae tamen in plano verticali erit ſitum. Ex quo manifeſtum eſt hoc quoque caſu oſcillationes circa axem longitudinalem factas eſſe puras futuras, ita vt hoc oſcillationum genus etiamnum peculiarem tractationem non requirat.

§. 354. Aliter autem res ſe habet in oſcillationibus, quae fuerit circa axem latitudinalem: eo quod centrum

grani-

Digitized by Google

grauitatis ſectionis aquae non poſitum erit in plano verticali, in quo axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis ductus collocatur. Hinc enim fit, vt inter oſcillandum vel volumen modo maius modo minus aquae immergatur, ſi centrum grauitatis in quiete permaneat, vel centrum grauitatis nauis aſcendat deſcendatue ſi perpetuo aequale volumen aquae immerſum maneat. Non poterunt igitur hoc caſu oſcillationes circa axem latitudinalem fieri quin ſimul centrum grauitatis nauis vel aſcendat vel deſcendat; atque id circo nauis circa axem latitudinalem oſcillationes puras abſoluere non poterit, ſed eae ſemper neceſſario oſcillationibus verticalibus erunt inquinatae, ex quo confuſum et difforme oſcillationum genus naſcetur.

§. 355. Vt hoc clarius percipiatur, ſit ADB ſectio nauis verticalis a prora A ad puppim B facta et nauem vtrinque in duas partes ſimiles et aequales diuidens: ſit praeterea ADB portio huius ſectionis ſub aqua verſans, dum nauis in aequilibrio eſt conſtituta; eruntque centrum grauitatis nauis G et centrum magnitudinis carinae O cum in plano huius ſectionis tum in eadem recta verticali CD poſita. Porro erit recta AB axis longitudinalis ſectionis aquae eiusque diameter, ex quo ſectionis aquae centrum grauitatis I in hac ipſa recta AB ſitum erit: quodſi incideret in punctum C oſcillationes forent eiusmodi, vti ante definiuimus, atque oſcillationes tam verticales quam horizontales fierent purae. Pro praeſenti inſtituto igitur punctum I a puncto C remotum aſſumimus. Tab. XII. fig. 3.

§. 356. Quando nunc nauis haec ex ſitu aequilibrii ad oſcillationes circa axem latitudinalem peragendas inclinatur, ſectio diametralis ADB manebit quidem verticalis, verum

alia prodibit ſectio aquae, cuius pariter diameter exiſtet in interſectione eius cum plano verticali ADB. Sit igitur in ſitu hoc inclinato recta ab diameter ſectionis aquae, ſecans ſuperiorem diametrum AB in puncto V, atque ponatur interuallum $CV = x$. Angulus vero $AVa = BVb$ ſit quam minimus $= dw$, qui erit angulus inclinationis nauis de ſitu aequilibrii. Quantitas igitur ſectionis aquae in vtroque ſitu ad ſenſum non mutabitur, ſed aream habebit eandem, quae ponatur $= 2D$. Poſitio haec latiſſime patet, atque omnes declinationes de ſitu aequilibrii, ex quibus oſcillationes circa axem latitudinalem oriri queant, in ſe complectitur.

§. 357. Vt nunc in motum oſcillatorium inquiramus, qui ex hac declinatione ex ſitu aequilibrii oriri debet, ponamus pondus totius nauis $= M$, volumen carinae ſeu partis aquae ſubmerſae, dum nauis in aequilibrio verſatur $= V$: et vti interuallum $CV = x$ poſitum eſt, ſit interuallum $CI = c$. Diſtantia centrorum grauitatis nauis et magnitudinis carinae $GO = b$, vbi ponimus centrum grauitatis G ſupra centrum magnitudinis O cadere: ita vt, ſi contrarium eueniat, littera b negatiuum valorem induat. Idem de litteris c et x eſt intelligendum, quae affirmatiuum valorem retinent, ſi punctum I puppi B propius eſt puncto C, punctumque V prorae propius quam C. Quodſi autem haec puncta aliter fuerint diſpoſita, tum in mutatione ſignorum omnis variatio poterit comprehendi.

§. 358. In ſitu igitur hoc inclinato erit ab in ſectione aquae, ideoque horizontalis, et partis nunc aquae immerſae planum diametrale erit aDb. Quantum autem futurum ſit volumen partis ſubmerſae, ex eo colligi poterit, quod,

Digitized by Google

quod, ſi recta ab per punctum I tranſiret, volumen aequale foret volumini in ſitu aequilibrii V. Quare hoc caſu volumen aquae ſubmerſum maius eſt quam V, hocque excedit ſpatio, quod comprehenditur inter ſectionem aquae ab et ſectionem ipſi parallelam per I ductam, quarum diſtantia erit $Ii = (c+x)dw$. Cum autem mutatio quam minima ponatur, ſectio aquae ab aequalis cenſeri poteſt ſectioni aquae naturali $= 2D$, et hanc obrem volumen nunc aquae ſubmerſum erit $= V + 2D(c+x)dw$.

§. 359. Cum autem vis nauem ſurſum pellens ſit vt volumen aquae ſubmerſum, hoc ſtatu; vis navem ſurſum vrgens maior eſt quam pondus nauis M quo deorſum nititur: atque exceſſus ſe habebit ad $2D(c+x)dw$ vt M ad V. Ergo Centrum grauitatis nauis hoc ſtatu actu ſurſum ſollicitabitur vi $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$ exceſſu ſcilicet vis ex preſſionibus aquae ortae ſupra ipſius nauis pondus. Aſcendere igitur debebit centrum grauitatis nauis G, quod nunc infra aquae ſuperficiem ſubmerſum eſt ad profunditatem Gg, ducta Gg perpendiculari ad ab. Ob angulum autem cGg infinite paruum dw erit $Gg = Gc = GC + xdw$. Hoc igitur ſitu inclinato centrum grauitatis G profundius eſt ſitum, quam in ſitu aequilibrii, idque internallo $Cc = x\,dw$. ſi quidem x valorem affirmatiuum obtineat, qualem figura repraeſentat.

§ 360. Quando ergo punctum V extra puncta C et I vti in figura cadit, vis ex preſſione aquae orta tendet ad centrum grauitatis G in altitudinem naturalem conſtituendum. Nam ſi V extra C et I verſus proram ſit poſitum, centrum grauitatis G profundius ſtat in inclinatione quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam vis praeſto eſt

id ſurſum ſollicitans. Sin autem punctum V extra puncta C et I verſus puppim eſſet ſitum, tum centrum grauitatis G in ſtatu inclinato magis foret eleuatum quam in ſtatu aequilibrii, ſimul vero etiam pondus nauis preſſioni aquae praeualeret, atque centrum grauitatis G magis immergeret; ſi quidem angulus inclinationis $d\omega$ ſit affirmatiuus, hoc eſt ſi inclinatio ita fiat, vt prora magis immergatur quam puppis. In inclinatione enim contraria omnia contra ſe habebunt, ob $d\omega$ negatiuum.

§. 361. His igitur duobus caſibus vires nauem ſollicitantes tendent, ad nauem ex ſitu inclinato in ſitum aquilibrii reſtituendam, ſi quidem nauis in hoc ſitu aequilibrii habeat ſtabilitatem. Vtrum autem vno motu continuo, hoc eſt dum angulus $d\omega$ omnino euaneſcit, nauis in ſitum aequilibrii reſtituatur an minus, poſtea indagabimus. Hic vero prius nobis ſpectandus eſt caſus, quo punctum V intra puncta C et I cadit; qui hoc habet ſingulare, quod vis quidem adſit centrum grauitatis G ſurſum vrgens, cum tamen in ſitu inclinato hoc centrum grauitatis iam altius ſit poſitum quam in ſitu aequilibrii. Hoc ergo caſu vires non ſolum non reſtitutionem in ſitum aequilibrii promovebunt, ſed adeo magis perturbabunt; centrum enim grauitatis iam nimis eleuatum etiam magis eleuabunt, ex quo motus vehementer irregularis exiſtat, neceſſe eſt.

§. 362. Quare cum res ita ſe habeat, ſi punctum V intra puncta C et I cadat, concludendum eſt, oſcillationes non ſubito regulares et vniformes generari poſſe, quam primum V extra C et I cadat, ſed difformitatem tantum continuo magis decreſcere. Difformitas autem in omni caſu eo maior erit, quo maius fuerit intervallum

Digitized by Google

vallum inter puncta C et I. Nam ſi haec puncta coincidant et ſit $c = o$; tum vis centrum grauitatis eleuans erit $= \frac{2MDxdw}{V}$ et idem centrum grauitatis G magis erit depreſſum quam in ſitu aequilibrii interuallo xdw. Cum igitur hoc caſu vis vrgens proportionalis ſit ipſi interuallo, quo centrum grauitatis a ſuo ſitu naturali eſt remotum, hoc caſu vniformitas motus oſcillatorii non turbabitur. Manifeſtum autem eſt, quo maius ſit interuallum e, eo minus vim illam ſpatio xdw fore proportionalem, ex quo vniformitas eo magis tolletur.

§. 363. Vt nunc in motum, qui ex actione virium nauem in ſitu hoc inclinato ſollicitantium inquiramus, ante omnia idem, quod de omni motu corporum extenſorum, eſt notandum: ſeorſim ſcilicet inueſtigandus eſt motus centri grauitatis, atque motus rotatorius circa centrum grauitatis. Quod primum ad motum centri grauitatis G attinet, id verticaliter ſurſum vrgebitur noſtro caſu a vi motrice $= \frac{2MD(c+x)dw}{V}$, quoniam autem in centro grauitatis collectum concipi debet integrum nauis pondus M, vis acceleratrix centri grauitatis erit $= \frac{2D(c+x)dw}{V}$. Pari igitur modo centrum grauitatis primo motus momento verſus ſuum ſitum naturalem impelletur, quo pendulum longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$, quod a ſitu quietis per interuallum xdw eſt deductum.

§. 364. Ad motum gyratorium circa centrum grauitatis definiendum, determinari oportet momentum virium ſollicitantium reſpectu horizontalis per centrum grauitatis G ductum et ad planum ADB normalem, quoniam ex nauium forma certum eſt, motum gyratorium circa hunc nullum

nullumque alium axem oriri debere. Oritur autem hoc momentum a ſolis aquae preſſionibus, quae ita concipi poſſunt, quaſi ſingulis particulis voluminis ſubmerſi eſſent inſitae iis ipſis proportionales, atque verticaliter ſurſum vrgeant. Volumen autem in ſitu inclinato aquae ſubmerſum aDb in tres partes diſcerpi poteſt; primum ſcilicet in partem ADB cuius volumen poſitum eſt $= V$, tum in partem inter angulum BVb contentam; ac tertio in partem intra angulum AVa comprehenſam, ita vt totum volumen aquae ſubmerſum ſit $= V + BVb - AVa$, quarum partium ſi vniuscuiusque momentum fuerit determinatum, ſimul totius voluminis aquae ſubmerſi momentum habebitur.

§. 365. Contemplemur primum partem V, cuius cum ſit centrum grauitatis in O, ex ea naſcetur vis nauem ſurſum pellens in directione verticali Oo, atque haec vis ipſi nauis ponderi M aequalis erit. Haec autem vis non tendet ad reſtitutionem in ſtatum aequilibrii, ſed contra nitetur, eritque eius momentum propterea negatiuum $= M . og = M b d w$. ob $Go = b$. Quare ſi momentum ad reſtitutionem producendam determinare velimus ex parte voluminis aquae ſubmerſi V naſcetur momentum $= -M b d w$: quod ad nauem ſubuertendam tendet, ſi quidem centrum grauitatis nauis G ſupra O cadat; et hanc obrem, niſi momenta ex reliquis partibus oriunda fiant affirmatiua, ac ſimul maiora quam $M b d w$, nulla omnino reſtitutio nauis in ſitum aequilibrii fieret, quemadmodum ſupra de ſtabilitate eſt oſtenſum.

§. 366. Vt momenta, quae ex partibus intra angulos BVb et AVa comprehenſis naſcuntur, inueſtigemus, ſit

ſit portionis intra angulum BVb contentae volumen $= P$ et huius centrum grauitatis ſeu magnitudinis ſitum in P, cuius diſtantia ab V ſit $Vp = p$. Ex hac ergo portione vis naſcitur $= \frac{MP}{V}$ et nauem ſurſum pellit in directione Pp; quae vis ideo ad nauis reſtitutionem tendet. Huius autem vis momentum reſpectu axis horizontalis per G ducti erit $= \frac{MP}{V}.pg$; at eſt $pg = Vp - Vg = Vp - VC = p - x$, ex quo momentum huius vis ad reſtitutionem tendens erit $= \frac{MP}{V}(p-x)$. Sit porro portionis intra alterum angulum AVa contentae volumen $= Q$, eiusque centrum grauitatis in Q exiſtente $Vq = q$. Ex hac portione igitur vis oritur $= \frac{MQ}{V}$ nauem in directione qQ ſurſum vrgens, quae ideo reſtitutioni in ſitum aequilibrii renitetur. Momentum ergo erit $= -\frac{MQ}{V}.gq = -\frac{MQ}{V}(q+x)$.

§. 367. Cum igitur volumen in ſitu inclinato aquae ſubmerſum totum ſit $= V + BVb - AVa$; erit momentum ex hoc volumine natum ad nauem reſtituendam $= -Mbdw + \frac{MP}{V}(p-x) + \frac{MQ}{V}(q+x) = -Mbdw + \frac{M}{V}(Pp + Qq - Px + Qx)$. In hac autem expreſſione denotat Pp momentum portionis intra angulum BVb contentae reſpectu axis horizontalis per punctum V ducti et normalis ad planum ADB; ſimilique modo Qq exhibet momentum portionis intra angulum AVa contentae reſpectu eiusdem axis horizontalis per V ducti. Denique P et Q ſunt volumina ipſa nauis intra angulos BVb et AVa contenta.

§. 368. Repraeſentet nunc AEBFA ipſam ſectionem aquae, cuius diameter AB congruat cum recta AB in praecedente figura, ſitque I centrum grauitatis huius ſectionis aquae et PVQ ille axis horizontalis, qui vtrique Tab. XII. fig. 4.

ſectioni aquae cum in ſitu aequilibrii tum in ſitu inclinato eſt communis. Nunc concipiatur haec ſectio circa axem PQ, aliquantulum conuerti ad angulum dw, vt oriantur illa ſpatia P et Q intra angulos ad PQ contenta: atque diametro AB parallela conſideretur recta quaecunque XRY, cuius pars RY verticaliter producta generet triangulum
fig. 5. YRy elementare voluminis P. Area autem huius trianguli erit $= \frac{1}{2} RY^2 . dw$, ex quo erit $P =$ ſummae omnium $\frac{1}{2} RY^2 dw = \frac{1}{2} dw \int RY^2$ ſimilique modo erit ex altera parte $Q = \frac{1}{2} dw \int RX^2$. ideoque $P - Q = \frac{1}{2} dw \int (RY^2 - RX^2)$.

fig. 4. §. 369. Sit nunc per centrum grauitatis I ſectionis aquae ducta recta EF parallela ipſi PQ, erit ex natura centri grauitatis $\int sY^2 = \int sX^2$. Cum igitur ſit $RY = SY + VI$ et $RX = SX - VI$, erit $RY^2 - RX^2 = SY^2 - SX^2 + 2 VI . XY$ atque $\int (RY^2 - RX^2) = \int sY^2 - \int sX^2 + 2 VI . \int XY = 2 VI . \int XY$, ob $\int sY^2 - \int sX^2 = 0$. Dat autem $\int XY$ aream totius ſectionis aquae quae poſita eſt $= 2D$, et eſt $VI = c + x$, vnde erit $P - Q = \frac{1}{2} dw . 2 (c+x) . 2D = 2D(c+x) dw$. Quare pro formula ſuperiore erit $- Px + Qx = - 2D(c+x) x dw = - 2D dw (cx + xx)$, vnde iam litterae P et Q ante tantum aſſumtae ex calculo exterminabuntur, ſupereſt igitur vt valorem $Pp + Qq$ determinemus.

§. 370. Cum ſit Pp momentum ponderis voluminis
fig. 5. aquei intra angulum BVb, et Qq momentum ponderis aquae intra angulum AVa contenti reſpectu axis PQ, elementum ipſius Pp reperietur ex angulari ſectione YRy, ſit enim $RM = z$, $MN = dz$, ob angulum $YRy = dw$ erit $Mm = z dw$, et particula $MNnm = z dz dw$. Huius
fig. 4. igitur momentum reſpectu axis PQ erit $= zz dz dw = dw . zzdz$.

$zzdz$. At eſt $zzdz$ productum ex particula quacunque ſectionis aquae ipſius in quadratum diſtantiae ſuae ab axe PQ multiplicatum, ideoque momentum quaſi materiae elementare ſectionis aquae reſpectu axis PQ. Quare cum ſit $Pp = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$, in parte PBQ et $Qq = dw$. *ſummam omnium* $zzdz$ in parte PAQ, erit $Pp + Qq = dwx$ *momentum ſectionis aquae reſpectu axis* PQ, cuiusmodi momenta ſectionis aquae iam ſupra ſumus contemplati.

§. 371. Conſiderauimus autem ante momentum ſectionis aquae reſpectu axis horizontalis per eius centrum grauitatis I ducti; quamobrem etiam hic concipiamus axem EF per I ductum et ipſi PQ parallelum, ſitque momentum ſectionis aquae reſpectu huius axis $EF = 2D.ff$, eſt enim perpetuo momentum cuiusque ſiue corporis ſiue ſuperficiei aequale producto ex quadrato alicuius lineae rectae in corporis vel maſſam, vel in ſuperficiei aream. Deinde etiam demonſtrauimus ſi habeatur momentum alicuius figurae reſpectu axis per eius centrum grauitatis tranſeuntis quemadmodum inde momentum reſpectu cuiusuis alius axis illi paralleli definiri debeat. Scilicet regulam ibi traditam ſequentes reperiemus momentum huius ſectionis aquae reſpectu axis $PQ = 2D.ff + 2D.VI^2 = 2Dff + 2D(c+x)^2$, vnde erit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$.

§. 372. Cum nunc ſit $Pp + Qq = 2Ddw(ff + cc + 2cx + xx)$ et $-Px + Qx = -2Ddw(cx + xx)$ erit $Pp + Qq - Px + Qx = 2Ddw(ff + cc + cx)$. Tab. XII. fig. 3.
Atque hanc obrem momentum quod ex preſſione aquae oritur ad conuertendam nauem circa axem horizontalem

per centrum grauitatis G ductum atque ad planum ADB normalem erit $= Mdw\,(-b + \frac{2D(ff+cc+cx)}{V})$ huiusque effectus tendet ad reſtitutionem nauis in ſitum aequilibrii. Atque ex hac expreſſione ſimul intelligitur, vtrum nauis eo modo, quo poſuimus, ex ſitu aequilibrii declinata ſeſe reſtituere conetur an ſecus. Nimirum nauis ſe reſtituet ſi fuerit $\frac{2D(ff+cc+cx)}{V} > b$. Quodſi autem ſit VI $= 0$, qui eſt caſus ſupra in ſtabilitatis indagatione pertractatus, reſtitutio ſequetur ſi fuerit $\frac{2Dff}{V} > b$.

§. 373. Cum igitur nauis circa axem latitudinalem ſtabilitate praedita ponatur, erit $\frac{2Dff}{V} > b$. Quamobrem ſi inclinatio fiat circa axem PQ vt hic poſuimus, vis reſtituens maior erit, quam vis reſtituens inclinatione circa axem EF facta, atque exceſſus illius vis ſuper hanc erit $= \frac{2DMdw}{V}(cc+cx) = \frac{2DMdw}{V}$, VI.CI, ſi quidem haec expreſſio fuerit affirmatiua. Ex quo perſpicuum eſt, ſi punctum V ad alteram partem punctorum C et I nempe inter I et puppim cadat, tum hanc expreſſionem fieri negatiuam, atque vim reſtituentem minorem eſſe futuram, quam ſi inclinatio circa axem EF eſſet facta; quin etiam valor ipſius x tantopere in negatiuum excreſcere poterit, vt vis reſtituens, quatenus ea in motu rotatorio producendo conſiſtit, fiat negatiua atque inclinationem adeo augeat.

§. 374. Quamuis autem hoc caſu, quo x tantum valorem negatiuum induit, vt etiam $c + x$ fiat negatiuum ſatis ingens, inclinatio de ſitu aequilibrii augeatur, tamen ſubuerſio nauis non ſubſequetur, dummodo habeat ſtabilitatem. Tum enim centrum grauitatis magis erit eleua-

eleuatum quam in ſitu aequilibrii, ſimul vero altera vis ſuperius determinata, id deprimet, atque in ſtatum naturalem reducet. Quamobrem inclinatio primo tantum momento aliquantulum augebitur, mox vero cum centrum grauitatis propius fuerit ad ſuum ſitum naturalem reductum, motus eueniet fere congruus cum eo, quem ſupra in motu reſtitutionis in ſtatum aequilibrii definiuimus, atque ideo deinceps inclinatio diminui incipiet. Interim tamen hoc certo ſequitur, motum oriturum eſſe perquam difformem, atque a motu oſcillatorio vniformi alieniſſimum.

§. 375. Conſideremus autem caſum, quem figura repraeſentat, quo momentum preſſionum aquae ad inclinationem minuendam atque ad reſtitutionem tendit; motumque inueſtigemus quo haec reſtitutio ſaltem incipiet. Ad hoc ponatur momentum materiae totius nauis reſpectu axis horizontalis per centrum grauitatis ducti, circa quem fiet reſtitutio $= Mk^2$. Atque hinc initium motus reſtitutionis ſimile erit motui reſtitutionis penduli ſimplicis cuius longitudo eſt $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Ac penduli tantae longitudinis oſcillationibus iſochronae forent oſcillationes nauis circa axem horizontalem latitudinalem, ſi modo hae oſcillationes eſſent vniformes, neque a motu centri grauitatis turbarentur.

§. 376. Ex his intelligitur, motum nauis poſt inclinationem factam oriundum eo magis fore irregularem ac perturbatum, quo magis primi motus tum centri grauitatis, tum rotationis circa axem latitudinalem a ſe inuicem diſcrepent. At ſupra inuenimus motum centri gravitatis initio conuenire cum motu penduli ſimplicis longitudinis $\frac{Vx}{2D(c+x)}$ (§. 363), hic vero eſt oſtenſum motum

rotationis ipſo initio conuenire cum motu penduli, cuius longitudo ſit $= \frac{Vkk}{2D(ff+cc+cx)-Vb}$. Quo maior itaque fuerit differentia inter has expreſſiones eo maior difformitas inerit in motu nauis. Contra autem perſpicuum eſt, ſi hae duae longitudines fuerint inter ſe aequales, tum oſcillationes vtriusque generis conſentire, atque id circo fore regulares neutrasque ab alteris turbari.

§ 377. Dabitur igitur caſus, quo ex facta inclinatione nauis motum oſcillatorium vniformem ac regularem recipiet, id quod eueniet ſi punctum V ſeu interuallum CV $= x$ ita fuerit conſtitutum vt fiat $\frac{Vx}{2D(c+x)} = \frac{Vkk}{2D(ff+cx+cx)-Vb}$. Quare ſi ex hac aequatione definiatur valor ipſius x, prodibit ille inclinationis caſus, ex qua nauis motum oſcillatorium vniformem conſequetur. Iſte autem caſus latius patebit, nam cum omne corpus, quod initio motu maxime irregulari mouetur, mox vniformitatem affectet, eiusque motus tandem ſeſe ad motum oſcillatorium ſimplicem pendulorum ſimilem componat; per hanc inueſtigationem ille innoteſcet motus, quem nauis, quantumuis irregulari motu principio circa axem latitudinalem moueri inceperit, tandem aſſequetur; ita vt omnes motus oſcillatorii maxime irregulares tamen in hunc motum oſcillatorium regularem tandem abire debeant.

§. 378. Longitudo igitur penduli iſochroni cum motu oſcillatorio regulari, quem nauis tandem recipiet, erit $= \frac{Vx}{2D(c+x)}$, ſi ipſi x valor tribuatur, quem obtinet in hac aequatione: $2Dkkc + 2Dkkx = 2Dffx + 2Dccx + 2Dcxx - Vbx$ quae reducitur ad hanc $xx = \frac{2x(Dkk - Dff - Dcc + \frac{1}{2}Vb) + 2Dkkc}{2Dc}$ Ponatur breuitatis gratia $Dff +$

$Dcc -$

$Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$, eſt enim ob ſtabilitatem $Dff > \frac{1}{2}Vb$, hincque multo magis $Dff + Dcc > \frac{1}{2}Vb$, eritque $xx = \frac{x(kk-pp)}{c} + kk$; vnde elicitur $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp V(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc})$. Cum igitur x duplicem habeat valorem, oſcillationes duplici modo tandem regulares euadere poterunt; vterque enim valor ſemper eſt realis. Hoc autem valore ſubſtituto prodit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk-pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)}{2cc + kk - pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)} = \frac{V}{2D} \cdot \frac{2kk}{kk + pp \mp V(4cckk + (kk-pp)^2)}$.

§. 379. Vt hi duo caſus quibus oſcillationes obtingunt vniformes, melius percipiantur, ponamus primum eſſe $CI = c = o$, quo caſu iam nouimus oſcillationes tam verticales, quam horizontales eſſe regulares. Fiet autem $pp = ff - \frac{Vb}{2D}$: et $V(kk + \frac{(kk-pp)^2}{4cc}) = \frac{kk-pp}{2c} + \frac{ckk}{kk-pp}$, vnde $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{kk-pp}{2c}$ ob $c = o$. Ergo fit vel $x = o$ vel $x = \infty$. Priori caſu oſcillationes ſolae prodeunt horizontales, quarum longitudo penduli ſimplicis iſochroni eſt $= \frac{V}{2D} \cdot \frac{kk}{pp} = \frac{Vkk}{2Dff - Vb}$, poſteriori oſcillationes ſolae verticales efficientur reſpondentes pendulo $= \frac{V}{2D}$, quos ambo caſus iam ante tractauimus.

§. 380. Ponamus eſſe $p = k$ ſeu $kk = ff + cc \frac{Vb}{2D}$, quae poſitio in nauium figuras cadere poteſt, erit $x = \mp k$. Altero caſu quo eſt $x = CV = +k$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(c+k)}$, altero caſu vero quo eſt $CV = -k$ fiet longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{Vk}{2D(k-c)}$. Ad ſimilitudinem ergo talis penduli oſcillationes oriri poterunt ſi fuerit $k > c$ hoc eſt $p > c$. Quoties autem nauis habet ſtabilitatem ſimul erit $p > c$; nam propter ſtabilitatem cum ſit $Dff > \frac{1}{2}Vb$, erit in hac aequatione $Dff + Dcc - \frac{1}{2}Vb = Dpp$ etiam $p > c$. Quando autem

eſt

eſt $p > c$ neutro caſu longitudo penduli inuenta vnquam negatiua eſſe poteſt, ac propterea duobus ſemper caſibus oſcillationes vniformes et tautochronae oriri poterunt.

§. 381. Si interuallum $CI = c$ fuerit valde paruum, ſimul vero $(kk-pp)^2$ quantitas ſatis ingens vt prae ea terminus $4cckk$ ſit perquam exiguus, erit $\sqrt{(4cckk + (kk-pp)^2)} = kk - pp + \frac{2cckk}{kk-pp}$ proxime; vnde erit $x = \frac{kk-pp}{2c} \mp \frac{(kk-pp)}{2c} \mp \frac{ckk}{kk-pp}$. Longitudo autem penduli ſimplicis iſochroni erit, ſi ſignum $+$ locum habeat $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{1}{1 + \frac{cc}{kk-pp}} = \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk-pp}{cc+kk-pp}$, in his autem oſcillationibus verticales plurimum praeualebunt, motusque circa axem horizontalem vix erit ſenſibilis. Valente autem ſigno $-$ erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{v}{2D} \cdot \frac{kk}{pp - \frac{cckk}{kk-pp}}$; in hocque oſcillationum genere oſcillationes verticales fere erunt nullae.

§. 382. Quomodo autem cunque nauis initio inclinetur ex ſitu aequilibrii, et quantumuis irregularis motus inde oriatur, tamen ipſum motum, qui ſequetur per principia ante ſtabilita determinare licebit dummodo inclinatio de ſtatu aequilibrii fuerit minima. Ponamus enim nauem principio ita declinatam eſſe, vt centrum grauitatis interuallo r magis fuerit depreſſum quam in ſtatu aequilibrii, atque vt tota nauis motu angulari ex ſitu aequilibrii declinata ſit angulo $= s$. Tum vero motum eſſe ſubſecutum, hocque durante depreſſionem centri grauitatis infra ſitum naturalem eſſe adhuc $= y$, et ſitum nauis praeſentem a ſitu aequilibrii differre angulo $= w$. motum vero in hoc ſtatu ita eſſe comparatum, vt celeritas, qua centrum gra-

Digitized by Google

grauitatis in ſitum naturalem procedit, ſit debita altitudini v, celeritatem angularem autem circa axem horizontalem per centrum grauitatis G ductum tantam eſſe, vt in diſtantia k ab hoc axe debita ſit altitudini u.

§. 383. Repraeſentet autem figura eum nauis ſtatum, quem hic durante motu conſideramus, erit nobis w quod ante fuerat $= dw$, atque cum ſit $y = xdw$, hic nobis eſt $\frac{y}{w}$, quod ante fuerat x. Iam tempuſculo minimo dt centrum grauitatis aſcendendo progrediatur per interuallum $= -dy$, quo progreſſu altitudo celeritati debita v augmentum accipiat dv; eodem vero tempuſculo dt motu angulari nauis conuertatur per anguli elementum $-dw$, quia ad ſtatum aequilibrii accedit, et altitudo celeritati angulari, quae in diſtantia k viget, debita u augmentum capiat $= du$. Cum igitur elementa dy et du aequali tempuſculo dt conficiantur, erit ex natura motus $dt = -\frac{dy}{\surd v} = -\frac{kdw}{\surd u}$ vnde erit $dy : dw = k\surd v : \surd u$.

§. 384. Quodſi nunc vtramque ſollicitationem contemplemur, qua tam aſcenſus centri grauitatis acceleratur, quam motus rotatorius incitatur, reperiemus binas ſequentes aequationes.

I. $dv = -dy \cdot \frac{2D}{V}(cw + y)$

II. $du = -wdw(\frac{2D}{V}(cc + ff) - b) - dw \cdot \frac{2D}{V} cy$

Ponatur breuitatis gratia $\frac{2D}{V} = 2m$ et $\frac{2D}{V}(cc + ff) - b = 2nk^2$ atque habebuntur ſequentes aequationes

I. $dv = -2mcwdy - 2mydy$

II. $du = -2mcydw - 2nk^2wdw$

quae inuicem additae ſummam producunt integrabilem; erit ſcilicet

$$v + u = C - 2mcwy - my^2 - nk^2 w^2$$

Cum autem ipſo motus initio, quo erit $y = r$ et $w = s$, ſit $v = 0$ et $u = 0$ erit

$$v + u = 2mcrs + mr^2 + nk^2 - 2mcwy - my^2 - nk^2 w^2.$$

§. 385. Quoniam autem elementa dy et dw eodem tempore abſoluuntur, erit $dy = \frac{kdw\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $dw = \frac{dy\sqrt{u}}{k\sqrt{v}}$; vterque valor ſubſtituatur in illis aequationibus differentialibus, eritque

I. $\frac{dv\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = -2mckwdw - 2mkydw$

II. $\frac{du\sqrt{v}}{\sqrt{u}} = -\frac{2mcydy}{k} - 2nkwdy$

quarum ſumma integrata dabit $2\sqrt{vu} = \text{Conſt.} - mckw^2 - \frac{mcy^2}{k} - 2mk\int ydw - 2nk\int wdy$. At ex aequatione differentiali prima eſt $-2\int wdy = \frac{v}{mc} + \frac{yy}{c}$, ex altera vero $-2\int ydw = \frac{u}{mc} + \frac{nk^2w^2}{mc}$; quibus ſubſtitutis habebitur $2\sqrt{vu} = \text{Conſt.} + \frac{ku}{c} + \frac{nkv}{mc} + \left(\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k}\right)(yy + k^2w^2)$ ſeu $\frac{mku + nkv}{mc} - 2\sqrt{vu} = \left(\frac{nk}{c} - \frac{mc}{k}\right)(rr - yy + k^2(ss - w^2))$.

§. 386. Duas igitur nacti ſumus aequationes integrales, ex quibus bini valores v et u poterunt determinari per r, s, y et w. Quodſi fuerit factum, differentietur valor ipſius v inuentus ac differentiale aequale ponatur ipſi $-2mcwdy - 2mydy$, hocque pacto obtinebitur aequatio inter y et w, cuius ope ad datum quemuis ipſius y valorem licebit valorem anguli w aſſignare. Ac ſi denique factis ſubſtitutionibus hae aequationes in ſubſidium vocentur $dt = \frac{-dy}{\sqrt{v}} = \frac{-kdw}{\sqrt{u}}$, omnes quantitates variabiles v, u, y et w per tempus t exhiberi poterunt, atque hoc

facto

facto ad datum quoduis tempus ſtatus, in quo nauis verſabitur, aſſignari poterit.

§. 387. Hanc inueſtigationem autem vlterius non perſequor, cum propter calculi difficultatem et prolixitatem, tum etiam, quia praeſens inſtitutum eo non multum iuuaretur. Sufficiat igitur perſpicue monſtraſſe, leges motus hic et in ſuperiore libro ſtabilitas omnino ſufficere ad motus huiusmodi maxime irregulares ac perturbatos determinandos, quanquam ſaepius calculus ob ſummam moleſtiam ad finem perduci non poteſt. Etſi autem in hac inueſtigatione inclinationem nauis e ſitu aequilibrii infinite paruam poſuimus, tamen methodus reſoluendi manet eadem inclinatione poſita quantumuis magna. At tum calculus multo adhuc fit prolixior et difficilior, eo quod in tanta inclinatione, figura ſectionis aquae continuo mutatur cuius mutationis ideo ratio quouis momento haberi debet.

Caput. V.

DE INCLINATIONE, QVAM NAVES A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE PATIVNTVR.

§. 388.

In hoc capite incipiemus in effectus quos vires quaecunque externae nauibus applicatae producere valent, inquirere. Quanquam enim hoc argumentum in ſuperiori libro, vbi corpora quaecunque aquae innatantia conſideravimus, iam fuſius eſt pertractatum, tamen hic eandem inueſtigationem ad naues in ſpecie transferri conueniet, vt regulas etiam hinc conſequamur certas, quas cum in conſtructione nauium, tum etiam in earum iuſtructione et gubernatione obſeruari oporteat. Ex ſingulis enim circumſtantiis ad naues ſpectantibus propoſitum nobis eſt regulas pro nauium conſtructione, oneratione, et gubernatione elicere, quo deinceps ex omnium harum regularum colliſione perfectiſſima nauium forma colligi queat.

§ 389. Omnes effectus, quas vires quaecunque in naves exerere poſſunt, ad quinque genera reuocantur. Primum genus eos complectitur effectus, quibus centrum gravitatis nauis, atque adeo ipſa nauis vel ſurſum vel deorſum vrgetur. Ad genus ſecundum pertinet motus horizontalis centri grauitatis, quo nauis ſuper aqua a viribus ſollicitata progreditur ſecundum quamcunque regionem. In tertio genere comprehendo motum nauis rotatorium circa

axem

Digitized by Google

axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem. Quartum autem et quintum genus inclinationes nauis reſpicit circa axem horizontalem ſiue longitudinalem ſiue latitudinalem. Atque haec duo poſtrema genera hic diligentius inueſtigare, et quanta inclinatio a datis quibusque viribus oriri debeat, determinare eſt propoſitum.

§. 390. Plerumque autem vna eademque vis plures effectus diuerſos in naui producere ſolet, verum tamen ſinguli ſunt ita comparati et a reliquis disiuncti, vt nullus effectus, a reliquis ab eadem vi oriundis turbetur, quemadmodum in libro ſuperiori demonſtratum eſt. Quamobrem cum hic tantum inclinationem nauis circa axem horizontalem ſiue longitudinalem ſiue latitudinalem inueſtigare conſtituerim, hunc effectum ſolum definire poterimus, ſine vllo reſpectu ad reliquos effectus habito, qui forte ab eadem vi proficiſcuntur. Atque ita in hoc negotio verſari licebit, quaſi reliqui effectus vel omnino hanc inclinationem non comitarentur, vel ab aliis viribus, quae nullam inclinationem producant, penitus deſtruerentur. Semper enim vires eiusmodi contrariae concipi poſſunt, quae omnes datae vis effectus praeter eum, qui in inclinatione nauis conſumitur, deſtruant.

§. 391. Quo igitur clarius eas vires cognoſcere queamus, a quibus inclinatio nauis producatur primum eas vires notari iuuabit, a quibus nulla inclinatio oriri poteſt. Hinc enim in quolibet caſu eiusmodi vires contrariae fingi poterunt, quae effectus omnes reliquorum generum praeter inclinationem deſtruant. Imprimis autem hic eae vires conſiderandae veniunt, quarum directiones per centrum grauitatis nauis tranſeunt; harum enim virium totus effe-

Digitized by Google

ctus vel in promotione nauis ſecundum directionem horizontalem, vel in eleuatione ſeu depreſſione nauis tantum conſiſtit. A talibus igitur viribus neque rotatio nauis circa axem verticalem neque vlla inclinatio oriri poterit: ex quo huiusmodi vires in hoc capite non locum inuenient, niſi ad effectus ab inſtituto alienos mente ſaltem deſtruendos.

§. 392. Simili modo nulla vis, cuius directio tranſit per axem horizontalem per centrum grauitatis ductum, inclinationem circa illum axem generare valet; et hanc obrem ſi inclinatio circa axem longitudinalem tantum conſideretur, omnes vires huic effectui erunt impares, quarum directiones tranſeunt per axem longitudinalem, hoc eſt, quae productae cum hoc axe vel concurrunt, vel parallelae exiſtunt; quod idem de axe latitudinali eſt intelligendum. Deinde vero omnes vires, quarum directiones ſunt horizontales, atque in ipſo plano horizontali per centrum grauitatis tranſeunte, ſitae, circa neutrum axem ſiue longitudinalem ſiue latitudinalem nauem inclinabunt. Ex his igitur iam facilius intelligetur, a quibusnam viribus nauis inclinationem patiatur; an vero ſecus; quodſi enim vis nauem vrgens aliter ſit comparata, atque modo indicauimus, certo inclinatio nauis ſubſequetur.

§. 393. Quaecunque autem oriatur nauis inclinatio a ſitu naturali, ea circa axem aliquem horizontalem per centrum grauitatis nauis tranſeuntem fieri cenſenda. Quanquam vero huiusmodi axes numero infiniti exiſtunt, tamen omnes inclinationes reuocari poſſunt ad binos memoratos axes principales, longitudinalem ſcilicet ac latitudinalem; ita vt definita inclinatione, quae a data vi circa vtrumque illum

axem

axem generatur, vera inclinatio nauis cognoſcatur; ſimulque axis ille obliquus aſſignari queat, circa quem nauis durante inclinatione ſeſe conuerterit. Simili ſcilicet modo, quo decompoſitio virium, inclinatio circa axem obliquum reſolui poteſt in binas inclinationes circa ambos axes principales.

§. 394. Sit enim AEBF ſectio nauis horizontalis per eius centrum grauitatis G facta, in eaque ambo axes principales, longitudinalis AB et latitudinalis EF; ſitque A prora, B puppis, E latus ſiniſtrum, F dextrum. Ponamus iam nauem duplicem pati inclinationem, alteram circa axem AB ſiniſtrorſum per angulum α, alteram circa axem EF prorſum per angulum β, huicque duplici inclinationi aequiualere inclinationem ſimplicem, quae fiat circa axem obliquum MN verſus V, per angulum γ. Sumatur iam punctum quoduis V, e quo ad tres illos axes ducantur normales VT, VS, et VR. Nunc pro duplici inclinatione, inclinatio circa axem AB deprimet per ſpatium α. TV, altera inclinatio circa axem EF deprimet idem punctum per ſpatium β. SV. ita vt punctum V a duplici inclinatione deprimatur per ſpatium $\alpha . TV + \beta . SV$. ita ſimplici inclinatione circa axem MN deprimitur per ſpatium $\gamma . RV$. Tab. XIII. fig. 1.

§. 395. Quoniam igitur tam duplex quam ſimplex inclinatio eundem motum in ſingulis punctis V producit, fiet $\alpha . TV + \beta . SV = \gamma . RV$ Ducta ergo recta GV fiet $\alpha .$ ſin. $AGV + \beta .$ ſin. $EGV = \gamma .$ ſin. MGV. Quae aequatio cum vbique locum habere debeat, erit puncto V in A translato $\beta = \gamma .$ ſin. $MGA = \gamma .$ coſ. MGE; puncto vero V in E translato fit $\alpha = \gamma .$ ſin. $MGE = \gamma$

coſ.

Digitized by Google

coſ. BGM. ita autem angulis α et β determinatis erit vbique α ſin. AGV + β ſin. EGV $= \gamma$. ſin. MGV. Fiet autem $\alpha\alpha + \beta\beta = \gamma\gamma$, ideoque $\gamma = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$; hincque porro poſitio axis obliqui MN ita definietur vt ſit ſin. EGM $= \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$ et coſ. EGM $= \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$ ſeu tang. EGM $= \frac{\alpha}{\beta}$.

§. 396. Quodſi ergo nauis duplicem patiatur inclinationem alteram circa axem longitudinalem AB ſiniſtrorſum per angulum α, alteram circa axem latitudinalem EF per angulum β; duplex haec inclinatio reuocabitur ad inclinationem ſimplicem circa vnicum axem obliquum, quae fiet per angulum $\gamma = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$. Poſitio autem huius axis obliqui ſequenti modo definietur. Diuiſa ſuperficie nauis ſectionis per axes principales in quatuor portiones AGE, BGE, BGF et AGF; binae portiones a duplici inclinatione motus conſentientes nanciſcentur, vti noſtro caſu portiones AGE, et oppoſita BGF; reliquae vero binae oppoſitae portiones AGF et BGE motus diſcrepantus accipient per easque axes ille obliquus MN tranſibit, ita autem erit poſitus, vt ſit anguli EGM tangens $= \frac{\alpha}{\beta}$, circa quem nauis inclinabitur per angulum $= \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}$.

§. 397. Inclinatio igitur quam nauis a vi quacunque patietur, commodiſſime definietur, ſi, quantam inclinationem ea vis circa vtrumque axem principalem producat, inueſtigabitur; tum enim ſimul axis obliquus innoteſcet, circa quem ab ea vi inclinatio ſimplex orietur, atque inclinationis quantitas. Quamobrem ſufficiet expoſuiſſe methodum, cuius ope inclinatio circa alterutrum axem principalem a data vi oriunda determinari queat. Facillime autem

autem hoc praeſtabitur, ſi vis ſeu potentia nauem ſollicitans in ternas vires reſoluatur, quarum vnius directio ſit verticalis, reliquarum binarum vero directiones horizontales, ita vt alterius directio parallela ſit axi longitudinali, altera vero axi latitudinali; haecque reſolutio ſine vlla moleſtia inſtituitur, dum vis ſollicitans, ſi multiplicetur per coſinum anguli, quem eius directio cum vna ex illis tribus directionibus facit, ſtatim praebet vim reſultantem in ea ipſa directione.

§. 398. Cum autem vis quaecunque nauem ſollicitans in huiusmodi tres vires fuerit diſtributa, ſingulae ſeorſim conſiderentur. Ac primo quidem vis verticalis ſpectetur, inuestigetur eius diſtantia ab vtroque plano verticali, altero per axem latitudinalem, altero per axem longitudinalem; quo facto vis verticalis multiplicata per diſtantiam a plano longitudinali dabit momentum eius reſpectu axis longitudinalis; ſimilique modo eadem vis multiplicata per diſtantiam a plano verticali, quod per axem latitudinalem tranſit, dabit eius momentum reſpectu axis latitudinalis. Inuentis autem his momentis reſpectu vtriusque axis principalis, diligenter diſpiciatur, in vtram plagam inclinatio nauis inde debeat oriri, quo pateat, vtrum plura eiusmodi momenta ad eundem axem relata per additionem an per ſubtractionem iungi debeant.

§. 399. Quod autem ad binas reliquas vires horizontales attinet, perſpicuum eſt, eam, cuius directio axi longitudinali eſt parallela nullum momentum reſpectu huius axis producere; neque etiam ab ea, cuius directio parallela eſt axi latitudinali, reſpectu huius axis momentum exiſtere. Quare ex vi, cuius directio eſt parallela axi longitudinali tantum momentum reſpectu alterius axis lati-

tudinalis oritur, contraque ex vi, cuius directio eſt parallela axi latitudinali, tantum naſcetur momentum reſpectu axis longitudinalis. Vtriusque autem huius momenti quantitas obtinebitur, ſi vtraque vis multiplicetur a diſtantia ſua a plano horizontali per centrum grauitatis ducto, quae adeo diſtantia pro vtraque vi erit eadem.

§. 400. Quacunque ergo vi nauem ſollicitante reſoluta in ternas memoratas vires momenta ex ea pro vtroque axe principali oriunda facili negotio determinabuntur. Duo autem ad ſummum momenta pro ambobus axibus reperientur, quorum alterum ex vi verticali, alterum ab vna vi horizontali proficiſcitur. De his itaque binis momentis diſpiciendum eſt, vtrum ad effectus contrarios an conſentientes producendos ſint accommodata; vt intelligatur, vtrum eorum differentia an ſumma capi debeat, pro toto momento ex illa vi oriundo. Quodſi autem nauis ſimul a pluribus viribus ſollicitetur, ſimili modo momenta ex ſingulis viribus pro vtroque axe principali colligentur, ex quibus tandem coniunctis momenta totalia pro vtroque axe prodibunt.

§. 401. In hoc negotio vires ſollicitantes tantum inſtituto praeſenti conformiter ſumus contemplati: momenta ſcilicet tantum ex iis deriuauimus, ad inclinationem producendam idonea, atque a reliquis effectibus cogitationem prorſus abſtraximus. Iſta vero reſolutio cuiusque vis in ternas pariter ad effectus reliquos cognoſcendos maxime eſt accommodata. Nam primo vis verticalis praeter inclinationem producet in naui vel maiorem vel minorem immerſionem. Atque vires horizontales nauem partim ſecundum horizontem propellent, partim conuertent

tent circa axem verticalem per centrum grauitatis nauis ductum.

§. 402. Quodſi iam ex viribus nauem ſollicitantibus deducta fuerint momenta nauem circa ambos axes principales inclinantia, ex iis quae in libro ſuperiori demonſtrata ſunt facili negotio inclinatio ipſa circa vtrumque axem determinabitur; ſi quidem vti hic perpetuo ponimus, inclinatio fuerit tam parua vt ea in calculo pro infinite parua haberi queat, id quod accidit ſi ſinus inclinationis ipſi inclinationis angulo fuerit proportionalis. Circa vtrumque autem axem duplex oriri poteſt inclinatio; circa axem longitudinalem ſcilicet nauis vel ſiniſtram vel dextram verſus inclinari poteſt; circa axem latitudinalem vero inclinatio vel proram verſus, vel retrorſum fieri poteſt, quod diſcrimen ex momentis inclinationem vtramque generantibus facile cognoſcetur.

§. 403. Inclinatio vero circa quemcunque axem colligitur ex ſtabilitate, quam nauis habet reſpectu illius axis. Si enim ſtabilitas reſpectu axis cuiusuis ponatur F, eaque modo ſupra adhibito exprimatur, ea ita ſe habet, vt, ſi nauis circa illum axem inclinetur angulo $= w$, momentum quo ipſa nauis ſeſe reſtituere conatur, futurum ſit $= Fw$. poſito ſinu toto $= 1$, et denotante w vel ipſum arcum, angulum inclinationi aequalem in hoc circulo ſubtendentem vel eius ſinum. Ex quo apparet eſſe F momentum, ſeu productum ex pondere quodam in aliquam longitudinem. Expreſſimus autem ſtabilitatem F per pondus nauis M in longitudinem datam ductum.

§. 404 Ponamus nunc ex viribus externis ſollicitantibus nauem reſultaſſe momentum $=$ P. ad nauem circa axem ſiue

longitudinalem ſiue latitudinalem inclinandam , cuius reſpectu ſtabilitas ſit $= F$: atque ab hoc momento oriri inclinationem per angulum $= \omega$, quam quaerimus. Cum igitur ipſa nauis in hoc ſtatu inclinato polleat vi ſeſe reſtituendi , huiusque vis momentum ſit $= F\,\omega$, neceſſe eſt , vt momentum P virium hanc inclinationem producens aequale ſit et contrarium vi reſtituenti ; ex quo fiet $P = F\,\omega$, hincque $\omega = \frac{B}{F}$. Quamobrem fractio $\frac{P}{F}$, cuius numerator et denominator quantitates homogeneas momenta ſcilicet nota denotant , dabit ſinum anguli inclinationis oriundae a virium momento P , poſito ſinu toto $= I$.

§. 405. In genere igitur intelligitur , quo maior fuerit ſtabilitas nauis reſpectu eius axis , circa quem nauis inclinatur , eo minorem fore inclinationem , eadem manente vi inclinante P , quod quidem ex ipſa ſtabilitatis idea conſequitur. Quamobrem vt nauis minimis inclinationibus ſit obnoxia , ſtabilitas quantum fieri poteſt , augeri debet , quod , quibus modis efficiendum ſit , ſupra ſuſius oſtendimus. Atque ideo ad nauium formam perfectiſſimam inueſtigandam hic ſtabilitate F relicta , diſpiciemus , quemadmodum momentum P pro nauis incolumitate comparatum eſſe debeat.

§ 206. Fractio igitur $\frac{P}{F}$, in qua eſt P ad F vt ſinus anguli inclinationis , a momento virium P ortae ad ſinum totum , tam exigua eſſe debet , vt haec inclinatio navi nullum detrimentum afferat. Quamobrem inclinationes illas maximas quas nauis ſine vllo periculo ſubire poteſt , definiri oportet , vt limites habeantur , quos inclinationes transgredi non liceat. Ac primo quidem pro axe longitudinali videtur inclinationis angulus 10° ſuperare non debere ;

bere; pro axi latitudinali autem inclinatio vltra quinque gradus exſurgere non poteſt, eo quod ob ingentem nauium longitudinem immerſio et emerſio in prora et puppi nimis fieret magna. Hos autem limites non quaſi fixos aſſumimus, ſed tantum exempli gratia; atque pro dato nauium ſtatu ii vel maiores vel minores accipi poterunt. Interim tamen incolumitati nauium eo magis conſuletur, quo minores iſti limites conſtituantur.

§. 407. Si igitur inclinatio circa axem longitudinalem oriatur, prouidendum eſt, ne valor fractionis $\frac{P}{F}$ vnquam excedat $\frac{1}{6}$. quae fractio proxime accedit ad ſinum anguli 10°. At pro inclinatione circa axem latitudinalem fractionis $\frac{P}{F}$ valor nunquam maior eſſe debet quam $\frac{1}{12}$. Quare ſi in nauibus ſtabilitas reſpectu vtriusque axis principalis iam fuerit definita, in hoc erit elaborandum, vt nauis nunquam tantis viribus exponatur, quarum momenta inclinationem producentia excedant limites iſtos definitos, vel alios, qui ad naues magis reperiantur accommodati, qui quidem ab his non multum diſcrepabunt. Cum autem iſti limites angulis ſatis paruis contineantur, id nanciſcimur commodi, vt ipſi anguli ſuis ſinibus proxime ſint proportionales; ex quo regula data perpetuo tuto adhiberi poterit.

§. 408. Quodſi autem euentus externi, quibus naues expoſitae eſſe ſolent, non ita ad lubitum temperari queant, vt momenta inclinantia, quae ex iis naſcuntur, infra praeſcriptos limites redigi queant atque ideo valor litterae P tanquam datus accipi debeat; tum aliter ſecuritati nauis proſpici non poteſt, niſi vt ipſi tanta ſtabilitas concilietur, ex qua angulus inclinationis $\frac{P}{F}$ prodeat innocuus.

 Atque

Digitized by Google

Atque ex huiusmodi caſibus vel fortuito vel neceſſario ſe immiſcentibus ipſa ſtabilitatis quantitas determinari debebit. Cum enim nauium conſeruatio prae omnibus reliquis commodis intendatur, in nauium conſtructione ſtabilitas praecipue ſpectari debebit, atque effici, vt ea ad debitam quantitatem augeatur. Quod iudicium cum ex quantitate virium externarum, naui interitum minantium, tum ex ſtatu nauium ipſo, vnde intelligitur, quantam inclinationem quaeque nauis ſine periculo pati queat, inſtitui oportet.

§. 409. Si omnes naues tam ratione conſtructionis quam onerationis eſſent corpora inter ſe perfecte ſimilia, tum earum ſtabilitates reſpectu axium homologorum tenerent inter ſe rationem quadruplicatam laterum homologorum. Scilicet ſi maioris nauis fuerit profunditas carinae $= C$ et minoris profunditas carinae $= c$, erit primo pondus nauis maioris ad pondus minoris vti C^3 ad c^3. Stabilitas autem nauis maioris ſe tenebit ad ſtabilitatem minoris vt C^4 ad c^4. Si quidem vtraque ſtabilitas ad axem eiusdem nominis hoc eſt ſiue longitudinalem ſiue latitudinalem referatur. Quare ſi ſtabilitas maioris nauis ponatur $= F$ et ſtabilitas minoris $= f$ erit $F : f = C^4 : c^4$.

§. 410. Vires autem externae, quibus naues expoſitae eſſe ſolent, ſiue ſpectetur vis propellens, ſiue vis aquarum, tenent rationem duplicatam laterum homologorum. Quodſi enim naues vento propellantur vis venti eadem celeritate vrgentis erit vt ſuperficies velorum, indeque tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Simili modo reſiſtentia aquae, quando omnia ſunt paria, ſuperficiei nauis in quam irruit eſt proportionalis, hincque etiam tenebit rationem duplicatam laterum homologorum. Vnde

efficitur

efficitur vt eiusmodi naues ſimiles ab eiusdem venti impulſu aequales in aqua acquirant celeritates, poſtquam ſcilicet ad motum aequabilem fuerint redactae. Quo enim naues fuerint maiores eo tardius hanc velocitatem vniformem aſſequentur, vti patet ex iis, quae ſupra de motu progreſſiuo ſunt tradita.

§. 411. Cum autem vires ſollicitantes teneant rationem duplicatam laterum homologorum, earum momenta, ex quibus inclinationem nauium concludere oportet, erunt in ratione triplicata laterum homologorum, eo quod momenta prodeunt, ſi vires ſollicitantes per vectes multiplicentur, qui ipſis lateribus homologis ſunt proportionales. Quare ſi pro naui maiori momentum inclinans ponatur $= P$ et pro naui minori $= p$, erit $P : p = C^3 \; c^3$. Hinc igitur anguli inclinationum in naui maiori et minori erunt vt $\frac{1}{C}$ ad $\frac{1}{c}$. Hoc eſt inclinationes in nauibus ſimilibus a viribus quoque paribus productae erunt reciproce vti latera homologa; ita vt, tametſi omnia ſint ſimilia, inclinationes tamen maxime fiant diſſimiles.

§. 412. Cum igitur in nauibus ſimilibus inclinationes a paribus viribus ortae ſint eo minores, quo maiores fuerint naues, manifeſtum eſt nauium ſimilium maximas minimo ſubuerſionis periculo eſſe obnoxias. Ex quo intelligitur, quo naues conficiantur maiores, eas praeditas eſſe eo maioribus commodis, ſi cetera omnia ſint paria. Quin etiam ſi naues minores ita fuerint comparatae, vt ſine aperto interitus periculo tempeſtatum impetibus committi nequeant, tamen naues maiores ad idem exemplum conſtructae ab eodem periculo ob ſolam magnitudinem liberantur. Hocque quotidiana experientia clariſſime confirmat,

mat, quippe qua conſtat minora nauigia tempeſtatis vehementiam ſuſtinere minime poſſe, cum tamen naues maiores tuto per mare migrare queant. Accedunt quidem hic alia incommoda ab vndis oriunda, quarum hic nullam habemus rationem; hoc tamen non obſtante theoria manifeſto per experientiam confirmatur.

§. 413. Quodſi autem ponamus nauem minorem vim tempeſtatis ſine vllo periculo ſuſtinere poſſe, tum maior nauis, ſi quidem omnia ſint ſimilia, multo tutius in eadem tempeſtate verſabitur. Deinde vero ſi aequalis inclinatio cum pari periculo fuerit coniuncta, maior nauis quoque maiorem impetum cum eodem periculo ſufferre poterit; nam ſi impetus ſiue venti ſiue aquae fuerint in ratione ſimplici laterum homologorum nauium, tum demum naues maiores ac minores aequalem inclinationem patientur; ac proinde aequali periculo erunt obnoxiae.

§. 414. Perſpicuum igitur eſt maximas naues prae minoribus ſummis et grauiſſimis emolumentis eſſe praeditas, ſi quidem inclinatio, de qua hic nobis ſola ſermo eſt, ſpectetur, a qua nauis incolumitas potiſſimum pendet. Praeterea autem facile intelligitur, a motu et impetu vndarum, quibus naues non ſolum ſuccutiuntur, ſed etiam ex ſitu erecto deturbantur, naues, quo ſint maiores, eo minus affici debere, id quod praeter rationem experientia abunde teſtatur. Laborant vero etiam naues maiores prae minoribus non contemnendis incommodis; primo enim non tam facile ſe dirigi ac gubernari patiuntur, qua de re infra fuſius videbimus; deinde vero ſi in mari occulti ſcopuli ac ſyrtes reperiantur, naues maiores facile naufra-

naufragium patiuntur, dum minores tuto tranſire poſſunt: verum huiusmodi caſus alieni in theoriam non incurrunt.

§. 415. Quodſi autem maxima violentia, in quam naues vnquam incidere poſſunt, fuerit definita, atque ſumma inclinatio, quam nauis ſine damno pati poteſt, determinata, ſimilitudo nauium ita poterit alterari, vt naues maiores multo inſigniora commoda conſequantur. Scilicet, ſi nauis minor, cuius latus homologum ſit $= c$, incolumis perſeuerare queat, in naui maiori maior velorum copia, quam ſimilitudo requirit, ſine periculo adhiberi poterit. Scilicet ſi maioris nauis latus homologum ſit C; ſuperficies omnium velorum in naui maiori ita conſtitui poteſt, vt ſe habeat ad ſuperficiem velorum in minore vt C^4 ad c^3, quo impetrabitur, vt nauis maior celerius propellatur quam minor, paremque tamen inclinationem ſubeat.

§. 416. Quanquam autem haec, quae ad velorum conſtitutionem ſpectant, infra data opera ſumus euoluturi, tamen, quantum ad praeſens inſtitutum nauium ſcilicet inclinationem attinet, hic paucis tetigiſſe iuuabit. Vidimus autem, naues, quo ſint maiores, maiorem velorum copiam admittere, quam ratio duplicata laterum homologorum requirit; ſi naues ceterum inter ſe ita ſint ſimiles, vt earum ſtabilitates teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum; atque vt aequales inclinationes eueniant, momenta ex vi venti ad nauem inclinandam oriunda tenere debere rationem pariter quadruplicatam laterum homologorum. Quodſi ergo latitudo velorum ponatur $= L$ et altitudo $= A$, erit vis venti abſoluta vt AL eiusque momentum ad nauem inclinandam vt $A^2 L$, vel neglectis cum velorum conuergentia ſurſum, tum altitudine ſupra

centrum grauitatis, vel vbique ſimilibus poſitis. Hincque debebit eſſe $A^2 L$ vt C^4, quo inclinationes prodeant aequales.

§. 417. Si iam in nauibus ceterum ſimilibus latitudo velorum L ponatur lateribus homologis proportionalis, altitudo velorum A debebit eſſe vt $C \sqrt{C}$, hoc eſt altitudines velorum vel malorum tenebunt rationem ſeſquiplicatam laterum homologorum: ita vt in naui quadruplo maiori ſeu 64 vicibus grauiori, ſumta latitudine velorum quadrupla, altitudo malorum capi debeat octies maior. Sumtis vero velorum altitudinibus in ratione laterum homologorum, latitudines accipi poterunt in ratione duplicata laterum homologorum. Atque generaliter ſi latitudo capiatur vt C^n et altitudo A vt C^m, debebit eſſe $2m + n = 4$; vnde fiet vis venti abſoluta nauem propellens vt C^{4-m}, quia eſt vt velorum ſuperficies AL.

§. 418. Quodſi autem non expediat in nauibus maioribus quantitatem virium tantum augere, quantum ſtabilitas permittit, tum tuto in iſtiusmodi nauibus maioribus ſtabilitas diminui poterit. Si enim tam altitudo quam latitudo velorum teneat rationem ſimplicem laterum homologorum, ſeu ſubtriplicatam ponderum in nauibus diuerſae magnitudinis, ex quo vires impellentes a vento oriundae rationem laterum homologorum duplicatam, momenta vero ad nauem inclinandam tendentia rationem triplicatam habebunt. Tum igitur ſufficiet naues ita adornaſſe, vt ſtabilitates inter ſe ſeruent rationem triplicatam laterum homologorum: quae, ſi perfecta conſtitueretur ſimilitudo, forent biquadratis laterum homologorum proportionales. Huicque hypotheſi accommodauimus ea, quae ſupra in Cap. de Stabilitate §. 251. et ſeqq. ſunt tradita.

§. 419.

§. 419. Quanquam autem ſtabilitas tam eſſentialis ac neceſſaria nauium eſt proprietas, vt expedire videatur, eam, quantum fieri queat, augere, tamen lucrum ex eius nimia multiplicatione oriundum parui eſt momenti, ita vt merito aequieſcere queamus, ſi ſtabilitas tanta fuerit, vt nauis nunquam vltra datos limites inclinari queat. Si quidem ſtabilitatis multiplicatio, quae praeter neceſſitatem inſtituatur, nullis incommodis alius naturae eſſet permixta, tum vtique foret conſultum ſtabilitatem efficere quam maximam; ſin autem incommoda hinc oriunda ſaltem alicuius fuerint momenti, minime conueniret ea negligere. Quae cum ita ſint in nauibus maioribus ſaepenumero conveniet, ſtabilitatem ex ſimilitudine oriundam aliquantum diminuere, vt alia commoda non parui momenti, quibus alias ſtabilitas obſtare ſolet, inde obtineantur, atque ad maiorem perfectionis gradum euehantur.

§. 420. Praecipuum igitur momentum, ex quo ſtabilitatem cuiusque nauis determinari conueniat, petendum eſt ex viribus, ad quas ſuſtinendas nauis vel de induſtria accommodata eſſe debet, vel quibus caſu nauis ſaepe exponitur; vbi maxime proſpiciendum eſt, ne iſtiusmodi vires contingentes damnum afferant. Atque ex hac conſideratione determinabitur quantitas ſtabilitatis, vt nauis valeat iſtiusmodi viribus ſatis reſiſtere, ne ab iis detrimentum patiatur. Quo facto ſufficiet naui tantam vel ſaltem non multo maiorem ſtabilitatem inducere, et reliqua capita, quibus nauis determinatur, tamdiu indeterminata relinquere, quoad reliquae proprietates omnes, quibus nauem praeditam eſſe oportet, fuerint ſedulo perpenſae; quo etiam his facilius per nauis conſtructionem ſatisfieri queat. Hactenus

 quidem

quidem eiusmodi proprietates nondum ſumus contemplati quae ſtabilitatis determinationem ſuadeant, ſed infra tales proprietates abunde occurrent.

§. 421. Ingenere haec valent ad ſtabilitatem nauium cum ratione axis longitudinalis tum latitudinalis ex viribus, quibus naues actu exponuntur, determinandam; quo in negotio hoc tantum eſt cauendum, ne ab his viribus inclinatio nauibus damnoſa afferatur; id quod ſtabilitate iuſtae magnitudinis nauibus inducenda obtinebitur. Infra vero, vbi vires, quibus naues vrgeri ſolent, curatius examinabimus, in earumque veram magnitudinem inquiremus, pro quouis caſu ipſam ſtabilitatem ad nauium incolumitatem requiſitam accurate definire licebit. Quamobrem hoc loco iſtam doctrinam eatenus tantum expoſuiſſe ſufficiat, vt poſt modum, quando vera virium ſollicitantium quantitas definietur, ſtatim inclinatio ab iis oriunda aſſignari queat, ex quo deinceps praecepta ad nauium conſeruationem neceſſaria deducantur.

§. 422. Hic vero adhuc obiter notari conueniet vires, quibus naues circa axem latitudinalem inclinantur, multo maiores eſſe iis, quae naues circa axem longitudinalem inclinare conantur. Cum enim praecipuus nauium ſcopus in curſu ſit poſitus, qui maximam partem ſecundum directionem axis longitudinalis inſtitui ſolet, vires etiam tam propellentes, quam quae naui reluctantur, ſecundum eandem fere directionem ſollicitabunt; ex quo eae maxime valebunt ad naues circa axem latitudinalem inclinandas, parum vero circa axem longitudinalem; niſi forte in curſu nauium, quae a vento propelluntur obliquo, curſus aduerſus plagam venti inſtituitur; vbi virium mo-

momentum reſpectu axis longitudinalis ſatis ſit magnum. Hinc igitur ſequitur regula maximi momenti, quae poſtulat, vt in omnibus nauibus ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis multo reddatur maior, quam reſpectu axis longitudinalis.

§. 423. Quodſi autem AEBF denotet ſectionem aquae, AB eius axem longitudinalem, EF axem latitudinalem, et CD profunditatem carinae; porro vero centrum magnitudinis carinae poſitum ſit in O, et totius nauis centrum grauitatis in G: in capite de ſtabilitate vidimus, ſi nauis totius pondus ponatur $= M$, fore ſtabilitatem reſpectu axis longitudinalis proxime $= M\left(\frac{EF^2}{10\,CD} - OG\right)$, ſtabilitatem vero reſpectu axis latitudinalis $= M\left(\frac{AB^2}{10\,CD} - OG\right)$. Hanc ob rem iſta quantitas $\frac{AB^2}{10\,CD} - OG$ multo maior eſſe debebit, quam illa $\frac{EF^2}{10\,CD} - OG$; vnde ſequitur in omnibus nauibus eſſe debere $AB > EF$. Quo circa patet ratio praecipua huius regulae conſtantiſſimae, qua in omnibus nauibus longitudo AB multum ſuperare debet latitudinem EF. Tab. IX. fig. 5.

§. 424. Commemorata generatim nauium inclinatione, quae a vi venti oriri poteſt, ſequeretur, vt etiam inclinationem nauium a vi remorum oriundam, quae eſt altera vis praecipua, qua naues propelli ſolent, contemplaremur, ſed quia ob directionem harum virium fere horizontalem, et parum a plano horizontali per centrum grauitatis nauis ducto diſtantem, momentum harum virium ſit ſatis exiguum, nulla inde inclinatio proficiſci poteſt, quae nauis detrimentum afferat; idque eo magis cum iſtas vires pro lubitu moderari liceat. In huiusmodi igitur nauibus, quae remis tantum propelluntur, ſtabilitas ex aliis viribus, in quas naues fortuna incidunt, debebit definiri,

 qua-

Digitized by Google

quarum vtique in omnibus nauibus ratio maxime eſt habenda, cum eae non a noſtro arbitratu pendeant, et plerumque de improuiſo tam vehementer irruunt, vt naues in maximum pereundi periculum incidant. Qui caſus, quo minus euitari poſſunt, eo magis eſt laborandum, vt naves tantam violentiam ſuſtinere queant.

§. 425. Poſt ventum vires, quibus naues maxime agitantur, in aqua ſunt poſitae, quae ad duo genera commode reuocantur. Primo ſcilicet etſi mare eſt tranquillum, tamen, ſi nauis celeriter vehitur, magnam ab aquae reſiſtentia vim ſuffert, cuius effectus quidem potiſſimum in motus retardatione conſtat, verumtamen etiam pro figura nauis momentum ad inclinationem producit. Alter effectus multo vehementior cernitur, ſi aqua vndis vehementer turbatur; tum enim non ſolum naues ab alliſione vndarum vim patiuntur inclinationem efficientem, verum etiam ob ſuperficiem aquae non amplius horizontalem ſitus aequilibrii nauium maxime perturbatur, ex quo ingentes inclinationes et alterationes in portione, quae aquae eſt ſubmerſa, oriri poſſunt.

§. 426. Quod ad vires prioris generis attinet, eae ſunt eo fortiores, quo celerius nauis in aqua progreditur, et propemodum ſequuntur rationem celeritatum duplicatam. Fit autem iſte impetus potiſſimum aduerſus proram, ſi quidem nauis curſu directo progrediatur; in curſu obliquo
Tab. XIII. fig. 3. autem non multum a prora diſtabit. Effectus autem in naui inclinationem generans imprimis ab obliquitate prorae AC pendet; quae ſi eſſet nulla, proraque verticaliter ſpinae CD inſiſteret, momentum reſiſtentiae ad inclinationem producendam perquam eſſet paruum, dum

tan-

Digitized by Google

tantum penderet a diſtantia mediae directionis reſiſtentiae a plano horizontali per centrum grauitatis nauis directo. Atque hoc caſu reſiſtentia proram deprimeret, ſi media directio infra centrum grauitatis caderet, contra autem eleuaret.

§ 427. Maioris autem momenti fiet iſta reſiſtentiae vis inclinationem importans, ſi prora AC oblique deſcendat, tum enim media directio reſiſtentiae aquae RS ſurſum dirigetur eo magis, quo linea AC plus a ſitu verticali receſſerit. Hinc itaque momentum inclinans eo maius exiſtet, quo longior fuerit nauis, eo quod a diſtantia horizontali puncti R a recta verticali per centrum grauitatis ducta pendet. Tali igitur vi RS prora nauis eleuabitur, eoque inclinatio circa axem latitudinalem puppim verſus generabitur. Effectus iſte etiam ad nauis vtilitatem traduci ſolet, cum eo inclinatio proram verſus, quae a viribus nauem propellentibus oritur, diminuatur, nauisque magis in ſitu erecto detineatur: quin etiam tali prorae obliquitate reſiſtentia admodum diminuitur, quod eſt commodum non leuis momenti; ſiquidem aliae rationes non aduerſentur.

§. 428. Tametſi vero iſtiusmodi prorae obliquitas duplicem vtilitatem affert, decrementum ſcilicet reſiſtentiae et deſtructionem inclinationis a viribus propellentibus oriundae, tamen eam vltra certos limites augere non expedit, modumque in ea obſeruari oportet. In nauibus enim, quae vento propelluntur, in quibus effectus ab hac prorae decliuitate oriundus maximi vſus eſſe videatur, ob alias grauiores rationes iſta decliuitas, quantum fieri poteſt, debet euitari; namque per eam centrum reſiſtentiae nimis a cen-

Digitized by Google

a centro grauitatis anteriora verſus remouetur, quo fit, vt gubernaculi vſus fiat admodum difficilis; quo de argumento autem infra fuſius agetur. In nauibus autem, quae ſolis remis cientur, quia vis proram verſus inclinans non eſt ſenſibilis, etiam deſtructione tantopere non indiget; propter reſiſtentiae vero diminutionem iſtae naues maiorem obliquitatem admittunt, quia nunquam curſu obliquo vti coguntur.

§. 429. Vt autem pro inſtituto huius capitis ſolam inclinationem ab hac reſiſtentiae vi oriundam contemplemur, ante omnia videmus, eius momentum ad nauem inclinandam eo fieri maius, quo magis obliqua conſtituatur prora. Ponamus enim proram tam oblique eſſe formatam, vt ſpeciem roſtri C*a* referat, etiamſi ipſa reſiſtentia ſit minor, tamen momentum ad nauem inclinandam augebitur ob duplicem rationem, primo ſcilicet, quia media directio *rs* propius ad ſitum verticalem accedit ac deinde, quia ipſa media directio *rs* magis a medio nauis verſus roſtrum *a* remouetur. Hinc igitur non ſolum inclinatio creſcet, ſed etiam in ipſo roſtro *a* ob magnam a centro grauitatis diſtantiam magis fiet ſenſibilis, ex quo perquam magna portio roſtri aquae modo immergetur, modo eminebit.

§. 430. Incommodum hoc, etiamſi in ſe ſpectatum leue videatur, tamen, quia roſtrum *a* admodum alte ſupra aquam exſtrui atque confirmari deberet, ne vnquam aquae ſubmergeretur, in reliquis ſcopis, quos in ſtructura nauium attendere oportet, magnum impedimentum inferret. Ad haec vero accedit impetus vndarum, quae pariter in obſtacula normaliter agentes tale roſtrum vehementius

ſurſum

Digitized by Google

ſurſum pellerent, atque oſcillationes circa axem latitudinalem nimis violentas producerent; vnde nauis hoc modo inſtructa proram haberet nimis mobilem, reſiſtentiamque propterea valde inaequabilem pateretur, vt hinc motus perturbatus et incertus oriri deberet. Has ob rationes nunc quidem praelonga illa roſtra, quibus veteres naues ſuas exornarunt, maximam partem ſunt abolita, cum experientia incommoda eorum ſatis clare monſtrauiſſet.

§. 431. Similiter ratio eſt comparata, quando vndae ad latera nauis impingunt, tum enim ex directione impetus intelligetur, quantum nauis debeat inclinari. Ac primo quidem ſi latera eſſent verticalia, tum media directio vis vndarum foret horizontalis, atque aliquantum infra aquae ſuperficiem caderet, quod ſi iam centrum grauitatis in eadem altitudine eſſet poſitum, tum momentum ad nauem inclinandam foret nullum, at quia centrum grauitatis nauis plerumque altius collocatur, inclinatio orietur eiusmodi, vt ſuperior nauis pars verſus vndas inclinetur. Sin autem latera nauis in ſectione aquae vehementer ſurſum diuergant, tum directio vis ab alliſione vndarum ortae magis ſurſum verget, nauemque in contrariam partem inclinabit.

§. 432. Inter binos igitur hos caſus contrarios dabitur media laterum nauium conſtitutio, in quae ſi vndae impingant, nulla ſenſibilis inclinatio oriatur. Pendebit ſcilicet haec conſtitutio a loco centri grauitatis nauis; ſi enim latera ita fuerint diſpoſita, vt media directio impetus vndarum per centrum grauitatis tranſeat, tum nulla omnino inclinatio eueniet. Quare ſi centrum grauitatis nauis altius ſit poſitum, quam ſuperficies aquae, tum expediet

ſi latera ſurſum aliquantum diuergant, vt media directio impetus vndarum pariter aliquantum ſurſum tendat, hancque diuergentiam conueniet eſſe eo maiorem, quo altius centrum grauitatis fuerit ſitum. Quoniam vero etiam accidit, vt vndae in ſuperiorem partem laterum impingant, ideo diuergentia memorata iterum diminui debebit.

§ 433. Quae cum ita ſe habeant, manifeſtum eſt, notabilem laterum diuergentiam ſurſum in regione ſuperficiei aquae tolerari omnino non poſſe. Nimium enim directio impetus vndarum inclinaretur ad horizontem, indeque momentum ad nauem inclinandam fieret maius. Et quoniam iſta vis latera vrgens tendit ad nauem circa axem longitudinalem inclinandam, cuius reſpectu ſtabilitas eſt minima, maxime erit cauendum, ne momenta ad nauem circa hunc axem inclinandam oriri queant notabilis magnitudinis, quia alias, ſi aliae vires inclinationem in eandem plagam accederent, ſtabilitas iis coniunctim reſiſtere non valeret. Supra aquam ergo minime conuenit latera nauium diuergentia conſtituere, quae regula in praxi quoque diligenter obſeruari ſolet, niſi aliae rationes grauiores abſolute contrarium poſtulant.

§. 434. Ponamus igitur latera nauis ſupra aquae ſuperficiem neque conuergere neque diuergere, hoc eſt in ſitu erecto perpendiculariter horizonti inſiſtere. Vndae igitur in haec latera impingentes vim exerent in directione horizontali, et niſi centrum grauitatis nauis admodum profunde ſit poſitum, vix ſenſibile producent momentum ad inclinationem. Quodſi autem nauis multum ſupra aquam emineat, centrumque grauitatis admodum ſit humile, tum vndae in latera iſtiusmodi verticalia impingentes multum valerent

valerent ad nauem inclinandam. His igitur caſibus iuuabit latera nauis ſurſum aliquantum conuergentia reddere, quo fiet, vt media directio impetus vndarum aliquantum deorſum magisque verſus centrum grauitatis dirigatur.

§. 435. Omnino autem impetus vndarum ad latera nauis impingentium nullam inclinationem circa axem longitudinalem producent, ſi latera ſuperiora verſus ita incuruentur, vt centrum curuaminis incidat in axem longitudinalem per centrum grauitatis ductum. Scilicet ſi M E D F N repraeſentet ſectionem transuerſalem ad axem longitudinalem verticalem, in qua G ſit interſectio axis longitudinalis, EF ſectio aquae atque latera E*m*M et F*n*N formentur in arcus circulares, centrum in G habentes, quae curuatura aliquantulum etiam infra aquae ſuperficiem porrigatur; manifeſtum eſt, ab alliſione vndarum ad latera EM et FN mediam impulſus directionem per centrum G eſſe tranſituram; hincque momentum, quod nauem inclinare conatur, prorſus euaneſcere, ita vt nauis ab vndis nullam inclinationem ſentire queat. Tab. XIII. fig. 4.

§. 436. Hoc igitur pacto efficietur, vt ab alliſione vndarum ad latera nauium nulla inclinatio circa axem longitudinalem oriatur. Quod vero ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, ea quidem erit quoque nulla, ſi vndae in medio nauis, vbi exiſtit centrum grauitatis, in latera impingant; at ſi impulſus fit prope proram ſeu puppim, momentum aliquod ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam, ſi quidem naues per totam longitudinem eandem ſeruarent latitudinem, oritur. Verum cum naues verſus proram ac puppim incuruentur, directio iſtiusmodi impulſuum propius verſus centrum grauitatis dirigitur

rigitur, quam ob cauſam inclinatio diminuetur. Suadet vero hanc nauium verſus proram ac puppim incuruatio etiam cum diminutio reſiſtentiae tum potiſſimum actio gubernaculi, quae ab impulſu vndarum in laterum extremitates nimium difficilis redderetur.

§. 437. Videamus nunc etiam, quid perturbatio in ſuperficie aquae horizontali ab vndis orta in ſtatu nauium efficere valeat. Sit igitur ADB ſectio quaedam nauis, AB

Tab. XIII. fig. 2. linea horizontalis in ſuperficie aquae, dum eſt tranquilla, ducta, ac ponamus ſubito ob vndarum motum, lineam rectam ab factam eſſe aquae ſuperficiem, quae cum horizontali AB faciat angulum ACa vel $BCb = w$. In hoc ergo ſtatu portio laterum Aa immergitur, quae in ſtatu naturali extra aquam eminebat, ex altera autem parte portio Bb ex aqua quaſi educitur; ponamus autem volumen aDb aequale eſſe volumini ADB calculi facilitandi gratia, ſi enim volumen nunc ſub aqua verſans maius eſſet vel minus quam ADB, tota nauis vi propria vel emergeret vel magis immergeretur.

§. 438. In hoc igitur ſtatu nauis erit quaſi in ſitu inclinato, cum alia portio, ac in ſtatu naturali aquae ſit immerſa. Perſpicuum autem eſt, nauem in hoc ſtatu, etiamſi obliquitas ſuperficiei ab maneret, perſeuerare non poſſe; quare videamus an nauis de hoc ſitu ſeſe in alium peiorem magisque damnoſum recipere debeat, an in magis conuenientem. Deſunt quidem verae leges, quas aqua in ſtatu violento poſita, vbi eius ſuperficies non eſt horizontalis, in preſſione obſeruat; interim tamen non multum a veritate aberrabimus, ſi ponamus easdem eſſe leges, quae in aqua tranquilla, atque ſic preſſio aquae in volu-

Digitized by Google

volumen nauis ſubmerſum huic ipſi volumini erit proportionalis, eiusque media directio tranſibit per centrum magnitudinis voluminis ſubmerſi aDb, eritque ad ſuperficiem aquae ab normalis; quam hyppotheſin tuto aſſumere licet, ſi quidem angulus ACa quam minimus ponatur.

§. 439. Sit iam O centrum magnitudinis voluminis ADB et G centrum grauitatis nauis, cuius pondus ſit $=$ M, volumen autem aquae ſubmerſum $=$ V. Iam vim reſtituentem quaerendo vt ſupra, erit vis ex preſſionibus aquae in volumen ADB agentibus orta $= M$, eiusque momentum ad nauem conuertendam ſecundum ſenſum BDA erit $= M.GO.w$ tendetque haec vis ad portionem Aa ex aqua extrahendam, eaque fiet, vt debitum volumen ſub aqua reſtet. Ex portione vero ACa oritur vis quae erit ad M vt volumen ACa ad V, ita vt ſit $= \frac{M.AC^2.w}{2V}$; ſimilique modo vis ex portione BCb orta erit $= \frac{M.BC^2.w}{2V}$; at ob ſpatia ACa et BCb aequalia erit $BC = AC = \frac{1}{2}AB$.

§. 440. Vis autem prioris ex ſpatio ACa orta directio erit Pp normalis ad ab, ita vt ſit $CP = \frac{2}{3}AC$, quae in longitudinem vectis $Pg = \frac{2}{3}AC + CG.w$ ducta dabit momentum nauem in eandem plagam BDA inclinare annitens, quod adeo erit $= \frac{M.AC^2.w}{2V}(\frac{2}{3}AC + CG.w)$ Simili modo vis ex ſpatio BCb orta tenderet in plagam contrariam, at quia ſpatium BCb ſubtrahi debet vt obtineatur ſpatium aDb, eius vis fiet conſpirans cum binis praecedentibus. Erit igitur haec vis $Qq = \frac{M.AC^2.w}{2V}$, et eſt $CQ = \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3}AC$. Haec vis ducatur in longitudinem vectis $Qg = \frac{2}{3}AC - CG.w$, prodibitque momentum $= \frac{M.AC^2.w}{2V}(\frac{2}{3}AC - CG.w)$. Ex his igitur

naſcitur totale momentum, quo nauis vrgebitur in ſitum naturalem, cuius pars aquae ſubmerſa eſt ACB, $= M w \left(\frac{2 AC^3}{3 V} + GO\right)$.

§. 441. Perſpicitur ergo hoc momentum, quo nauis per propriam vim conabitur partem A*a* ſubmerſam ex aqua extrahere, perfecte conuenire cum expreſſione ſtabilitatis ſupra inuenta. Ex ratiocinio enim adhibito intelligitur, ſi loco triangulorum AC*a* et BC*b* vera ſpatia eſſemus contemplati, tum ſimiliter loco $\frac{2}{3} AC^3$ momentum ſectionis aquae proditurum fuiſſe, quod in expreſſionem ſtabilitatis ingreditur. Quamobrem nunc clare intelligimus nauem eiusmodi ſitibus obliquis in aqua vndis turbata per ipſam ſtabilitatem reſiſtere: atque ſi nauibus ſufficiens ſtabilitas ſit conciliata, tum etiam eo ipſo poteſtatem eſſe habituras eiusmodi aquae viribus ex ſuperficie non horizontali ortis reſiſtendi; ita vt ad pericula, quae hinc oriri queant, euitanda nouis cautelis non ſit opus.

§. 442. Sic itaque ſatis dilucide expoſuimus, ſi indoles nauis perfecte fuerit cognita, hoc eſt eius ſtabilitas, ſitus centri grauitatis, ſectio aquae, et volumen aquae ſubmerſum, quomodo inclinatio nauis, quae a viribus quibuscunque oritur, definiri debeat. Verum ex hac ipſa doctrina etiam inſignem vtilitatem haurire poſſumus, ad ipſam nauium indolem inueſtigandam, ſi ea nondum ſatis fuerit perſpecta. Quemadmodum enim ex ſtatu nauis cognito et viribus ſollicitantibus cognitis inclinatio nauis poteſt definiri, ita viciſſim, ſi inclinatio fuerit explorata, quae a datis viribus nauem ſollicitantibus generatur, inde poterit natura nauis cognoſci, atque ſi data ſufficiant, ex iis tum locus centri grauitatis, quam ſtabilitas nauis eius-

que

que reliquae proprietates colligi poterunt, quarum rerum cognitio, quae alioquin non tam accurate haberi poteſt, maxime neceſſaria eſt ad euentus omnes determinandos ac prouidendos.

§. 443. Primum autem ex inclinatione, quae a vi quacunque, nauem horizontaliter ſollicitante, circa axem latitudinalem producitur, ſtatim centrum grauitatis ſectionis aquae cognoſcitur. Quodſi enim naui vis applicetur eam vel verſus proram vel puppim inclinans, eiusque vis directio fuerit horizontalis, qua fit vt neque maius neque minus volumen aquae immergatur, tum ſectio aquae, quam in ſtatu inclinato habebit, interſecabit ſectionem aquae, quam in ſtatu libero occupat in ipſo ſectionis aquae centro grauitatis. Scilicet ſi AEBF fuerit ſectio aquae in ſtatu naturali, et, poſtquam nauis a vi horizontali quacunque circa axem latitudinalem fuerit aliquantillum inclinata, notetur interſectio nouae ſectionis aquae cum priore, quae fiat in recta EF, tum haec recta EF tranſibit per centrum grauitatis I ſectionis aquae, cuius poſitio adeo per vnicum experimentum inuenitur. Tab. XII. fig. 4.

§. 444. Ex vnica porro inclinatione diligenter obſeruata locus centri grauitatis ſatis exacte definiri poterit. Quod vt appareat, ponamus nauem in prora A ſurſum trahi a pondere P ope funis A*mn*P circa trochleas *m* et *n* extra nauem fixas ducti, in puppi vero B deprimi a pondere Q in ipſa naui *k* ſuſpenſo, pondera autem P et Q inter ſe eſſe aequalia. Primum ergo manifeſtum, quia horum ponderum alterum ſurſum trahit alterum deorſum, nauis vim grauitatis non mutari, quare poſt inclinationem tantum volumen aquae erit ſubmerſum, quantum Tab. IV. fig. 1.

in

Digitized by Google

in ſtatu nauis libero. Deinde vero, quia vtriusque vis directio eſt verticalis, nauis ad motum horizontalem omnino non incitabitur. Quocirca, dum nauis ab his duobus ponderibus circa axem latitudinalem inclinabitur, eius centrum grauitatis G prorſus immotum manebit.

§. 445. Quo autem ipſa inclinatio curatius obſeruari, atque centri grauitatis locus G determinari queat, conueniet nauem ſecundum longitudinem prope parietem fixum in porta vbi aqua eſt tranquilla conſtitui; latusque nauis parietem verſus inſtrui aliquot ſtylis ad parietem vsque pertingentibus, qui in pariete motum, quem in inclinatione acquirent, deſignent. Sint huiusmodi ſtyli duo in prora A et in puppi B infixi; qui dum nauis inclinatur in pariete binos arcus circulares Aa et Bb depingent, commune habentes centrum in loco, vbi axis latitudinalis per centrum grauitatis nauis G tranſiens parieti occurrit. Datis autem his duobus arcubus Aa et Bb, ſi ſuper medietatibus chordarum normales α G et β G ducantur, earum interſectio G in pariete monſtrabit veſtigium axis latitudinalis, vnde in naui cum ipſe axis latitudinalis tum centrum grauitatis G innoteſcet.

§. 446. Facilius autem verus centri grauitatis locus inuenietur, ſi ante poſitio axis verticalis per centrum grauitatis ducti inueſtigetur, id quod ſequenti modo ſatis commode fieri poterit. Sit AEBF ſectio nauis horizontalis quaecunque per quam tranſeat axis verticalis in G, quod punctum inueſtigari oporteat. Applicentur naui in A et B duae vires horizontales A P et B Q aequales et in plagas oppoſitas trahentes; hisque adeo neque naui motus progreſſiuus neque vlla inclinatio inducetur. His

Tab. XIII. fig. 5.

autem

autem duabus viribus nauis conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis G ductum. Quodſi iam conuerſio admodum parua fuerit ſecuta, notentur puncta *a* et *b*, in quae prora A et puppis B ſint promotae; atque interſectio rectae *ab* cum AB dabit poſitionem axis verticalis in G, eiusque in plano verticali diametrali AB diſtantiam tam a prora quam a puppi.

§. 447. Cum autem hoc modo axis verticalis per centrum grauitatis ductus fuerit recte determinatus, modo ante tradito multo facilius ac tutius ipſe centri grauitatis ſitus in hoc axe verticali determinari poteſt. Hinc enim iam cognitus erit ſitus rectae *g*D verticaliter per centrum gravitatis G ductae; ex quo ſi vnicus arcus A*a* fuerit notatus ex ſola inclinatione eius ad rectam AB ſtatim definietur poſitio centri grauitatis G in recta *g*D. Atque ſi difficile fuerit inclinationem aliquam circa axem latitudinalem, ob ingentem ſtabilitatum, generare, poterit ſimili modo nauis circa axem longitudinalem inclinari, quod facilius effici poteſt, indeque ſitus centri grauitatis G in axe verticali *g*D aſſignari.

§. 448. Si autem cognitus fuerit locus centri grauitatis nauis G, ope experimentorum, quibus inclinatio a datis viribus orta inquiritur, ſtabilitas nauis propoſitae tam reſpectu axis latitudinalis quam longitudinalis poterit explorari eiusque vera quantitas aſſignari. Sit ADB ſectio nauis verticalis ſiue ſecundum longitudinem nauis facta ſiue ſecundum latitudinem, quae tranſeat per axem verticalem CD in quo ſitum eſt centrum grauitatis nauis G. Scilicet ad ſtabilitatem ratione axis latitudinalis explorandam debebit ſectio nauis ADB ſecundum longitu-

dinem accipi, at pro ſtabilitate ratione axis longitudinalis ſectio ADB erit verticalis tranſuerſalis per centrum grauitatis G ducta, vtrumque enim caſum coniunctim pertractabimus, quia tam experimentorum quam concluſionis inde faciendae ratio eſt eadem.

§. 449. In tali ergo nauis ſectione ADB quam deſcripſimus conſtituatur malus MN ſufficientis longitudinis, eique in puncto quodam N ope funis NnP circa trochleam n extra nauim firmatum appendatur pondus P, quo ergo malus MN in directione Nn quae ſit horizontalis trahetur vi $=$ P. Contra vero in puppi B nauis a pondere Q aequali ipſi P trahatur etiam in directione horizontali Bm; quibus duabus aequalibus viribus fiet, vt centrum grauitatis nauis G quieſcat, atque ſimplex inclinatio verſus A producatur, ſiquidem momentum ponderis P praeualeat momento ponderis Q; haecque inclinatio fiet vel circa axem latitudinalem vel longitudinalem prout ſectio ADB fuerit facta vel ſecundum longitudinem vel latitudinem nauis. Perſpicuum autem eſt, ſi malus MN in ipſo axi verticali CD conſtituatur, tum eundem inſeruire poſſe ad experimenta vtriusque generis inſtituenda.

§. 450. Ponamus iam longitudinem mali $MN = f$, eousque ſcilicet ſumtam, vbi ipſi vi P applicatur, atque interuallum CG, quo centrum grauitatis G infra horizontalem AB eſt poſitum, eſſe $= b$. His poſitis momentum vis P ad nauem verſus A inclinandam erit $= P(f+b)$ et momentum vis Q reluctans huic inclinationi $= Qb$. Cum igitur ſit $Q = P$, erit momentum, quo nauis actu verſus A inclinabitur $= Pf$. Sit iam w angulus inclinationis hinc oriundae ſeu eius ſinus, ſi quidem inclinatio poni-

ponitur quam minima, atque ſtabilitas nauis huic inclinationi reſiſtens ſit $= F$, erit $\frac{Pf}{F} = w$, hincque $F = \frac{Pf}{w}$, vnde vera ſtabilitatis quantitas cognoſcitur.

§. 451. Huiusmodi experimenta ad ſtabilitatem nauium reſpectu vtriusque axis principalis cognoſcendam inſtitui poſſunt, vel in ipſa naui, ſi apparatus et occaſio idonea habeatur, vel in exemplo minoris moduli ad ſimilitudinem propoſitae nauis perfecte tam fabricato, quam onerato. Quodſi autem ſtabilitas huiusmodi minoris nauiculae fuerit explorata, ex eo facile ſtabilitas maioris nauis ex ſimilitudine concludi poterit. Cum enim ſtabilitates nauium ſimilium reſpectu axium analogorum teneant rationem quadruplicatam laterum homologorum, haec illatio per regulam auream perfici poterit. Atque hoc modo iudicium ferri poterit, vtrum nauis propoſita viribus, quibus exponi debet, ſuſtinendis par ſit an ſecus.

§. 452. Hactenus inclinationes tam exiguas tantum ſumus contemplati, quae in calculo inſtar reuera infinite paruarum tractari queant, atque de huiusmodi inclinationibus regula data tantum valet, qua inuenimus momentum inclinationis per ſtabilitatem nauis diuiſum praebere angulum inclinationis. Aſſumſimus enim in inclinatione nauis ſectionem aquae ratione magnitudinis ſenſibiliter non mutari, quod euenit cum in omnibus inclinationibus infinite paruis, tum etiam in maioribus, quando latera nauis ſuperficiei aquae perpendiculariter inſiſtunt. Haecque laterum poſitio propemodum maximam partem eligi ſolet, atque etiam debet, prouti ante oſtendimus curuaturae laterum centrum incidere debere in centrum grauitatis nauis ſeu potius in axem longitudinalem.

Digitized by Google

§. 453. Quanquam autem in tali nauium ſtatu inclinationes iam ſatis ſenſibiles pro infinite paruis haberi poſſint, tamen non abs re erit monſtrare, quomodo inclinationes finitae magnitudinis, qua tales ſpectatae, tractari debeant. Hinc enim eo magis elucebit, quibus caſibus inclinationes finitae tanquam infinite paruae conſiderari queant ſine errore, et ſi error committatur, quantus is ſit futurus. Fieri namque poterit, vt inclinatio a datis viribus producta, ſi exacte inueſtigetur, vel maior vel minor ſit proditura, quam regula hactenus vſurpata oſtendit, atque hinc tutius iudicare licebit, quando naues ſubuerſioni fiant obnoxiae, cum omnimoda ſubuerſio ſemper cum inclinationibus ſatis magnis debeat eſſe coniuncta.

§. 454. In hac igitur disquiſitione poſitio laterum nauis prope ſectionem aquae maxime conſiderari debebit, cum ab ea ſectio aquae, quam nauis inclinata occupat, pendeat, haecque adeo inſuper in determinationem inclinationis a datis viribus oriundae ingredietur, atque cum ſtabilitate coniunctim inclinationem veram indicabit. Quod ſi autem inclinatio fuerit quam minima, ratio huius poſitionis laterum nauis in inclinatione afficienda euaneſcet. Quamobrem, ſi quantum laterum nauis conſtitutio inclinationem ſecundum praecedentem methodum inueniendam perturbet, fuerit compertum, tum etiam maxime conuenientem laterum nauis conſtitutionem definire licebit, de qua adhuc nihil, niſi ex alliſione vndarum quicquam definiri potuit.

§. 455. Quo autem hanc inueſtigationem facilius expedire queamus; vnicam nauis ſectionem verticalem, quae normaliter ad eum axem, circa quem fit inclinatio, ſit facta, contemplabimur; atque inclinationem, quae huic tan-

tantum ſectioni inducetur, determinabimus, prouti ſupra in ſtabilitatis determinatione initio fecimus. Hoc tamen non obſtante iſta inueſtigatio latiſſime patere cenſenda erit: primo enim eo referri poterunt omnia corpora priſmatica, quae ſcilicet omnes ſectiones parallelas ei, quam hic conſideramus habeant eidem ſimiles et aequales. Deinceps vero etiam, ſi perpendamus, quomodo expreſſio ſtabilitatis ex totius corporis conſideratione orta comparata ſit ad eam ex vnica ſectione verticali inuenitur; non difficulter hanc ipſam determinationem transferre poterimus ad figuras nauium quaſcunque.

§. 456. Sit igitur ADB eiusmodi ſectio nauis verticalis normaliter facta ad axem circa quem nauis inclinari ponitur; in qua ſit G centrum grauitatis. AB ſectio aquae in ſtatu erecto, et O centrum magnitudinis partis ſubmerſae. Latera porro nauis Aa et Bb ad ſectionem aquae AB quomodocunque ſint inclinata; ponamus autem obliquitatem laterum vtriusque eſſe aequalem, ſeu angulum CAa aequalem eſſe deinceps poſito anguli CBb: neque vero lateribus in ſpatiis Aa et Bb vllam ineſſe curuaturam. Denique etiam aſſumimus, hanc ſectionem ADB duas medietates ADC et BDC habere inter ſe ſimiles et aequales, vti in ſectionibus nauium transuerſalibus, ad quas hanc inquiſitionem potiſſimum accommodari conuenit, euenire ſolet. Tab. XV. fig. 1.

§. 457. Sit iam a viribus quibuscunque huic ſectioni inclinatio inducta, qua recta ab perducta ſit in ſuperficiem aquae, quae adeo nunc erit horizontalis, atque portio aDb nunc erit aquae ſubmerſa. Ponamus autem a viribus ſollicitantibus inclinationem tantum produci, neque iis centrum grauitatis affici; ita vt poſt inclinationem

 volu-

volumen aquae ſubmerſum aequale ſit illi, quod in ſtatu naturali ſub aqua verſatur. Erit itaque triangulum AVa $=$ triangulo BVb, ex qua aequalitate interſectio V novae aquae ſectionis ab cum praecedente AB determinabitur. Hinc igitur ſequitur ob angulos ad V aequales fore $AV.\,aV = BV.\,bV$; atque ob ſinus angulorum CAa et CBb aequales erit etiam $AV.\,Aa = BV.\,Bb$, hincque $Aa : aV = Bb : bV$.

§. 458. Ponatur $AC = BC = a$ ſeu $AB = 2a$, ſinus anguli $CAa = m$, coſinus $= n$, erit anguli CBb ſinus $= m$, coſinus $= -n$. Sit porro anguli inclinationis AVa ſeu BVb ſinus $= s$, et coſinus $\sqrt{(1-ss)} = u$; atque $CV = x$, erit $AV = a+x$, et $BV = a-x$. Ex his reperitur anguli AaV ſinus $= mu + ns$; et anguli BbV ſinus $= mu - ns$; hincque porro $Aa = \frac{s(a+x)}{mu+ns}$; $Bb = \frac{s(a-x)}{mu-ns}$; $Va = \frac{m(a+x)}{mu+ns}$ et $Vb = \frac{m(a-x)}{mu-ns}$. Quamobrem erit trianguli AVa area $= \frac{ms(a+x)^2}{2(mu+ns)}$, et area trianguli $BVb = \frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}$; quae binae areae, cum ſint aequales, erit $(a+x)^2(mu-ns) = (a-x)^2(mu+ns)$ hincque $xx = \frac{2muax - nsaa}{ns}$ et $x = \frac{mua - a\sqrt{(m^2u^2 - n^2s^2)}}{ns}$ ſeu $x = \frac{mua - a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$

§. 459. Prodibit ergo $a + x = \frac{a(mu+ns) - a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$ et $a - x = \frac{-a(mu-ns) + a\sqrt{(mm-ss)}}{ns}$; atque $Aa = \frac{a}{n} - \frac{a}{n}\sqrt{\frac{mu-ns}{mu+ns}}$, et $Bb = -\frac{a}{n} + \frac{a}{n}\sqrt{\frac{mu+ns}{mu-ns}}$, areaque vnius trianguli vel AVa vel $BVb = \frac{mmuaa - maa\sqrt{(mm-ss)}}{nns}$; cui vis, qua vtrumque triangulum ab aqua vrgetur, eſt aequalis. Eius vero directio vtrinque normalis eſt ad horizontalem ab, atque per vtriusque trianguli centrum grauitatis P et Q tranſit. Biſectis ergo Aa et Bb in α et β, erit $VP = \frac{2}{3}V\alpha$, et $VQ = \frac{2}{3}V\beta$; atque ex P et Q in ab demiſſis perpen-

pendiculis Pp et Qq, erit $Vp = \frac{2}{3} Va + \frac{1}{3}(au - ns) Aa$ et $Vq = \frac{2}{3} Vb - \frac{1}{3}(ma + nu) Bb$. ſeu $Vp = \frac{m(a+x)}{3(mu+ns)} + \frac{u(a+x)}{3}$ et $Vq = \frac{m(a-x)}{3(mu-ns)} + \frac{u(a-x)}{3}$.

§. 460. Cum nunc ſit portio aquae ſubmerſa aDb, reſoluatur ea in partes has $ADB + BVb - AVa$. Harum prima ADB, quae repraeſentat volumen naturaliter ſubmerſum V, agit vi $= M$ ponderi nauis, eiusque momentum ad nauem reſtituendam eſt $= M.og$, demiſſis ex O et G in horizontalem ab perpendiculis Gg et Oo, fiet autem $og = GO.s$, ita vt momentum a prima parte ortum ſit $= M.GO.s$. Partis BVb vis reperitur, ſi fiat vt $V : M = BVb \left(\frac{ms(a-x)^2}{2(mu-ns)}\right)$ ad quartam, quae ergo eſt $= \frac{M \cdot ms(a-x)^2}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu-m\sqrt{(mm-ss)}}{nnsV}$ alteriusque partis AVa vis eſt $= \frac{M.ms(a+x)}{2V(mu-ns)} = \frac{Maa(mmu-m\sqrt{(mm-ss)}}{nnsV}$. Vtrius que autem coiunctim momentum ad reſtitutionem tendens erit $= \frac{2Maa(mmu-m\sqrt{(mm-ss)}}{3nnsV} \frac{(2mmua-ssua-mnsx)}{mm-ss}$, quod loco x poſito valore inuento abit in $\frac{2M.msa^3(u-m\sqrt{(mm-ss)}}{3nnV:\sqrt{(mm-ss)}}$ ita vt momentum totale futurum ſit $= Ms\left(GO + \frac{2ma^3(u-m\sqrt{(mm-ss)})}{3nnV\sqrt{(mm-ss)}}\right)$.

§. 461. Si anguli ad A et B fuerint recti, fiet $m = 1$ et $n = 0$, atque momentum virium ad inclinationem praeſcriptam producendam fiet $= Ms\left(GO + \frac{a^3(1+uu)}{3uuV}\right)$; atque ſi angulus inclinationis fiat infinite paruus, vt ſit s infinite paruum et $u = 1$, prodit momentum huic inclinationi producendae par $= Ms\left(GO + \frac{2a^3}{3V}\right)$ quae eſt expreſſio pro ſtabilitate ſupra inuenta. Haec ſi comparetur cum momento, ſi s ponitur finitum, patebit expreſſionem pro s finito maiorem eſſe quam pro s infinite paruo; et hanc obrem vis qua nauis inclinationibus reſiſtit

reſiſtit, in maiori ratione creſcit, quam in ratione ſinuum inclinationum; adeo vt naues inclinationibus magis reluctentur quam ex ſtabilitate hactenus concluſimus.

§. 462. Videamus iam vtrum obliquitas laterum nauis maiorem ſtabilitatem producat an minorem, quam ſi latera verticaliter conſtituantur. Hancobrem ponamus angulos ad A et B quam minime a rectis diſcrepare, ita vt anguli VA*a* coſinus *n* ſit vehementer paruus, fietque $m = \sqrt{(1-nn)} = 1 - \frac{nn}{2} - \frac{n^4}{8}$, et $\sqrt{(mm-ss)} = \sqrt{(uu-nn)} = u - \frac{nn}{2u} - \frac{n^4}{8u^3}$. Quibus valoribus ſubſtitutis obtinebitur momentum ad inclinationem producendam requiſitum $= Ms\left(GO + \frac{a^3(1+uu)}{3uuV} + \frac{nna^3ss(1+uu)}{4u^4V}\right)$. Maius igitur eſt hoc momentum, quam ſi omnino eſſet $n = 0$, at incrementum, cum etiam *s* ſit valde paruum, fiet inſenſibile. Quod ſi autem obliquitas laterum nauis finita ponatur, tum momentum inclinationem producens perpetuo eo erit maius, quo maior fuerit coſinus angulorum ad A et B.

§. 463. Tametſi autem hinc videatur nauibus eiusmodi laterum obliquitatem cum ingenti emolumento induci poſſe, tamen ſi rem penitius ſcrutemur, vtilitatem inde oriundam parui atque etiam nullius momenti deprehendemus. Primo enim cum interſectio V eo magis a puncto medio C remoueatur, quo magis anguli ad A et B a rectis diſcrepant, oſcillationes, quas nauis recipiet, eo maioribus ſucceſſionibus erunt coniunctae. Deinde vero convergentia laterum nauis deorſum ſpectans ſtabilitatem nauis ideo diminuit, quod cum volumen aquae ſubmerſum datae magnitudinis eſſe debeat, profunditas carinae eo maior ſit proditura reſpectu latitudinis AB, quo ipſo ſtabilitas multum diminuitur. Quod ſi autem quis velit latitudinem

Digitized by Google

titudinem nauis ſuperiora verſus tantopere augere, eo ipſo ſtabilitati parum conſulit, dum naui eandem latitudinem maiorem in aquae ſuperficie non tribuit; quo multo maius ſtabilitatis incrementum lucraretur, quam per laterum diuergentiam. Si enim latera nauis in A et B verticaliter deſcendant, tum profunditas carinae, ſalua eius capacitate, maxime diminuitur, hocque ſtabilitas plurimum augetur. Minime autem expedit latera diuergentia deorſum conficere, quia tum latitudo nauis in ſectione aquae praeter neceſſitatem contraheretur, quam perpetuo praeſtat quam ampliſſimam fieri.

§. 464. Quodſi autem in veram cauſam inquiramus, cur maior vis requiratur ad eandem inclinationem naui inducendam, quo maior fuerit laterum nauis obliquitas ad horizontalem AB; reperiemus huius phaenomeni rationem in eo eſſe poſitam, quod dum nauis inclinatur, ſectio aquae *ab* continuo creſcat, a cuius quantitate, vti ſupra vidimus potiſſimum ſtabilitas nauium ſeu vis inclinationi reſiſtendi pendet. Ex quo concludere licet, quo magis ſectiones aquae creſcant auctis inclinationibus nauis, tum conatum nauis ſeſe reſtituendi non ſolum augeri, ſed etiam in maiori ratione augeri quam inclinationes. Contra autem intelligitur, ſi ſectiones aquae fiant minores, dum inclinatio creſcit, tum nauis reluctantiam in minori ratione augeri, atque etiam nulla amplius incrementa capere; quo fiet, vt nauis omnino ſubuertatur. Quam primum enim vis reluctans inclinationi ceſſat augeri, aucta inclinatione, tum vis, a qua haec inclinatio eſt orta, continuo nauem magis inclinabit, donec eam prorſus ſubuertat.

Tab XV. fig. 2. §. 465. Ponamus EADBF eſſe nauis ſectionem verticalem, in qua ſit AB ſectio aquae et ADB portio aquae ſubmerſa, dum nauis ſitum erectum tenet. Inclinetur iam haec nauis a viribus externis, vt aCb fiat ſectio aquae. In hoc iam ſtatu vt nauis detineatur non ſufficit, ſi momentum virium inclinantium aequale ſit conatui proprio nauis ſeſe reſtituendi, verum etiam requiritur, vt, ſi nauis aliquantillum plus inclinetur, conatus ſeſe reſtituendi creſcat: ſi enim pro maiori inclinatione conatus ſeſe reſtituendi ſeu inclinationi reſiſtendi non creſceret, ſed vel eadem maneret vel adeo decreſceret, tum eadem vis, quae minorem inclinationem importauit, etiam maiorem naui induceret, tandemque nauem ſubuerteret. Ad hoc ergo euitandum neceſſe eſt nauis latera ita conſtituere, vt aucta inclinatione ſectiones aquae non ſenſibiliter diminuantur.

§. 466. Haec igitur cautela per totum illud nauis ſpatium eſt obſeruanda, in quod ſectiones aquae, dum naui a viribus externis inclinationes inducuntur, cadunt, vt eae nimirum non multo minores euadant, quam ſectio aquae naturalis AB. Inclinationes autem, quas quaeque nauis ſine ſubuerſionis periculo ſuſtinere debet, vsque ad ſupremum nauis limbum EF pertingunt, eritque adeo inclinatio per angulum FCB, qua ſectio aquae FH ſupremam nauis oram F attingit, maxima, quam nauis ſuſcipere poteſt; ſi enim inclinatio vltra augeatur, tum aqua non ſolum in nauem irrueret ac ſubmergeret, verum etiam ob ſectionem aquae ſubito minorem factam, nauis, etiamſi aqua non intraret, ſubuerſioni reſiſtere non valeret.

§. 467. Si ergo, antequam inclinatio naui totalem ſubuerſionem affert, latera nauis ita collocentur, vt maiores

Digitized by Google

res inclinationes etiam maiores vires requirant; tum angulus FCB determinabit maximam inclinationem, quam nauis ſine ſubuerſionis periculo ſuſtinere poterit. Pendet autem quantitas huius anguli FCB cum ab eleuatione ſupremae nauis orae EF ſupra aquam AB, tum etiam a ſitu ipſius orae F reſpectu rectae AB; quo enim propius ora F ad punctum medium ſummitatis I, manente eleuatione CI eadem, accedit, hoc eſt quo magis latera nauis ſupra aquae ſuperficiem conuergant, tum maxima inclinatio FCB, quae in nauem cadere poteſt, fit quidem maior; contra vero ob diminutam ſectionem aquae FH huic inclinationi reſpondentem, nauis huic inclinationi, etſi maiori, minus reſiſtet, fierique poterit, vt nauis adeo, antequam hanc inclinationem attingat, ob rationes ante allegatas, penitus ſubuertatur.

§. 468. Sin autem ſuprema nauis margo EF latius extendatur, vt abeat in *ef*, et nauis latera ſint A*e* et B*f*, tum nauis quidem ob maiores aquae ſectiones *f b*, quas inclinata occupat, magis inclinationibus reluctatur, verum maximus angulus inclinationis, quam ſuſtinere poteſt, *f*C*b* minor erit quam in caſu praecedente; atque quo magis latera nauis ſuperiora verſus diuergant, ita vt ad eandem altitudinem ſupra horizontem AB aſcendant, eo minor fiet angulus BC*f* qui maximam inclinationem praebet. Manifeſtum autem eſt, fieri poſſe, vt figura EADBF inclinationi BCF, quia eſt maior, aeque vel magis reſiſtat, quam figura *e*ADB*f* inclinationi minori BC*f*; adeo vt adhuc ambigendum ſit, vtrum latera ſurſum divergentia an conuergentia nauibus magis conueniant.

§. 469. Hanc quaeſtionem ergo decidi oportebit ex aliis circumſtantiis, naues ſpectantibus: hucque apprime pertinere videtur, quae ſupra de figura laterum dicta ſunt, vt a fluctibus minimam naui inclinationem inducant. Quamobrem figura laterum AE et BF etiamnum erit commodiſſima, quae latera AE et BF ita habet incuruata, vt centrum habeant in centro grauitatis G. Interim tamen quoque ad figuram portionis aquae ſubmerſae ADB reſpiciendum eſt, quippe per quam ſectiones aquae *ab*, FH quoque determinantur. Tum igitur curuatura laterum ex centro grauitatis G ſumta maxime erit admittenda, quando ſectio aquae FH non multo minor euadit quam AB; ita vt inclinatione aucta ſimul vis nauis ſeſe reſtituendi adhuc ſenſibiliter augeatur.

Cap. VI.

Digitized by Google

❧)o(❧

Cap. VI.

DE ACTIONE GVBERNACVLI.

§. 470.

Quanquam gubernaculum eſt pars nauis externa, nec a nauis indole et figura pendere videtur, tamen eius actio ab intima nauium natura ac onerationis ratione ita pendet, vt ſine his rebus cognitis, determinari nullo modo queat. Eſt autem gubernaculum pars nauis maxime neceſſaria, quippe cuius ope directio curſus non ſolum conſeruatur, verum etiam pro lubitu inmutatur, adeo vt ſine gubernaculo nullus curſus certus inſtitui poſſit. Plurimum igitur intereſt, naues ita eſſe comparatas, vt propoſitus curſus gubernaculi beneficio facile teneri, atque, ſi opus fuerit, celeriter transmutari queat; in hocque conſiſtit vna ex primariis proprietatibus, quae in nauibus poſtulari ſolent.

§. 471. Actio gubernaculi autem in productione motus rotatorii circa axem verticalem per nauis centrum grauitatis tranſeuntem conſiſtit. Per huiusmodi motum rotatorium enim nauis, quando ab vndis aliisue viribus de curſu ſuo declinatur, ſtatim in ſitum debitum reducitur, hocque pacto eius curſus, quem ſequi debet, conſeruatur. Simili vero modo, quando curſus immutari, atque in aliam plagam inſtitui debet, quod ſaepe vſu venire ſolet, ita immutatio ope gubernaculi efficitur, nauique ea directio, quam curſus inſtituendus requirit, conciliatur. Quamobrem antequam gubernaculi actionem examini ſubiiciamus,

 neceſſe

neceſſe erit ad vſum noſtrum colligere, quae in parte ſuperiori de motu nauium rotatorio circa axem verticalem expoſuimus; eo quod in tali motu non ſolum actio gubernaculi conſtet, ſed etiam omnes vires externae eiusmodi motum rotatorium producentes ſeſe actioni gubernaculi immiſceant.

§. 472. Motus rotatorius, quo nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem, determinatur, partim ex momento virium ſollicitantum ad iſtum axem collecto, partim ex momento inertiae, quod tota nauis reſpectu eiusdem axis praebet, ac reperitur, ſi omnes nauis particulae per quadrata diſtantiarum ſuarum ab hoc axe multiplicentur, omniaque haec producta in vnam ſummam coniiciantur. Quod autem ad vires attinet, quibus eiusmodi motus rotatorius in naui produci poteſt, primum notandum eſt, a nulla vi, cuius directio eſt verticalis, motum rotatorium circa axem verticalem generari poſſe. Quotiescunque enim directio vis ſollicitantis parallela eſt axi, circa quem vel motus vel inclinatio produci poteſt, toties eius vis momentum reſpectu huius axis erit nullum; ex eoque ideo nullus ſiue motus ſiue inclinatio naſci poterit.

§. 473. Cum igitur hinc excludendae ſint vires omnes, quae in directionibus verticalibus nauem ſollicitant, videamus, quid vires in directionibus obliquis agentes efficere valeant. Ac primo quidem huiusmodi vires ſemper reſoluere licet, in binas, quarum alterius directio ſit verticalis, alterius horizontalis; harumque ideo ſola poſterior horizontalis ſcilicet, in computum veniet, ſi quidem in motum rotatorium circa axem verticalem inde oriundum inqui-

Digitized by Google

inquirere velimus. Virium vero horizontalium eae quoque ineptae ſunt ad motum rotatorium generandum, quarum directiones per ipſim axem verticalem tranſeunt. Ex quibus perſpicuum eſt motum rotatorium in naui oriri non poſſe, niſi ex viribus, quarum directiones ſint horizontales, et quae per ipſum axem verticalem non tranſeunt.

§. 474. Quodſi ergo vis ſollicitantis directio non fuerit verticalis, ea reſoluatur in binas, alteram verticalem alteram horizontalem, haecque ſola conſideretur. Vt autem motus rotatorius cognoſcatur ex ea vi horizontali oriundus, eius momentum reſpectu axis verticalis inueſtigari oportet. Quod commodiſſime fiet, ſi per directionem eius vis concipiatur ſectio nauis horizontalis, in eaque punctum, vbi ab axe verticali transfigitur, notetur. Tum enim, ſi ex iſto puncto recta normalis ad directionem vis ſollicitantis ducatur, dabit productum ex ipſa vi in rectam illam normalem ortum huius ipſius vis momentum, quod in motu rotatorio producendo conſumetur.

§. 475. Repraeſentet planum chartae ſectionem nauis horizontalem, in qua poſita ſit directio MP vis nauem ſollicitantis, quae ſit $= p$. Axis autem verticalis, qui per centrum grauitatis nauis ductus concipitur, iſtam ſectionem horizontalem in G traiiciat. Si iam ex G in rectam MP ducatur normalis GM, erit productum $p.GM$ ipſum momentum ex vi ſollicitanti p ortum, ex quo motus rotatorius naſcetur; Poteſt vero etiam momentum huius vis p colligi ex alia quacunque recta ex G ad directionem vis MP ducta. Sit enim ex G ad MP ducta recta quaecunque GN, erit momentum $= p.GN.\text{ſin}.GNP$ poſito ſinu Tab. XVI. fig. 1.

toto

toto $= 1$: eſt namque GN. ſin. GNP $=$ GM. Hinc intelligitur momentum rotationem generans duplici modo poſſe augeri; primo enim aucta ipſa vi p momentum in eadem ratione augetur, tum vero quo magis directio diſtet a puncto G, momentum tanto fiet maius.

§. 476. Si ergo nauis vnica vi ſollicitatur hoc modo eius momentum ad motum rotatorium generandum elicietur, atque ſi plures vires vrgeant, ex ſingulis ſimili modo momenta deducantur; quae vel addita vel ſubtracta inuicem, prouti erunt vel conſpirantia vel aduerſantia, dabunt momentum totale, ex quo motus rotatorius ex illis omnibus viribus coniunctis oriundus determinari poterit. Sit iſtud momentum totale $= P$; atque ponatur momentum inertiae totius nauis reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti $= S$, prodibit vis accelerans motum rotatorium $= \frac{P}{S}$. Scilicet motus angularis, ſi quis iam fuerit generatus tempuſculo dt incrementam capiet $= \frac{Pdt}{S}$ niſi reſiſtentia aquae aduerſaretur; vel poſita celeritate angulari iam acquiſita $= n$, fiet $du = \frac{Pdt}{S}$.

§. 477. Noſtrum autem inſtitutum non poſtulat, vt ipſum motum rotatorium, quemadmodum generetur, atque increſcat, definiamus; cum hoc pendeat a reſiſtentia aquae parumque interſit exactiſſime tempus noſſe, quo motus rotatorius per datum angulum abſoluatur. Sufficiet nempe comparatiue definiuiſſe, quibus caſibus celeritas angularis proditura ſit maior minorue. Hocque ſimpliciter cognoſcetur ex formula $\frac{P}{S}$; quae quo fuerit maior, eo incitatior erit motus rotatorius, contra vero quo minor ſit fractio $\frac{P}{S}$, motus rotatorius eo fiet lentior. Quamobrem vt

vt motus rotatorius producatur maxime velox, efficiendum eſt, vt expreſſio $\frac{P}{S}$ fiat, quam fieri poteſt maxima.

§. 478. Motus rotatorius igitur eo fiet celerior, quo maior reddatur valor fractionis $\frac{P}{S}$. Quare ad motum rotatorium maxime accelerandum requiritur primum vt numerator P hoc eſt momentum reſpectu axis verticalis maxime augeatur, quod fiet cum augendo ipſam vim ſollicitantem, tum eius diſtantiam ab axe verticali. Deinde vero etiam valor fractionis $\frac{P}{S}$ creſcet, ſi diminuatur eius denominator S, qui exprimit nauis momentum inertiae reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis ducti. Hoc ergo efficietur, ſi in oneratione nauis grauiſſima onera quam fieri poteſt proxime ad axem iſtum verticalem collocentur. Contrario autem modo motus rotatorius fiet exiguus, ſi valor fractionis $\frac{P}{S}$ maxime diminuatur.

§. 479. Si duae naues concipiantur perfecte ſimiles, ſimiliterque oneratae, tenebunt earum momenta inertiae S rationem quintuplicatam laterum homologorum. Quodſi iam vires ſollicitantes etiam fuerint ſimiles, vt teneant rationem duplicatam laterum homologorum, quod euenit, ſi vires vel a vento vel ab aqua ad nauem irruente proficiſcantur, vbi ſuperficies has vires excipientes hincque ipſae vires quadratis laterum homologorum fient proportionales. Momenta ergo harum virium erunt in ratione triplicata laterum homologorum; ex quo motus rotatorii in nauibus ſimilibus a viribus ſimilibus orti tenebunt inter ſe rationem reciprocam duplicatam laterum homologorum; ita vt nauis duplo longior et octuplo ponderoſior receptura ſit motum rotatorium quadruplo tardiorem.

§. 480. Poterit autem ipſe motus rotatorius hoc eſt eius celeritas angularis ad quoduis temporis momentum ex principiis in libro ſuperiori ſtabilitis accurate definiri: fierique hoc poterit tam reſiſtentiae aquae ratione habita quam ea neglecta. Ponamus igitur primo nauem, dum a virium momento P circa axem verticalem rotatur nullam ab aqua perpeti reſiſtentiam; ſitque celeritas quam nauis durante motu rotatorio iam eſt nacta tanta, vt punctum nauis, quod ab axe illo verticali diſtat interuallo $= f$, habeat celeritatem debitam altitudini v hacque celeritate nunc quidem iſtud nauis punctum circa axem verticalem motu circulari circumferatur. His poſitis, ſi puncto temporis illud nauis punctum progrediatur per arculum $= ds$, interea motus rotatorius ita accelerabitur, vt fiat $dv = \frac{Pfds}{S}$; vnde ſi virium momentum P maneat conſtans erit integrando $v = \frac{Pfs}{S}$.

§. 481. Quodſi iam tempus, quo punctum nauis aſſumtum, ab axe verticali diſtans interuallo f, circumfertur per arcum circuli s, ponatur $= t$, erit $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}} = \frac{ds\sqrt{S}}{\sqrt{Pfs}}$ hincque integrando $t = \frac{2\sqrt{Ss}}{\sqrt{Pf}}$. Denotat hic autem $\frac{s}{f}$ angulum, quem nauis iam circa axem verticalem motu rotatorio abſoluit, qui angulus ſi ponatur $= \alpha$, isque datae magnitudinis puta vel rectus vel dati numeri graduum accipiatur, erit tempus quo nauis motum rotatorium per iſtum angulum abſoluit vt $\sqrt{\frac{S}{P}}$. In caſu ergo, quo tam nauis quam vires ſollicitantes ſimiles accipiuntur, erunt tempora, quibus naues per aequales angulos rotantur, in ratione ſimplici directa laterum homologorum. Ipſe autem motus ob reſiſtentiam neglectam erit vniformiter acceleratus.

§. 482. Vt autem nunc, quantum reſiſtentia aquae hunc motum rotatorium perturbet, perpendamus; ponamus aquae ſectionem eſſe figuram $aabb$, latera ab et ab habentem parallela, quae autem ad aa et bb terminetur arcubus circularibus aAa et bBb, centrum habentibus in axe verticali G, ſintque huic figurae omnes ſectiones horizontales nauis per totam carinam ſimiles et aequales, et carinae profunditas ſit $= c$, ſemilatitudo $MP = NQ = b$, et ſemilongitudo $AG = BG = a$. Licebit enim ad calculi commoditatem figuram nauium aliquantum a veritate abhorrentem fingere, cum aberratio in nauibus ſimilibus, quas hic potiſſimum contemplamur ſimilis ſit futura, ita vt in ratione, quae inter motus rotatorios nauium ſimilium intercedit, error nullus ſit oriturus, quantumuis vera nauium figura ab hac aſſumta diſcrepet. Tab. XVI. fig. 2.

§. 483. Habeat nauis iam motum rotatorium tantum, vt punctum nauis, ab axe verticali G diſtans intervallo $= f$, circumferatur celeritate altitudini v debita, atque conſideretur particula Mm, quae contra aquam irruet in directione Mp normali ad MG, ſit $GM = z$; et $GP = x$; erit $Mm = dx = \frac{zdz}{x}$ ob $zz = bb + xx$. Altitudo iam debita celeritati, qua elementum Mm circa G rotatur, erit $= \frac{zzv}{ff}$, et cum eius directio ſit Mp normalis ad MG, reſiſtentia erit quadrato ſinus anguli pMb, quod eſt $= \frac{xx}{zz}$, proportionalis, vnde reſiſtentia, quam patitur particula Mm ab aqua, erit $= dx.\frac{zzv}{ff}.\frac{xx}{zz} = \frac{vxxdx}{ff}$. In computum ducatur tota carinae profunditas c, erit reſiſtentia, quam carinae elementum ipſi Mm reſpondens patitur $= \frac{cvxxdx}{ff}$.

Digitized by Google

§. 484. Tota ergo reſiſtentia, quam nauis latus aE patitur erit, $= \frac{cvx^3}{3ff}$, facto $x = G\alpha = \surd(aa-bb)$, et quia latus oppoſitum bF ſimili modo in aquam impingit, erit eius reſiſtentia pariter $= \frac{cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$, ita vt reſiſtentia nauis totalis motui rotatorio reluctans futura ſit $= \frac{2cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Huius autem reſiſtentiae quantitas, vt cum viribus ſollicitantibus comparari poſſit, ad pondus eſt reducenda, id quod facile fit, cum reſiſtentia hoc modo expreſſa aequalis ſit ponderi voluminis aquae, cuius capacitas eſt $= \frac{2cv(aa-bb)^{\frac{3}{2}}}{3ff}$. Quare cum voluminis aquae, quod aequale eſt portioni nauis aquae ſubmerſae V, pondus habeat aequale nauis ponderi M, fiet reſiſtentia = ponderi $\frac{2Mc(aa-bb)^{\frac{3}{2}}v}{3Vff}$.

§. 485. Quantum autem iſta reſiſtentia motum rotatorium afficiat, ex eius momento colligi poterit. Vis autem quam portiuncula Mm ſuſtinet, quae eſt $= \frac{cvxxdx}{ff}$, directionem habet MP normalem ad ſuperficiem aE, eiusque adeo momentum reſpectu axis verticalis G erit $= \frac{cvx^3dx}{ff}$; vnde momentum reſiſtentiae, quam latus aE, patitur erit $= \frac{cvx^4}{4ff} = \frac{(aa-bb)^2cv}{4ff}$ poſito $x = G\alpha = \surd(aa-bb)$. Quia iam tantam quoque reſiſtentiam latus bF patitur, erit momentum totalis reſiſtentiae ad motum rotato-

Digitized by Google

tatorium impediendum $= \frac{(aa-bb)^2 cv}{2ff}$. In quod, quia pondus introduci debet, vt fiat momento virium P homogeneum, habebitur volumine nauis aquae ſubmerſo V et pondere nauis P in ſubſidium vocatis momentum ex reſiſtentia ortum $= \frac{M(aa-bb)^2 cv}{2Vff}$.

§. 486. Quodſi iam ponamus nauis punctum, quod ab axe G diſtat interuallo $= f$, conuerti tempuſculo dt per arculum circularem ds atque celeritatem interea ita augeri, vt altitudo debita v incrementum capiat dv, propter momentum virium et reſiſtentiae, quo nauis actu vrgetur $= P - \frac{M(aa-bb)^2 cv}{2Vff}$ erit $\frac{dv}{f} = \frac{P\,ds}{S} - \frac{M(aa-bb)^2 cv\,ds}{2SVff}$; ex qua aequatione celeritas rotationis ad quoduis temporis momentum poterit definiri. Quoniam autem motus rotatorius ob reſiſtentiam mox fiet aequabilis, et $dv = 0$, ſtatim habebimus celeritatem illam, qua nauis continuo ab motus initio aequabiliter rotari perget, quae definietur per hanc aequationem $\frac{v}{ff} = \frac{2PV}{M(aa-bb)^2 c}$ ex qua ipſa celeritas angularis, quae eſt $= \frac{\sqrt{v}}{f}$ prodit $= \frac{\sqrt{2PV}}{(aa-bb)\sqrt{Mc}}$.

§. 487. Concipiamus iam duas naues perfecte ſimiles, quae etiam a viribus ſimilibus circa axes verticales circumagantur, ſit maioris profunditas carinae $= C$ minoris $= c$, quae laterum homologorum vicem ſuſtineant. Pertineat formula inuenta pro celeritate angulari ad nauem minorem; erit P vt c^3; V vt c^3; $aa-bb$ vt cc et Mc vt c^4; ex quibus orietur celeritas angularis vt $\frac{c^3}{c^4}$ ſeu vt $\frac{1}{c}$. Ex quo colligitur nauium ſimilium a viribus ſimilibus ad motum rotatorium incitatorum celeritates angulares, quas circa axem verticalem adipiſcuntur, eſſe in ratione ſimplici inverſa laterum homologorum.

§. 488. His igitur praeparatis poterimus actionem gubernaculi tam explicare quam determinare. Ac primo quidem in examen venit vis externa gubernaculum vrgens, quae ex allapſu aquae contra gubernaculi ſuperficiem oritur: de qua vi iam ergo conſtat, eius quantitatem tenere rationem compoſitam ex ſimplici ſuperficiei gubernaculi, in quam aqua illidit, ex ratione duplicata ſinus anguli, ſub quo fit alliſio atque in ratione duplicata celeritatis, qua aqua impingit. Harum rerum, quibus vis a gubernaculo excepta determinatur, vnica tantum, nempe angulus, ſub quo aqua gubernaculum impellit, ab arbitratu naucleri pendet, binae reliquae vero cum per figuram nauis, tum per motum relatiuum nauis in aqua determinantur, ita vt iis, prout occaſio tulerit, vti oporteat; neque eas pro lubitu moderari liceat.

§. 489. Praecipua autem cauſa, a qua gubernaculum vim accipit idoneam ad nauem circa axem verticalem conuertendam, poſita eſt in motu aquae aduerſus gubernaculum. Talis ergo vis exiſtit in aqua quiescente, quando nauis quomodocunque mouetur, tum enim aqua reſpectu gubernaculi motum habebit, quo in gubernaculum incurrens illi vim inferet. Quando autem aqua ipſa mouetur, tum gubernaculum ab aqua vim ſentiet, dummodo nauis non eodem motu, quo aqua mouetur. Quodſi enim vel nauis in aqua quiescente quieſcat, vel in aqua mota parem habeat motum ſecundum eandem directionem; gubernaculum, in quocunque ſitu detineatur, nullam vim ab aqua ſentire poterit. Quare vt gubernaculum vim exerere queat, neceſſe eſt, vt aut nauis in aqua quiescente moueatur, aut in aqua mota vel quieſcat, vel motu ab aquae motu diuerſo promoueatur.

§. 490. Siue autem ſola nauis moueatur ſiue tam aqua quam nauis ſimul diuerſo motu ferantur, totus motus per regulas cognitas vel in ſolam aquam vel in ſolam nauem transferri poterit; quo ipſo repraeſentatio non parum adiuuabitur. Ponamus ergo aquam quiescere, quia vniuerſam theoriam ad hunc caſum potiſſimum accommodari convenit, atque nauem in aqua moueri. Hic vero ſtatim occurrunt duo caſus, qui ſeorſim tractari debent; primus ſcilicet ſi nauis curſu directo ſecundum ſpinae directionem progrediatur; alter vero obtinet, ſi nauis motu obliquo ſecundum directionem a ſpinae directione diuerſam feratur. Ad hosque duos caſus referri poterunt omnes, qui in aqua mota ſeu fluuio ſiue nauis quieſcat ſiue moueatur locum habere poſſunt.

§. 491. Sit AEBF ſectio nauis horizontalis vel in Tab. XVI. ſuperficie aquae vel infra eam facta, nauisque progrediatur fig. 3. curſu directo ſecundum directionem BA, ita vt A ſit prora, B puppis. Repreſentet vero BC gubernaculum mobile circa axem B, et videamus cuiusmodi effectus ex quovis ſitu gubernaculi, vti ſi in ſitu B*c* detineatur, in motu nauis vel eius directione naſci debeat. Iſte autem effectus ante omnia deduci debet, ex motu, quo aqua in regione poſteriori BMC reſpectu nauis agitabitur; ex eiusque cum quantitate tum directione concludi poterit, quanta vi gubernaculum in ſitu quocunque B*c* detentum vrgeatur. Primo quidem perſpicuum eſt, ſi nauis omni latitudine EF careret, tum aquam penitus in quiete eſſe permanſuram, vel reſpectu nauis motum eſſe habituram aequalem illi, quo nauis progreditur, at in directione contraria, nempe in regione B*c*C aqua motum habitura eſt in directione QM parallela ipſi AB et celeritate ipſi nauis celeritati aequali.

§. 492.

§. 492. Quodſi autem latitudo nauis EF in computum ducatur, mox apparebit aquam in regione BC*c* non in directione QM affluere poſſe, cum ob nauis corpus non detur ſpatium, vnde aqua in directione QM venire poſſit. Dum quidem nauis, poſtquam corpore ſuo ſpatium BC*c* occupauit, hoc ſpatium relinquit, id vacuum non manet, ſed continuo aqua repletur. Vnde autem aqua veniat, quae continuo ſpatia poſt nauem relicta occupet et adimpleat, tam accurate definiri non poteſt, veriſimile autem eſt, hanc aquam vnde quaque confluere, maxime autem eam aquam ſubingredi, quae circa latera nauis E et F verſatur. Quia enim nauis aquam praeſe propellit, haec ipſa magis locum vacuum, quo ſe recipiat, affectabit.

§. 493. Planiora haec fient, ſi naui perfectam quietem tribuamus, contra vero ponamus vniuerſam aquam inſtar fluuii in directione contraria *a*A eadem celeritate, quam ante naui affinximus; perſpicuum enim eſt, in hac hypoteſi eadem phaenomena ſequi debere, quae in antecedenti, vbi naui in aqua quieſcente motum in directione A*a* adiudicauimus. Aqua igitur in directione *a*A ad veniens in proram impinget, atque ad latera vtrinque deflectet, ex quo in regione K mouebitur in directione K L; cum autem ad L pertigit, vbi latitudo nauis non multum variatur, naturalem ſequetur directionem LP, donec latera nauis retrorſum conuergant; tum autem motum ſuum iterum inflectet iuxta nauis latera, vt tandem in directione obliqua PM in gubernaculum incurrat. Inflexionem autem hanc aquae iuxta nauis latera ope calculi definire haud licet, propter defectum principiorum hydraulicorum

ſicorum huc ſpectantium, ex quo acquieſcere debemus concluſionibus generalibus, quas experientia ducti formare valebimus.

§. 494. Inflexus iſte curſus aquae iuxta nauis latera eueniet eo facilius, quo minor fuerit nauis curuatura; hoc eſt quo minor fuerit nauis latitudo EF prae longitudine AB, et quo lentius latera vbique verſus B conuergant. Cum enim motus aquae inſitus teneat directionem AB, hanc directionem vi propria conſeruare conatur, eoque magis declinationi ab hoc curſu reſiſtet, quo ea fuerit maior. Quia etiam, ſi latera nauis verſus puppim vehementer conuergant, nauique prope puppim magna tribuatur latitudo, fieri poteſt, vt aqua in ſuo curſu latera nauis penitus deſerat, atque poſt nauem ſpatium aqua tranquilla repletum relinquat, quam perpetuo praeterfluat. Quia enim hoc caſu latera nauis ſubito inflectuntur puppimque claudunt, aqua tantopere et tam ſubito curſum ſuum inflectere non valet.

§. 495. Sic, ſi AEBF fuerit ſectio nauis horizontalis in aqua facta, eaque puppim B verſus ſubito conuergat, aqua latera nauis in S et T vsque alluens curſum ſuum iuxta latera SB et TB inflectere non poterit, ſed latera deſerendo motum ſuum in directionibus SV et TV continuabit. Quo fiet, vt poſt nauem ſpatium VSBT maneat aqua tranquilla repletum, in quo adeo gubernaculum BC nullam vim ſentire poterit. Idem phaenomenon euenire oportet, ſi nauis in directione BA progrediatur in aqua quieſcente, vbi etiam poſt nauem portio aquae perpetuo eadem nauem comitabitur, in qua gubernaculum nullum effectum exerere poterit. Hoc probatur quotidiana expe-

rientia, qua conſtat naues poſt ſe plerumque ſecum ducere quampiam aquae portionem, quae nauem per longiſſima interualla ſequatur; haecque aqua vocari ſolet aqua mortua, eo quod in nauem nullam vim exerere poteſt.

§. 496. Quando ergo nauem eiusmodi aquae mortuae copia ſequitur, gubernaculo nullus agendi locus relinquitur, id quod maximum eſt vitium, quod in naues cadere poteſt. Quamobrem maxime cauendum eſt, ne naues puppim verſus nimis latae conſtruantur, lateraque ad puppim B nimis cito et ſubito conuergant. Hocque praeceptum conſtructores nauium experientia edocti ſatis diligenter obſeruare ſolent, dum partem nauium ſub aqua verſantem puppem verſus lentiſſime conuergentem conſtituunt, vt copia aquae mortuae quam maxime diminuatur. In ſuprema aquae ſuperficie quidem puppi tam acuta cuſpis ob alias circumſtantias conciliari non poteſt; contra autem ſub aqua nauis ſectiones horizontales maxime cuſpidari ſolent, donec in imo loco omni latitudine carent.

§. 497. Hanc igitur ob rem in ſuprema aquae ſuperficie gubernaculum nullum edere poteſt effectum, atque ſuprema aquae ſuperficies pone nauem reſpectu nauis ſtagnabit eritque aqua mortua. Sub aqua vero, vbi carina verſus puppim incipit eſſe ſatis gracilis, aqua in gubernaculum incurret, et aqua mortua ceſſabit; hicque affluxus continuo deſcendendo creſcet, quoad in imo loco, vbi tota nauis in ſpinam deſinit, aqua ſecundum ipſius ſpinae directionem moueatur, eandemque habeat celeritatem reſpectu nauis quieſcentis, quam habet nauis reſpectu aquae quieſcentis. Maximum ergo effectum gubernaculum praeſtabit in imo loco, ita vt eius pars ſuperior imme-

dia

diate ſub aqua ſita propemodum nullius ſit vſus. Quamobrem conuenit gubernaculo in infima parte maximam tribui latitudinem BC, quia ab ea potiſſimum omnis gubernaculi effectus proficiſcitur.

§. 498. Quoniam, ſi puppis ſubito clauditur, aqua in ſpatium aliquod poſt nauem omnino non affluit, ſed ſpatium SVT aqua quieſcente repletum relinquit, manifeſtum eſt, ſi puppis magis fiat cuſpidata, tum portionem aquae quieſcentis diminui tandemque penitus ceſſare; vt in figura 3. Interim tamen etiam tum aqua non pleno curſu in ſpatium BC*c* irruet, ſed tam in directione obliqua PM, quam etiam minori celeritate, quam eſt ea, qua aduerſus proram ſecundum *a*A impingere ponitur. Quamobrem cum vtrinque effectus gubernaculi infringatur, maximi momenti hoc eſt praeceptum, vt naues puppim verſus, in parte aquae ſubmerſa, quantum fieri poteſt, graciles efficiantur, et capacitas diminuatur. Quemadmodum etiam in praxi his in locis cauitas nauium omnino adimitur, ſolusque paries, qui lignum mortuum vocatur, relinquitur. Tab. XVI. fig. 3.

§. 499. His expoſitis videamus, quantam vim aqua iuxta puppim in gubernaculum impingens exerat. Ac primo quidem perſpicuum eſt, ſi gubernaculum BC in directum cum ſpina nauis fuerit conſtitutum, tum vires, quas vtrinque ab aqua allabente ſuſtinet, ſe mutuo deſtruere. Quia enim ponimus curſum aquae fieri in directione *a*A, is verſus puppim vtrinque aequaliter inflectetur, ideoque eadem vi in vtramque gubernaculi BC ſuperficiem impinget, ex quo aequilibrium oriatur neceſſe eſt. Quodſi autem gubernaculum BC in ſitum obliquum B*c* redigatur, angulusque CB*b* minor fuerit quam angulus BC*p*, quem

aquae pC cum ſpina ABC facit, tum quidem etiamnum aqua in vtramque ſuperficiem gubernaculi vim exeret, at impetus in ſuperficie Bc ab allapſu aquae PM maior erit quam in parte oppoſita, hincque vis reſultabit gubernaculum in directione MN vrgens, quae nauem circa axem verticalem rotare conabitur.

§. 500. Sin autem angulus CBc maior fuerit quam angulus BCp, tum aqua in parte pBc ceſſabit vllum effectum in gubernaculum Bc exerere, hincque gubernaculum omnem actionem aquae PM ex altera parte allabentis ſuſtinebit, ex qua vim definiri conueniet, qua nauis circa axem verticalem circumagetur. Sunt itaque hi duo caſus, quibus angulus CBc vel minor eſt vel maior quam angulus BCp, penitus a ſe inuicem disiuncti, neque lege continuitatis inter ſe connexi, ita vt vtrumque ſeorſim calculo expediri oporteat. Deinde etiam notandum eſt obliquitatem aquae allabentis ſeu angulum BCp per totam profunditatem variari, eumque in vna nauis regione prope ſpinam prorſus euaneſcere; quae varietas calculum redderet inſuperabilem. Hanc ob rem obliquitatem BCp mediam ſtatuemus inter maximam et minimam eamque toti profunditati tribuemus.

§. 501. Ponamus igitur per totam gubernaculi altitudinem aquam incurrere vtrinque in directione PM et pC, angulique PMQ vel pCB ſinum eſſe $= m$ coſinum n, exiſtente, id quod ſemper aſſumimus, ſinu toto $= 1$, ita vt ſit $mm + nn = 1$. Ac primo quidem ſit angulus CBc minor angulo BCp, quo caſu aqua vtrinque in gubernaculum impetum faciet: ſitque anguli CBc ſinus $= s$, coſinus $= u$. His poſitis angulus PMB ſub quo aqua in parte PM impinget,

pinget, erit aequalis ſummae angulorum $CBc + pCB$. eiusque ideo ſinus erit $= mu + ns$. Contra vero ex altera parte aqua pC irruet in gubernaculum ſub angulo $pCB - CBc$, cuius ſinus eſt $mu - ns$. Quum igitur alter impetus alteri ſit contrarius, ex exceſſu, quo alter alterum ſuperat, effectus aquae in gubernaculum colligi debet.

§. 502. Cum igitur ſub iſtis angulis aqua vtrinque in gubernaculum impingat, ſit ſuperficies gubernaculi, quae vtrinque impetum aquae excipit $= bb$, atque M ſit iſtius vtriusque ſuperficiei centrum grauitatis, in quo tota vis aquae collecta eſt aeſtimanda, quippe per quod media directio impetus aquae tranſit, et ad ſuperficiem eſt normalis. Quodſi ergo velocitas aquae in regione puppis ponatur debita altitudini v. Vis aquae ex parte PM impingentis aequivalet ponderi voluminis aquae, quod eſt $= bbv(mu + ns)^2$. Ex parte oppoſita autem vis aequiualebit ponderi voluminis aquae, quod eſt $= bbv(mu - ns)^2$, quae vis, quia illi eſt contraria, remanebit vis ex plaga PM proueniens $= 4mnsubbv$. Quae, vt ad pondus reducatur, poſitis pondere nauis $=$ M et volumine ſub aqua verſante $=$ V, erit ea $= \frac{4Mmnsubbv}{V}$.

§. 503. Huius iam vis media directio erit recta MN, per centrum grauitatis M ſuperficiei gubernaculi, quae quidem ſub aqua verſatur, ducta et ad ſuperficiem Bc normalis. Hanc ob rem ab iſta aquae in gubernaculum actione nauis vrgebitur in directione MN vi $= \frac{4Mmnsubbv}{V}$, ſi quidem angulus CBc fuerit minor quam angulus BCp ſeu $mu > ns$. Quodſi autem angulus CBc maior fuerit angulo BCp, tum ob euaneſcentem alteram vim $bbu(mu - ns)^2$ in calculo naſcetur formula longe diuerſa; fietque

 vis

vis, qua nauis in directione M N vrgebitur $= \frac{Mbbv(mu+ns)^2}{V}$, haecque adeo expreſſio locum habebit ſi fuerit $mu < ns$.

§. 504. Quo autem nauis hanc vim, quam aqua in gubernaculum Bc exerit, ſentiat, neceſſe eſt vt gubernaculum in iſto ſitu tanta vi detineatur, quae ſufficiat ad vim aquae ſuſtinendam. Si enim gubernaculum non teneretur, maxima vis aquae pars impenderetur ad gubernaculum circa axem B rotandum, quoad quieſceret in ſitu BC, hocque motus ipſius nauis parum afficeretur. Quamobrem ad gubernaculum in ſitu Bc detinendum tanta vis a gubernatore, qui clauum tenet, eſt applicanda, cuius momentum reſpectu axis B, circa quem gubernaculum mobile exiſtit, aequale ſit momento vis aquae reſpectu eiusdem axis. Hoc eſt ſi ponatur axis iſte B circa quem gubernaculum mobile eſt, verticalis, et diſtantia $MB = k$, debebit eſſe momentum vis, quod ad gubernaculum in ſitu Bc retinendum requiritur, $= \frac{4Mmnsubbvk}{V}$ caſu quo $mu > ns$, altero vero caſu quo $ns > mu$, debebit illud momentum eſſe $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V} k$.

§. 505. Gubernaculum autem dirigi atque detineri ſolet ope temonis, qui eſt vectis heterodromus mobilis circa axem B, quem axem adhuc verticalem ponimus, poſtea inueſtigaturi, quantum obliquitas huius axis diſcriminis afferat: reuera enim iſte axis in nauibus oblique ad horizontem conſtitui ſolet. Quodſi ergo huius vectis ſeu temonis brachium interius quod gubernator tenet, habeat longitudinem $= f$. atque vis, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in ſitu Bc conſeruandum ponatur $= P$, erit momentum huius vis ex natura vectis $= Pf$. Quare caſu quo $mu > ns$ debet eſſe $Pf = \frac{4Mmnsubbv}{V} k$, altero

tero vero caſu, quo habetur $CBc > BCp$ ſeu $mu < ns$ oportet eſſe $Pf = \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V} k$.

§. 506. Si ergo gubernaculum in ſitu Bc a gubernatore firmiter detineatur, vi, quam modo definiuimus, nauis ipſa ſollicitabitur in directione MN, vi vel $= \frac{4Mmusubbv}{V}$ vel $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V}$, illa ſcilicet ſi $mu < ns$, hac ſi $mu < ns$. Atque quia axem B, circa quem gubernaculum mobile exiſtit, ponimus verticalem, erit directio media ex vi aquae orta MN horizontalis. Quodſi autem vim P, qua gubernator clauum tenet in computum ducere velimus, ambo illi caſus, quibus eſt vel $mu > ns$ vel $mu < ns$ in vnum recident; fietque vtroque caſu vis, qua nauis inclinatione horizontali MN ſollicitabitur $= \frac{Pf}{k}$. Atque ſic ex vi a gubernatore impendenda P, ex longitudine temonis f, et ex diſtantia centri grauitatis gubernaculi M ab axe B quae eſt k, innoteſcit perpetuo vis, quam nauis ſuſtinet, eiusque directio MN.

§ 507. Ab hac ergo vi, quia eius directio eſt horizontalis, primum motus nauis progreſſiuus afficietur, idque pari modo, ac ſi eadem vis in directione ipſi MN parallela naui in ipſo centro grauitatis eſſet applicata: hincque ſi ante curſus nauis fuerit directus ſecundum directionem BAa, per vim gubernaculi naui curſus aliquantulum obliquus inducetur, haecque obliquitas pendebit cum a nauis celeritate tum a viribus nauem in directione Aa propellentibus. Praeterea ſi punctum M vel altius vel humilius fuerit poſitum quam centrum grauitatis nauis, nauis quoque inclinabitur circa axem horizontalem Et quia punctum M potiſſimum infra centrum grauitatis nauis cadit, latus nauis EA deprimetur, contra vero latus FB eleuabitur pro ratione ſtabilitatis.

§. 508.

§. 508. Tandem autem ab hac vi nauis circa axem verticalem per centrum grauitatis trenſeuntem conuertetur, in quo principalis gubernaculi ſcopus verſatur, et ad quem hic nobis potiſſimum eſt reſpiciendum. Quoniam igitur ipſa vis eſt $= \frac{Pf}{k}$, eiusque directio horizontalis MN, ſi axis verticalis nauis hanc ſectionem horizontalem AEBF in G traiicere ponatur, erit iſtius vis momentum ad nauem circa axem verticalem conuertendam $= \frac{Pf}{k}(BG + BN) \frac{BM}{BN}$; eoque prora nauis A in regionem $A\alpha$ detorquebitur, ita vt directio nauis, quae ante erat BA, verſus α inflectatur. Ponatur $BG = a$, ob ſinum $CBc = s$ et coſinum $= u$ erit $\frac{BM}{BN} = u$, et $BN = \frac{k}{u}$, ex quo momentum vis nauem conuertentis erit $= \frac{Pf}{k}(a + \frac{k}{u})u = \frac{Pf(au + k)}{k}$.

§. 509. Ceteris paribus igitur eſt vis gubernaculi nauem conuertens, vt vis P, quam gubernator adhibere debet ad gubernaculum in ſitu ſuo conſeruandum. Ex quo intelligitur, tum demum gubernaculum nihil valere ad nauem conuertendam, ſi nulla vi opus fuerit ad gubernaculum continendum. Euenit hoc autem ſi gubernaculum in ſitu BC fuerit conſtitutum, vbi ob $s = 0$ fit etiam vis $P = 0$. (§. 505); quo in loco gubernaculum in ſitu aequilibrii verſatur. At cum in hoc ſitu aqua vtrinque in gubernaculum irruat ſub angulo BCp, hic aequilibrii ſitus erit violentus, eo quod vires contrariae ſe multo deſtruunt. Quare ſi gubernaculum caſu de hoc ſitu declinetur; vel ſubinde, quod ob ſummam circumſtantiarum mutabilitatem facile euenire poteſt, vires illae contrariae non inter ſe ſint perfecte aequales, gubernaculum in ſitu BC non erit in aequilibrio abſoluto ſed vel in hanc vel illam plagam vrgebitur.

§. 510.

§. 510. His igitur caſibus ſi gubernator voluerit gubernaculum in ſitu directo BC conſeruare, vim adhibere debebit, ideoque nauis, etſi gubernaculum ſitum tenet directum BC, tamen conuertetur. Quamobrem, ſi nauis directio non debeat inflecti, gubernaculum non tam in ſitu directo BC erit detinendum, quam eo in ſitu, in quo ſine vi manebit; curſusque nauis invariatus reſtabit, ſi clauo nulla vis inferatur, quemcunque ſitum teneat gubernaculum. Cum igitur ob aquam vtrinque ad gubernaculum BC oblique impingentem, vtraque vis non perpetuo ſit aequè vehemens, vtique eueniet vt gubernaculi ſitus aequilibrii, a quo nauis nullam vim ſuffert, non perpepetuo in ſitum directum CB incidat, ſed modo in hanc modo illam regionem deflectat. Hancque ob cauſam gubernaculo ſpatium aliquod concedi debet, in quo libere fluctuare poſſit, ſi quidem nauis directionem inflecti non oporteat.

§. 511. In tali ergo libero ſpatio, quod gubernaculo conceditur, gubernaculum circa axem B oſcillationes peraget, quas inueſtigare operae pretium erit. Ad hoc ponamus gubernaculi cum temone, quippe qui ſimul movetur, reſpectu axis B momentum inertiae eſſe $=$ G et quia momentum virium aquae, quae gubernaculum in ſitu obliquo Bc, quem minime a ſitu directo BC diſcrepare ponimus, conſtitutum in ſitum BC redigere conantur eſt $= \frac{4Mmnsubbvk}{V}$, vbi eſt s ſinus anguli CBc percurrendi, quem minimum aſſumimus, ideoque erit coſinus $u = 1$. Cum igitur ſpatium percurrendum ſit vt s, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni cum oſcillationibus gubernaculi, $= \frac{GV}{4Mmnbbkv}$. His igitur oſcil-

lationibus niſi omnis libertas concedatur, nauis directionem ſuam conſeruare non poterit.

§. 512. Hae ergo gubernaculi vibrationes celeriores erunt eoque vehementiores, quo minor fuerit in numeratore valor ipſius G, in denominatore autem quo maior fuerit valor ipſius $mnbbkv$, ob valorem $\frac{V}{4M}$ conſtantem. Ob denominatorem ergo, qui maximae variabilitatis eſt capax, primum erunt oſcillationes eo vehementiores, quo propius angulus obliquitatis BCp, ſecundum quem aqua circa puppim mouetur, ad angulum ſemirectum acceſſerit. Deinde etiam oſcillationum vehementia creſcet, quo maior fuerit altitudo v, hoc eſt quo celerius nauis in aqua progreditur. His igitur caſibus niſi gubernaculum perfecte liberum relinquatur vt motum oſcillatorium recipere poſſit, nauis directionem ſuam conſeruare non poterit, verum modo in hanc modo in illam plagam deflectetur. Hancque cautelam nautae probe obſeruare ſolent, dum gubernaculo in turbidis potiſſimum tempeſtatibus ſpatium ſatis amplum concedere iubent, in quo libere agitetur.

§. 513. Quo autem ipſam vim gyratoriam, qua navis a gubernaculo circa axem verticalem conuertetur, curatius determinemus, ſit momentum inertiae totius nauis reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis tranſeuntis $=$ S; erit acceleratio nauis circa hunc axem orta vt $\frac{Pf(au+k)}{Sk}$. Ex qua expreſſione intelligitur nauem ceteris paribus eo facilius actioni gubernaculi obedire, quo minor fuerit valor momenti S; hoc eſt quo propius moles nauis ad iſtum axem verticalem admoueatur. Supra quidem vidimus oſcillationum nauis tranquillitatem obtineri, ſi omnia onera quantum fieri poteſt ab axibus horizontalibus

per

per centrum grauitatis ductis, maxime remoueantur: quare vt ſimul per onerationem nauis gubernatu facilis reddatur, maxima onerum copia ab ipſo centro grauitatis nauis quidem maxime debebit remoueri; verum tamen ita, vt ab axe verticali per centrum grauitatis ducto quam minime remoueatur. Ex quo intelligitur per onerationem tam oſcillationum tranquillitatem, quam effectum gubernaculi facilem obtiueri poſſe.

§. 514. Acceleratio porro autem conuerſionis nauis circa axem verticalem potiſſimum pendet a quantitate momenti virium ſollicitantium quod eſt $= \frac{Pf(au+k)}{k}$, quod quo fuerit maius, eo facilius effectus gubernaculi conſequetur. Ponamus autem gubernaculum in tali ſitu Bc detineri, cuius declinatio a ſitu directo BC ſeu angulus CBc maior ſit, quam obliquitas curſus aquae BCp; eritque $\frac{Pf}{k} = \frac{M(mu+ns)^2 bbv}{V}$, ideoque momentum virium nauem conuertentium $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv(au+k)}{V}$ ſeu ob rationem $\frac{M}{V}$ conſtantem, erit momentum hoc vt $(mu+ns)^2 bbv(au+k)$. Ex qua formula primum colligitur effectum gubernaculi eo eſſe fortiorem, quo maior fuerit gubernaculi ſuperficies bb, et quo celerius aqua in gubernaculum irruat, ceteris paribus. Ad hoc ergo praeſtaret gubernacula ampliſſima conficere, niſi aliae rationes hoc diſſuaderent.

§. 515. Quoſi iam ſuperficies gubernaculi bb iam fuerit determinata, ac celeritas aquae ſeu v non ab arbitrio noſtro pendeat, erit vis gyratoria vt $(mu+ns)^2(au+k)$, ex qua cognoſcere licet, quantum declinatio gubernaculi ſeu angulus CBc ad nauem conuertendam conferat. Notandum autem eſt hanc formulam non valere niſi ſit mu

 $<ns$

$< ns$ ſeu CBc > BCp; At facile intelligitur valorem illius expreſſionis non continuo euadere maiorem, quo maior conſtituatur angulus CBc; etſi enim augendo angulum CBc creſcit factor $(mu+ns)^2$; tamen contra ob coſinum anguli CBc, qui eſt $= u$, decreſcentem tota expreſſio $(mu+ns)^2(au+k)$ diminui poterit. Hincque perſpicuum eſt angulum dari definitum CBc, pro quo expreſſio illa maximum induat valorem.

§. 516. Inueſtigemus ergo angulum declinationis CBc, quae expreſſioni $(mu+ns)^2(au+k)$ maximum valorem conciliet; ideoque eam expreſſionem differentiemus ponendo u et s variabiles fietque $(mu+ns)^2 adu + 2(au+k)(mu+ns)(mdu+nds) = 0$. Cum autem ſit $uu+ss=1$ erit $du = -\frac{sds}{u}$, vnde orietur ſequens aequatio diuiſione per $mu+ns$ inſtituta: $(mu+ns)as = 2(au+k)(nu-ms)$ ſeu $3masu+nass = 2nauu+2nku-2mks$. Quoniam vero interuallum BM $= k$ eſt valde paruum prae diſtantia BG $= a$, erit vtique proxime $3masu+nass = 2nauu$, atque poſita tangente anguli CB$c = \frac{s}{u} = t$, erit $ntt+3mt = 2n$, hincque $t = \frac{-3m+\sqrt{(9-nn)}}{2n}$; et ſecans anguli CB$c$ $= \sqrt{(1+tt)} = \frac{\sqrt{(9+6n-3nn)}-\sqrt{(9-6n-3nn)}}{2n}$. Vnde fit $s = \frac{t}{\sqrt{(1+tt)}} = \frac{\sqrt{(1+n)(3+n)}-\sqrt{(1-n)(3-n)}}{6}$ atque $= u = \frac{\sqrt{(1+n)(3-n)}+\sqrt{(1-n)(3+n)}}{6}$.

§. 517. Sin autem hos valores propius habere velimus, ita vt etiam interualli BM $= k$ etſi admodum parui reſpectu BG $= a$, ratio habeatur, ponatur verus ipſius anguli CBc ſinus valor $= s'$, eiusque coſinus $= u'$; atque fingatur $s' = s + \frac{kzu}{a}$ et $u' = u \frac{kzs}{a}$; denotantibus s et u valores iam inuentos. His autem in aequatione propoſita ſubſtitutis reperietur $z = \frac{2}{3} \cdot \frac{nu-ms}{muu-mss+2nsu}$. Quodſi iam

iam loco s et u valores inuenti ſubſtituantur, obtinebitur ſin. CBc $= \frac{\sqrt{3(1+n)(3+n)} - \sqrt{3(1-n)(3-n)}}{6} + \frac{k}{3a} \cdot \frac{2n}{\sqrt{(9-nn)}}$ coſ. CBc $= \frac{\sqrt{3(1+n)(3-n)} + \sqrt{3(1-n)(3+n)}}{6} - \frac{k}{3a} \cdot \frac{\sqrt{(9-nn)} - 3\sqrt{(1-nn)}}{\sqrt{(9-nn)}}$.

§. 518. Quoniam autem aſſumſimus angulum CBc maiorem eſſe angulo BCp, ſub cuius obliquitate aqua in gubernaculum irruit; expreſſio anguli CBc inuenta, quo gubernaculum maxime efficax exiſtit, locum habere non poterit, niſi ſit angulus CBc maior angulo CBp, hoc eſt, ſumendis tangentibus, niſi ſit $\frac{s}{u}$ ſeu $t > \frac{m}{n}$. Inuenimus autem neglecta quantitate BM $= k$ prae maiore BG $= a$, eſſe $t = \frac{-3m + \sqrt{(9-nn)}}{2n}$; quae cum ſuperare debeat tangentem $\frac{m}{n}$, oportebit eſſe $-3m + \sqrt{(9-nn)} > 2m$ ſeu $\sqrt{(9-nn)} > 5m$ hoc eſt $\sqrt{(8+mm)} > 5m$ ob $nn = 1 - m^2$, ſumantur quadrata fiet $Q + mm > 25mm$ hincque $8 > 24mm$ ideoque $m < \frac{1}{\sqrt{3}}$ Ex quo colligitur angulum obliquitatis aquae BCp minorem eſſe debere quam 35°. 16′, ſi quidem angulus CBc inuentus gubernaculo maximum effectum praebere debeat.

§. 519. Hinc manifeſtum eſt, ſi angulus BCp maior fuerit 35°, 16′, tum valorem inuentum pro angulo CBc non amplius gubernaculo maximum effectum eſſe daturum, eo quod tum hypotheſis calculo aduerſetur. Quodſi autem angulus BCp exacte aequetur 35°, 16′, ita vt eius ſinus ſit $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ſeu tangens $= \frac{1}{\sqrt{2}}$; tum angulus CBc gubernaculo maximam vim tribuens accurate aequabitur angulo BCp, fietque directio gubernaculi Bc parallela directioni aquae pC in parte oppoſita ad puppim affluente. Sin autem angulus BCp maior euaderet, tum minor proditurus eſſet angulus CBc ex calculo, ideoque vtrinque gubernaculum vim aquae ſentiret, dum tamen in calculo

vnam tantum gubernaculi ſuperficiem aquae allidentem ponimus.

§. 520. Ponamus obliquitatem aquae BCp omnino euaneſcere, atque aquam ſecundum directionem ſpinae nauis ad puppim impingere, vt angulum obtineamus, ſub quo gubernaculum maximum effectum praeſtare iam pridem eſt inuentum. Qui enim adhuc iſtum angulum maximae efficaciae determinauerunt, non ſolum aquam directe circa puppim alluere poſuerunt, verum etiam interuallum BM $= k$ prae longitudine BG $= a$ negligendum cenſuerunt. Hanc obrem in formulis pro angulo CBc inuentis ponamus $m = 0$ et $n = 1$, prodibitque anguli CBc tangens $t = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$, hincque eius ſinus $= \sqrt{\frac{2}{3}}$ et coſinus $= \sqrt{\frac{1}{3}}$: ex quo angulus CBc, ad quem gubernaculum inclinatum promtiſſimum effectum edit, erit 54°, 44′, omnino vti ab aliis iam pridem eſt inuentum. Creſcente ergo obliquitate aquae BCp angulus CBc continuo decreſcit, donec tandem euadat 35°, 16′, facto angulo BCp pariter $=$ 35°, 16′.

§. 521. Maneat directio aquae pC ſpinae nauis parallela ſeu $m = 0$ et $n = 1$, verum interualli BM $= k$ rationem quoque habeamus in definiendo angulo CBc gubernaculo citiſſimum effectum conciliante. Habebimus ergo hanc aequationem quaeſito noſtro ſatis facientem: $ass = 2auu + 2ku$, ſeu $a = 3auu + 2ku$; ideoque $uu = \frac{-2ku}{3a} + \frac{1}{3}$. Hinc fit $u = \frac{-k}{3a} + \sqrt{\left(\frac{1}{3} + \frac{kk}{9aa}\right)} = \frac{-k + \sqrt{(3aa + kk)}}{3a}$. Sit iam k multo minor quam a, eritque proxime coſinus anguli CBc $= \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{k}{3a} + \frac{kk}{6a^2\sqrt{3}}$. Sit $\frac{k}{a} = \frac{1}{20}$ vt fere fieri ſolet, prodibit coſinus anguli CBc $= 0, 5609239$, atque

que ideo ipſe angulus CBc erit $= 55°, 53'$, et conſequenter maior, quam ſi interuallum BM $= k$ prae longitudine BG $= a$ neglexiſſemus.

§ 522. Vt nunc de ipſa celeritate, qua nauis a gubernaculo conuertitur quicquam definiamus, ſupra §. 486. vidimus in nauibus, quarum corpora ſint ſimilia, denotante c latus homologum puta profunditatem carinae, ſi momentum vis conuertentis fuerit $=$ P, fore celeritatem angularem genitam vt $\frac{\sqrt{PV}}{cc\sqrt{Mc}}$. At noſtro caſu momentum gubernaculi eſt $= \frac{M(mu+ns)^2 bbv(au+k)}{V}$, ſeu neglecto k prae a $= \frac{Mau(mu+ns)^2 bbv}{V}$. Hoc ergo valore loco P ſubſtituto prodibit celeritas nauis angularis vt $\frac{\sqrt{bbu(mu+ns)^2 v}}{cc}$ ob a ipſi c proportionalem, ſeu poſita gubernaculi declinatione eadem erit celeritas angularis vt $\frac{\sqrt{bbv}}{cc}$. In nauibus ergo, quarum corpora praeter gubernacula ſunt ſimilia pro ſimili gubernaculorum declinatione erunt celeritates angulares in ratione compoſita ex directa velocitatis nauis et ſubduplicata ſuperficiei gubernaculi; atque ex inuerſa duplicata laterum homologorum.

§. 523. Si naues habeant quoque gubernacula ſimilia, vt ſit bb vti cc, tum celeritas angularis a gubernaculo oriunda erit vt $\frac{\sqrt{v}}{c}$ hoc eſt directe vt celeritas nauis, et inuerſe vt latera homologa: ex quo maiores naues tardius conuertentur quam minores idque in ratione laterum homologorum. At in maioribus nauibus gubernacula minora confici ſolent, quam ſimilitudo requireret; ac fere tota gubernaculi ſuperficies bb ſtatui ſolet lateri homologo c proportionalis: in hac ergo conſuetudine celeritates angulares diuerſarum nauium erunt vti $\frac{\sqrt{v}}{c\sqrt{c}}$, hoc eſt directe vti

vti celeritates ipſae nauium, et reciproce tenebunt rationem ſeſquiplicatam laterum homologorum; nauis dcirco quadruplo longior et 64 vicibus grauior octies tardius conuertetur a gubernaculo ceteris paribus.

§. 524. Vt autem diuerſae naues ceterum ſimiles aequali celeritate angulari gubernaculi ope conuerti poſſent, gubernacula adhuc maiora confici deberent, quam pro ſimilitudinis ratione. In diuerſis ſclicet nauibus ſuperficies gubernaculi conſtitui deberet quadrato quadrato laterum homologorum proportionalis, ita vt eſſet bb vti c^4. Verum tum ob motum angularem eundem ipſe motus conuerſionis in nauibus maioribus, qui in ratione longitudinis creſcit, nimium fieret vehemens atque impetuoſus, vt tantae molis naues eiusmodi concitatum motum ſuſtinere nequeant. Quam ob cauſam iure nequidem poſtulari poteſt, vt naves maiores eodem tempore ſeſe in gyrum agi patiantur quam minores; hincque etiam multo minoribus gubernaculis, quam iſte effectus requireret, inſtrui ſolent, ita vt etiam minora conſtitui ſoleant, quam ſimilitudinis ratio requirit.

§. 525. Cur autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc minora quam pro ſimilitudinis ratione conficere conſueuerint; cauſa non tam facile aſſignari poteſt, praecipue cum promtitudo gubernaculi in omnibus nauibus ſummo ſtudio deſiderari ſoleat. Reſpondent vero ad hoc artis nauticae periti, tanta gubernacula, quanta ſimilitudo requirit, in magnis nauibus cum nimis difficulter contineri, tum etiam tanti roboris pro ceteris circumſtantiis ſabricari non poſſe, vt viribus aquae ſuſtinendis paria eſſent. Praecipua vero ratio in hoc poſita eſſe videtur, quod vſus,

variique

Digitized by Google

variique caſus quibus naues exponuntur, a nauibus maioribus non tam promptam gyrationem poſtulent, quam a minoribus; ita vt conſuetae magnitudinis gubernacula etiam in maximis nauibus ſufficere queant.

§. 526. Supra vidimus, ſi temonis, quo gubernaculum regitur et continetur, longitudo fuerit $= f$, fore vim a nauclero adhibendam, vt gubernaculum in dato obliquitatis ſitu conſeruet, vti $\frac{bbkvv}{f}$, ſeu celeritate poſita eadem vti $\frac{bbk}{f}$. Quodſi ergo gubernaculum ſit ad ſimilitudinem in nauibus diuerſae magnitudinis confectum, vt ſint b et k itemque f vt latera homologa c, erit vis a gubernatore adhibenda tamen in duplicata ratione laterum homologorum; atque in naui duplo longiori quadruplo maior vis requireretur, ad gubernaculum in dato ſitu continendum. Siu autem gubernacula in maioribus nauibus adhuc maiora, quam pro ſimilitudinis ratione conficiantur, vt motus angularis prodeat idem qui in minoribus, quia tum eſſe debent bb vt c^4 et k vt c^3 ob longitudinem gubernaculi vti c, prodiret vis a gubernatore impendenda vt $\frac{c^7}{f}$. Quare ſi f capiatur vt c foret vis gubernatoris in ratione ſextuplicata laterum homologorum, quae omnino admitti non poteſt.

§. 527. In hoc autem ſtatu maxime cauendum eſt, ne gubernaculum abrumpatur, cuius robur ruptioni reſiſtens eſt in craſſitiei gubernaculi ratione duplicata. Poſita ergo craſſitie gubernaculi $= s$ erit eius robur vt css; denotante c longitudinem ſeu latitudinem gubernaculi: momentum autem vis aquae, quae gubernaculum abrumpere conatur, eſt vt bbk, ex quo craſſities s conſtitui deberet pro-

portionalis ipſi $\sqrt{\frac{bbk}{c}}$. Ponatur altitudo nauis, quae ſimul latus homologum exprimat, $= c$, et latitudo gubernaculi $= t$ erit $bb = ct$ et $k = \frac{1}{3}t$, vnde fiet s vt t. Si ergo gubernaculum ad ſimilitudinem nauium fabricatur, vt ſit t vti c, oporteret craſſitiem gubernaculi s quoque eſſe vti c, ideoque tantam, quantam ſimilitudo requirit. Quamobrem ſi craſſities ſumatur lateribus homologis proportionalis, tum poſſet latitudo etiam conſtitui lateribus homologis proportionalis.

§ 528. Quodſi ergo in nauibus diuerſae molis ſimilibus etiam gubernacula tam ratione craſſitiei quam latitudinis fiant ſimilia, tum quidem aeque ruptioni reſiſterent; at motus angularis ideo non fieret aequalis, verum proportionalis exiſteret inuerſe lateribus homologis, eoque tardior euaderet, quo maiores eſſent naues. Sin autem motus angularis deſideretur idem in omnibus nauibus, tum $bb = ct$ debet eſſe vt c^4 ideoque latitudo t deberet eſſe vt c^3 cui ſimul craſſities s fieret proportionalis. In naui ergo duplo longiore tam craſſities quam latitudo conſtitui deberet octuplo maior, quae ratio in maximis nauibus tantopere augeretur, vt gubernaculi craſſities tandem totam nauis latitudinem adaequaret. Quod cum minime admitti queat, manifeſtum eſt effici omnino non poſſe, vt naues maiores aeque celeriter ac minores ope gubernaculi circumagi queant.

§. 529. Neque vero reliquae circumſtantiae permittunt, vt craſſities gubernaculi in ratione laterum homologorum creſcat; namque craſſities gubernaculi excedere nequit craſſitiem ligni mortui, cui adaptatur, quia alias reſiſtentiam pareret motui nauis admodum noxiam, verum

aliae

Digitized by Google

aliae rationes impediunt; quominus craſſities ligni mortui ſimilitudinem nauium ſequatur, quippe quae in nauibus maioribus minor ſtatuitur, quam ſimilitudinis lex poſtulat. Quam ob cauſam in nauibus maioribus tam craſſities quam latitudo gubernaculi in minori quam ſimilitudinis ratione creſcere debebit, ex quo eius effectus minor fiat neceſſe eſt. Vnde celeritas angularis in nauibus maioribus adhuc minor exiſtet, quam ratio inuerſa laterum homologorum requirit; hoc eſt in naui duplo longiori plus quam duplo erit tardior Ex quibus abunde perſpicitur, quo maiores fuerint naues, eo minus eas effectum gubernaculi ſentire poſſe, quam naues minores cetera ſimili modo conſtructas, quod phaenomenon experientia manifeſto declarat.

§. 530. Ex his igitur quantitas gubernaculi ſecundum omnes dimenſiones perfecte determinatur. Primum enim eius longitudo ſeu altitudo aequalis eſt profunditati ad quam nauis aquae immergitur: eminet quidem inſuper extra aquam ad temonem vsque, haec autem pars in computum non ingreditur. Deinde craſſities gubernaculi aequalis conſtitui debet craſſitiei parietis nauis, cui adaptatur; maior enim ob rationes allegatas eſſe nequit, minorem autem confici non conuenit, cum quod aqua in id non libere allaberetur, tum vero potiſſimum, quia latitudinem minui oporteret, quam tamen maximam eſſe expedit. Debet autem latitudo ſumi craſſitiei proportionalis, ita vt ſi in vna naui ratio inter latitudinem et craſſitiem per experimenta fuerit determinata, eadem ratio in omnibus nauibus locum habeat. Interim gubernaculo in infima parte maior latitudo tribuitur, quam in ſuperiori, eo quod hic foret inutilis, et gubernationem difficiliorem redderet.

§. 531. Expoſita hac gubernaculi determinatione atque efficacia in motu nauis directo, inueſtigandus eſt eius effectus, quem in curſu obliquo exerit; quo nauis non ſecundum axis longitudinalis directionem progreditur, ſed ab ea parumper declinat; qui curſus, ſi nauis velorum ope aduerſus ventum propellitur, maxime eſt frequens. Haec vero declinatio vulgo angulum 15° excedere non ſolet, niſi forte vndarum impetus a latere venientium hanc declinationem maiorem reddit. Eiusmodi igitur motu obliquo aqua non in directione ſpinae ad gubernaculum allidit, ſed in directione fere contraria ei, quam nauis tenet. Atque hoc caſu latera nauis aquam ex ea regione in quam nauis declinat, minus iſtam directionem perturbant, quam in motu directo, contra autem in altera regione perturbatio fit eo maior.

Tab. XIII. fig. 1. §. 532. Ponamus igitur nauem in aqua curſu obliquo ferri in directione GP, ſeu quod eodem redit, aquam contra nauem quieſcentem AEB*f* impingere in directione PG. Ducantur rectae Q*e* et R*f* latera nauis ſtringentes in *e* et *f*, ac parallelae directioni PG erit *e*A*f* portio ſuperficiei nauis impulſum aquae ſuſtinens. Quamobrem vt nauis in quiete perſiſtere queat, neceſſe eſt, vt a vi aequali et contraria ei, qua aqua impingit, ſollicitetur. Cum autem vis aquae non ſolum nauem propellere, ſed etiam circa axem verticalem conuertere conetur, niſi eius media directio per hunc ipſum axem verticalem G in centro gravitatis G traiectum tranſeat, vis quoque nauem in quiete conſeruans iſtam aquae vim reſpectu vtriusque effectus deſtruere debet. Haecque ſimiliter ſe habent, ſi nauis in aqua quieſcente ſecundum directionem obliquam GP progredia-

grediatur; retineamus autem ideam nauis quieſcentis in aqua mota.

§. 533. Vrgeatur itaque nauis ab eiusmodi vi, vt in perfecta quiete conſeruetur; atque conſideremus gubernaculum BC in ſitu directo detentum. A parte igitur *f*, in quam aquae curſus obliquus vergit, aqua in gubernaculum BC irruet ſecundum directionem *p*C fere parallelam directioni R*f* ſeu PG, neque angulus BC*p* multum excedet angulum AGP, quoniam directio laterum nauis *f*B, quam curſus aquae verſus puppim ſequitur, multo minus a directione R*f* deflectit, quam in curſu directo fieri ſolet. Quodſi ergo haec vis gubernaculum agitans ſola adeſſet, tum ea gubernaculum BC verſus plagam *d* conuerteret, donec eius directio parallela fieret directioni *p*C. Sin autem gubernaculum BC in ſitu hoc directo firmiter detineretur, tum ab iſta vi aquae reſultaret momentum totam nauim circa axem verticalem per eius centrum grauitatis G tranſeuntem conuertens, quo prora A verſus *r* gyraretur, nauisque ad curſum directum impelleretur.

§ 534. Reſpiciamus nunc autem ad motum aquae ex altera parte *e* ad gubernaculum allabentis. Ac primo quidem perſpicuum eſt, propter nimiam laterum nauis *e*B a curſu aquae deflexionem, motum aquae haec latera ſequi non poſſe. Relinquetur ergo prope gubernaculum in B copia aquae ſtagnantis: et, ſi haec aqua gubernaculum BC ſtringat, eius vis erit valde exigua, cum propter obliquitatem, tum etiam ob tarditatem. Ex quibus colligitur, aquam ex parte *e*L allabentem multo fore debiliorem, quam quae ex parte oppoſita *f* impingit, ideo-

que gubernaculum hoc caſu ſibi relictum in ſitu directo BC non perſiſtet, ſed declinabit in ſitum B*c*, in quo vires vtrinque vrgentes ſeſe in aequilibrio teneant. Quo minor itaque fuerit vis aquae ex parte *e* venientis, eo propius ſitus aequilibrii B*c* ad parallelismum cum directione *p*C accedet: denotet autem *e*L*d* fluxum aquae a parte *e* puppim verſus currentis.

§. 535. Quando igitur vires nauem ſollicitantes in aequilibrio fuerint cum vi aquae in partem anticam *e*A*f* irruentis, nauis in quiete manere nequit, niſi gubernaculum in ſitu obliquo B*c* detineatur, vbi vires id ſollicitantes vel ſunt nullae, vel ſe inuicem deſtruunt. In hoc ſcilicet ſitu ad gubernaculum detinendum nulla omnino opus erit vi, hincque ſponte in eo permanebit. Perpetuo enim obſeruandum eſt, vim gubernaculi ad nauem conuertendam proportionalem eſſe illi vi, quae ad gubernaculum in ſitu conſeruandum requiritur; quae ſi fuerit nulla, ita vt gubernaculum ſponte in ſitu ſuo perſiſtat, nulla in naui rotatio oriri poteſt. Sit igitur B*c* ſtatus aequilibrii gubernaculi pro curſus obliquitate PG propoſita, in quo gubernaculum relinquendum eſt, ſi quidem nauis curſum ſuum inuariatum conſeruare debeat, translatis ſcilicet iſtis ad nauem in aqua quieſcente oblique motam.

§. 536. Cum igitur ſit B*c* gubernaculi ſitus aequilibrii, ſi proram A verſus *r* conuertere velimus, gubernaculum in eandem plagam verſus D eſt conuertendum: atque hac conuerſione actio ſatis efficax oriri debet. Ponamus enim gubernaculum in ſitu BD detineri, ac primo quidem conſtat ex regione L nullam affore vim in gubernaculum agentem, quae proinde vim ex altera parte

te *p* allidentem imminuat. Hinc autem vis aquae in directione *p*M affluentis minime impeditur, cum in hac parte non ſolum nulla ſit aqua mortua ſed etiam fluuius R*f* pleno curſu in gubernaculum irruat. Leuiori igitur opera in eiusmodi curſu obliquo nauis per A*r* conuertitur, quam in curſu directo, vbi tam aqua mortua prope puppim, quam curſus aquae ob laterum nauis conuergentiam multum declinatus ac debilitatus effectum gubernaculi lentiorem reddit.

§. 537. Viciſſim autem perſpicuum eſt, ſi gubernaculum in oppoſitum ſitum puta in B*d* dirigatur, tum eius effectum multo fore debiliorem, ac non nunquam prorſus nullum. Quanqnam enim aqua ex parte *p*C fluens gubernaculum non ſtringit, eo, quod ſitus B*c* directioni *p*C iam fere eſt parallelus, tamen vis aquae *e*L*d*, ſiquidem in gubernaculum impingit, vehementer erit exigua, quoniam in regione B aqua maximam partem eſt tranquilla, et, ſi aqua *e*L*d* vllum habet curſum, eum admodum lentum eſſe oportebit. Quo magis enim curſus aquae a curſu naturali Q*e* deflectit, eo erit tardior, atque ad gubernaculum agitandum debilior. Quin etiam euenire poteſt, vt gubernaculum quantumuis in regionem B*d* inclinetur, nullam omnino ab aqua vim ſuſtineat, ſed in aqua tranquilla verſetur. Hanc ob rem igitur in curſu obliquo nauis difficulter in regionem A*q* vertetur; hoc eſt curſus obliquitas ope gubernaculi non tam facile augetur, quam diminuitur.

§. 538. Quando igitur nauis in fluuio oblique poſita abripitur, ad quem caſum ratiocinium potiſſimum accommodauimus, tum nauis quidem hanc obliquitatem AGP conſtanter ſine gubernaculi actione conſeruabit, ſi media directio

directio impetus aquae in partem eAf facti per axem verticalem per centrum grauitatis nauis G ductum tranſeat: etiamſi interim ad ripam verſus q ſitum appellatur. At vero nauis facillime hanc obliquitatem vel augendo vel diminuendo amittet, ita vt ad eius reſtitutionem gubernaculo ſit opus. Ex praecedentibus autem manifeſtum eſt, ſi obliquitas caſu maior fuerit facta, tum gubernaculi ope eam facillime minorem reddi, atque in priſtinum ſitum reſtitui poſſe. Sin autem caſu nauis propius ad ſitum directum ſeſe applicuerit, tum difficulter ea ab hoc ſitu remouebitur, ac verſus q declinabitur, vt priſtinam obliquitatem recuperet. Aliter vero res ſe habet, ſi media impetus aquae directio non per axem verticalem centrum grauitatis G traiicientem tranſeat.

§. 539. Si enim media directo impetus aquae propius ad proram A per ſectionem verticalem nauis ſecundum longitudinem A B factam tranſeat, tum ipſa aquae vis conabitur nauem verſus q conuertere, quae ergo vis, niſi ſit nimis magna, ope gubernaculi in ſitum BD directi reprimi poterit. Sin autem media directio impetus aquae in partem eAf allabentis pone centrum grauitatis puppim verſus planum diametrale nauis, traiiciat, tum eius vis tendet ad nauem verſus Ar conuertendam, qui adeo effectus ope gubernaculi multo minus compeſci poterit. Hoc igitur caſu nauis mox ad ſitum directum redigetur, e quo difficulter gubernaculo ad priſtinam obliquitatem declinabitur. Si nauis praeterea viribus externis ad motum ſollicitetur, tum in hoc iudicio inſuper ratio eſt habenda mediae directionis harum virium atque ipſius motus naui iam impreſſi; qua de re conſuli poſſunt,

quae

quae in ſuperiori libro de motu nauium propulſarum tradita ſunt.

§. 540. Maxime autem eiusmodi curſus obliquus inſtitui ſolet, ſi naues aduerſus ventum velorum ope propelli debent, eiusmodi enim curſus naui induci nequit, niſi ſimul nauis oblique ſcilicet ſecundum directionem GP progrediatur. Ponamus ergo ventum ex plaga VG ſpirare, et nauem in directione GP progredi, ita vt impetus ſeu reſiſtentia aquae in partem eAf exeratur, cuius mediam directionem primum per ipſum axem G tranſire ponamus. Quodſi ergo vis venti a velis exceptae media directio per eundem axem tranſeat, omnis nauis conuerſio a gubernaculo pendebit. Facile igitur nauis in plagam Ar conuertetur, hoc eſt curſus a vento remouetur; difficillime autem in directionem Aq aduerſus ventum applicatur. Haecque pariter locum habent, ſi mediae directiones tam virium propellentium, quam reſiſtentiae aquae per alium quemcunque axem verticalem ſimul tranſeunt, tum enim earum momentum ad nauem conuertendam euaneſcit, totumque conuerſionis negotium gubernaculo relinquitur.

§ 541. Ponamus iam mediam directionem virium propellentium ad proram A propius incidere, quam mediam directionem reſiſtentiae aquae. Propter aequalitatem igitur harum virium, quae in motu vniformi locum obtinet, nauis in directione Ar conuertetur, qui effectus, quamuis ſit exiguus, per gubernaculum impediri nequit: oporteret enim gubernaculum in ſitum BL declinari, in quo eius effectus eſt vehementer debilis. Euenit hoc incommodum ſi vela anteriora praeualeant poſterioribus, hocque caſu navis continuo magis a directione venti VG repelletur, aucto

angulo VGA; neque gubernaculi ope iſta depulſio a vento impediri poterit. Hoc ergo incommodum aliter tolli non poterit, niſi velis poſterioribus maiorem vim tribuendo, vt virium a vento exceptarum media directio propius verſus puppim transferatur.

§. 542. Tantopere ergo vel vela poſteriora augeantur vel anteriora diminuantur, vt media directio vis venti magis puppim verſus vergat, quam media directio reſiſtentiae aquae. Orietur itaque hinc momentum tendens ad nauem in directione Aq ad ventum conuertendam: quae vis, niſi ſit nimis magna ope gubernaculi deſtrui poterit, dum id in ſitu BD detinetur. Quodſi autem ab vndis alione accidente prora A, a vento puta, r verſus detorqueatur; quoniam gubernaculum per ſe ineptum eſt ad hanc remotionem tollendam, id per ipſam vim venti fiet, dummodo gubernaculum in ſitu aequilibrii Bc relinquatur. Tantum igitur abeſt, vt iſta velorum diſpoſitio, qua poſteriora anterioribus praeualent, damnum afferat, vt per eam potius inertiae gubernaculi, ſeu difficultati nauem ad verſus ventum dirigendi maxime conuenienter occuratur.

§. 543. Incommodum hoc gubernaculi in curſu obliquo, pariter ac eius remedium probe cognitum eſt nautis; qui bene cauent, ne velis anterioribus nimiam venti vim concedant. Experientia enim ipſos docuit, ſi velis anterioribus plus iuſto vtantur, nauem a vento depelli, neque gubernaculum ſufficere ad nauem in debita directione continendam. Eousque igitur vela puppis multiplicant, ſeu prae his vela prorae contrahunt, donec vim obtineant nauem aduerſus ventum dirigentem, quae ſi caſu nauis a vento detrudatur, ipſa par ſit naui in debitum

ſi-

Digitized by Google

ſitum reſtituendae; deficiente hoc caſu gubernaculi miniſterio. Neque tamen nimis vela poſteriora velis anterioribus praeualere debent, ne vis nauem aduerſus ventum vertens tantopere augeatur, vt a gubernaculo eius actio impediri nequeat. Expediet autem hanc praeualentiam quam minimam ſtatui, quae tantum ſufficiat ad gubernaculi defectum emendandum.

§. 544. Quanquam hactenus axem, circa quem gubernaculum conuertitur, verticalem aſſumſimus, tamen facile perſpicitur, eadem valere, tam quae de actione gubernaculi in curſu directo propoſuimus, quam in curſu obliquo, ſiquidem axis ille ſitus non enormiter a ſitu verticali diſcrepat. Atque ſi vllum deprehendetur diſcrimen, id totum in quantitate actionis gubernaculi ad datum angulum declinati verſabitur; hocque nomine alius quoque angulus declinationis reſultabit, ſub quo gubernaculum promtiſſimum exeret effectum. Quamobrem ne hanc partem praetermittamus, in effectum, quem gubernaculum mobile circa axem ad horizontem inclinatum producit diligentius inquiremus; atque in hoc negotio, quo facilius abſolui poſſit, curſum nauis directum aſſumemus, ſimulque aquam in directione ſpinae nauis contra gubernaculum irruere ponemus.

§. 545. Repraeſentet igitur planum chartae ſectionem nauis verticalem ſecundum ſpinam factam, ſitque recta AC horizontalis a prora ad puppim ducta, que ſimul exhibeat directionem aquae in gubernaculum allidentis. Sit recta BD axis ille obliquus, circa quem gubernaculum BHID mobile exiſtat, faciens cum horizontali AC angulum ACB ſuperne obtuſum, infra autem ACD Tab. XVII. fig. 2.

Digitized by Google

acutum ; Sit porro gubernaculum BHID in eodem plano verticali ſitum, ita vt hoc ſtatu ſit in ſitu aequilibrii vtrinque ab aqua nullam vim ſentiens ; ex qua momentum ad nauem conuertendam naſcatur. Eiusmodi autem ſitus inclinatus gubernaculo in nauibus actu tribui ſolet, propterea quod ſuperior nauium pars multum in puppi vltra ſpinam prominet, ex quo neceſſe eſt, vt axis BD deorſum ad proram vergat, atque exterior gubernaculi margo HI fere fiat verticalis, quoniam gubernaculum inferius latius eſt quam ſuperius. Quando autem in curſu prora nauis magis demergitur quam puppis, inclinatio illa axis BD fit minor.

§. 546. Conuertatur iam gubernaculum BHID ex ſitu aequilibrii in ſitum B*hid*, atque ſi ante termini gubernaculi BH et DI fuerunt horizontales, nunc erunt B*h* et D*i* ad horizontem inclinati, dum extremitates *h* et *i* aſcenderunt. Cum igitur temo, quo gubernaculum dirigitur, directionem HB productam ſequatur, eius manubrium in naui deſcendit, dum gubernaculum conuertitur, ex quo neceſſe eſt, vt ſuper pauimento fornicato moueatur, cuius medium altius ſit, quam latera. Quoniam vero propter alias rationes pauimentum nauis in puppi tam verſus proram quam verſus latera efficitur decliue, vti motus temonis poſtulat, veri ſimile videtur, ob hanc potiſſimum rationem axem gubernaculi ad horizontem inclinari, quo motus temonis decliuitatem ſuperioris nauis ſuperficiei ſequi poſſit. Debebit ergo iſta ſuprema ſuperficies, ſuper qua temo gyratur, eſſe ſuperficies coni, cuius axis ſit BD.

§. 547. Ad angulum, per quem gubernaculum ex ſitu aequilibrii eſt conuerſum, metiendum ducantur ex puncto

Digitized by Google

puncto quocunque axis C in vtroque plano BHID et B*bi*D rectae CG et C*g* ad axem BD normales, comprehendent eae angulum GC*g* declinationi gubernaculi B*bi*D a ſtatu aequilibrii aequalem. Cum enim recta GC ſit normalis ad BD, motu rotatorio punctum G in *g* transfertur atque inclinatio duorum planorum menſuratur angulo, quem duae rectae in vtroque plano ad inter ſectionem communem normaliter ductae inter ſe conſtituunt. Si igitur ex puncto G ducatur recta horizontalis GMN ipſi AC parallela, erunt lineae AC, GC, et GN in eodem plano verticali; fietque angulus CGM ,aequalis angulo quo axis BD a ſitu verticali diſtat, cuius anguli igitur ſinus erit $= \frac{CM}{GM}$, et coſinus $= \frac{CG}{GM}$ poſito ſinu toto $= 1$; vel anguli ACB ſeu ACD ſinus erit $= \frac{CG}{GM}$.

§. 548. Eſt vero porro GC*g* planum ad axem BD normale et G*g* arcus circuli centro C deſcriptus, ex quo erit C*g* $=$ CG. Deinde eſt etiam planum GCg in vtrumque gubernaculi ſitum BHLD et B*bi*D normale, quia normale eſt ad rectam BC vtrique plano communem. Quodſi ergo in hoc plano GC*g* ex G in C*g* ducatur perpendiculum GL erit haec GL normalis in planum B*bi* D; ſimul vero $\frac{GL}{CG}$ exprimet ſinum anguli GC*g*, quo gubernaculum ex ſitu ſuo aequilibrii eſt remotum. Cum nunc recta GN ſit parallela directioni aquae in gubernaculum incurrentis, angulus ſub quo aqua in gubernaculum B*bi*D incidit, aequalis erit angulo quem recta MG cum plano B*bi*D conſtituit; qui angulus aequalis erit angulo CML, ducta ex L ad M recta LM. Cum enim GL ſit normalis ad planum B*bi*D angulus GML exprimet inclinationem rectae GM ad planum B*bi*D.

Digitized by Google

§. 549. Quoniam recta LM in plano $BbiD$ exiſtit erit quoque GL ad ML perpendicularis, ideoque triangulum GLM rectangulum ad L. Hinc anguli GML, ſub quo aqua in gubernaculum $BbiD$ incurrit, ſinus erit $= \frac{LG}{GM}$, cuius quadrato tota vis, quam aqua in gubernaculum exerit eſt proportionalis. Cum autem ſit $\frac{LG}{GM} = \frac{LG}{CG} \cdot \frac{CG}{GM}$, aequabitur ille ſinus producto ex ſinibus angulorum GCg et ACD, quorum ille declinationem gubernaculi a ſtatu aequilibrii, hic vero inclinationem axis BD ad horizontem denotat. Vtique igitur minor eſt effectus gubernaculi circa axem obliquum mobilis, quam circa axem verticalem, idque in ratione ſinus totius ad ſinum anguli ACD. Ex quo colligitur axem BD a ſitu verticali admodum parum declinare debere; parua autem inclinatio parum diminuit effectum, quia angulorum a recto non multum deſcrepantium ſinus a ſinu toto ſenſibiliter non differt.

§. 550. Si ergo ſinum anguli ACB, quo axis gubernaculi ad horizontem inclinatur ponatur $= r$, et ſinus anguli GCg per quem gubernaculum de ſitu aequilibrii eſt traductum, ſit $= s$, erit ſinus anguli, ſub quo aqua in gubernaculum $BbiD$ irruit $= rs$: ex quo vis aquae irruentis erit vt $rrss$: ſcilicet ſi ſuperficies gubernaculi aquam excipiens ponatur $= bb$, et altitudo debita celeritati aquae $= v$, aequabitur vis aquae ponderi voluminis aquae $= b\,brrssv$. Cum autem volumen aquae V aequiponderet ponderi nauis M, erit vis iſta aquae $= \frac{Mbbrrssv}{V}$ cuius media directio tranſit per centrum grauitatis gubernaculi, atque ad eius ſuperficiem eſt normalis. Sumamus punctum L pro centro grauitatis ſuperficiei gubernaculi, quia recta

LG

LG eſt normalis ad iſtam ſuperficiem, exprimet ea mediam directionem vis aquae gubernaculum vrgentis.

§. 551. Demittatur ex L in CG perpendiculum LP, quod cum futurum ſit normale in planum verticale BHID erit ipſum horizontale. Reſoluatur ergo vis $\frac{Mbbrrssv}{V}$ in laterales ſecundum directiones LP et GP, erit vis in directione horizontali LP, ſi quidem in puncto G applicetur $= \frac{LP}{GL} \cdot \frac{Mbbrrssv}{V} = \frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{V}$. ob $\frac{LP}{GL} =$ coſinui anguli LCG. Sit $CL = k$, erit $CG = \frac{k}{\sqrt{(1-ss)}}$; ac, ſi diſtantia puncti C ab axe verticali per centrum grauitatis nauis tranſeunte ponatur $= a$, erit diſtantia puncti G ab eodem axe $= a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}}$; vnde momentum vis gubernaculi ad nauem convertendam erit $= \frac{Mbbrrssv\sqrt{(1-ss)}}{V} (a + \frac{kr}{\sqrt{(1-ss)}})$; quod itaque eo minus eſt, quo angulus ACD magis a recto diſcrepat atque ſi angulus ACD fuerit ſemirectus, momentum hoc duplo fit minus. Haecque igitur ad effectum gubernaculi circa axem obliquum mobilis cognoſcendum ſufficiunt.

Cap.

Digitized by Google

2 8?

~~)o(~~

Cap. VII.

DE ACTIONE REMORVM.

§. 552.

In libro ſuperiori, atque etiam in huius praecedentibus capitibus ſatis ſuperque oſtendimus, quantum effectum datae vires nauem ſollicitantes tam ratione motus progreſſiui, quam rotatorii circa axem ſiue horizontalem ſiue verticalem per centrum grauitatis ductum producere debeant. Vires autem naui immediate applicatas eſſe aſſumſimus, ita vt ex earum magnitudine et directione effectus, quem in naui producunt, determinari queat. Quanquam vero remi in ipſis nauibus applicantur, tamen quanta vis ex eorum agitatione reſultet ad nauem propellendam, minime liquet; neque enim vis remigum, neque ea vis, quam hypomochlium ſuſtinet, ad nauem propellendam tantummodo impenditur. Quo igitur veram vim, quae ex remigatione oritur ad nauem mouendam, inueſtigemus, a caſibus ſimplicioribus ordiri debemus, qui tandem ad caſum remigationis ſatis complicatum manuducant.

§. 553. Praecipua vis remorum autem a reſiſtentia aquae, quam, dum agitantur, ſentiunt, proficiſcitur; ſi enim aqua ipſorum motui non reluctaretur, vel ſi remi in aere agitarentur, tum perſpicuum eſt nullam vel inſenſibilem vim eſſe orituram ad nauem propellendam. Sin autem aqua maius obſtaculum agitationi remorum offerret, nullum eſt dubium, quin nauis celerius propellatur. Caſus iſte poſterior locum habet, ſi remi non aquae ſed obſtaculo inuincibili innitantur, veluti ripae, vel fundo maris

Digitized by Google

maris ſeu fluuii, vbi experientia teſtatur hoc modo naues citius moueri, quam ſi remi per aquam ſtringantur. Quocirca antequam effectum remorum contra obſtaculum mobile cuius modi eſt aqua, definiamus, conueniet in effectum inquirere, quem remi contra obicem immobilem innitentes producere valeant; hoc enim modo nauem movendi, quoties occaſio permittit, nautae vtuntur, ex quo per ſe etiam euolui meretur.

§. 554. Ponamus igitur in ripa vel fundo maris fixum eſſe palum PQ, cui vel funes alligando vel perticas vncosue applicando naues ad motum cieri queant. Si ſcilicet funis SR palo ſit alligatus, isque in R ab hominibus in naui trahatur, nauis vtique ad palum accedet in directione AS. Idem accidet ſi pertica vnco inſtructa palo infigatur, ſimilique vi in directione AR trahatur; ſubit enim pertica hoc caſu vicem funis, atque vſurpatur, cum nauis iam tam prope ad palum acceſſerit, vt vnco apprehendi queat, funium autem vſus ad longiora interualla extenditur, quos lintris ope praemitti paloque alligari vel etiam ancora firmari oportet: hocque modo naues in portubus, fluuiis, et vbicunque occaſio poſtulat, hominum viribus protrahi ſolent. Homines ſcilicet funem apprehenſum omni qua valent vi verſus puppim B ducunt, ſicque nauem ad palum PQ admouent, hac ergo operatione curſus a prora ad puppim toties eſt repetendus, quoad nauis ad locum PQ fuerit perducta.

§. 555. Ad effectum iſtius hominum vis, qua funem SAR verſus puppim protrahunt, inueſtigandum, probe notari oportet, vim hominum trahentium eſſe maiorem, ſi homines quieſcunt, quam ſi progrediuntur; hoc

enim poſteriori caſu portio illius vis, quam homines impendunt, in ipſorum curſu conſumitur. Homo namque progredi vel currere nequit, quin ad hoc vim inſumat, et ſi tanta celeritate, qua poteſt, currit, nullam omnino vim ad quicquam trahendum vel trudendum impendere poteſt. Ponamus maximam celeritatem, quam homo libere currens ſuſtinere poteſt, debitam eſſe altitudini α, qua ſi currat nullam vim in tractionem vel truſionem impendere queat. Sit autem vis, qua quieſcens trahere valet, aequalis ponderi p; veri ſimile eſt eundem hominem celeritate altitudini v debita progredientem trahere poſſe vi $= p(1-\frac{v}{\alpha})$: haec ſaltem hypotheſis a veritate tam parum aberrabit, vt error nullius in praxi ſit momenti.

§. 556. Cum homo interuallo vnius horae circiter milliare germanicum vnum currens abſoluere queat, habebit hoc curſu celeritatem, quanta lapſu grauis ex vno pede Rhenano acquiritur; ita vt futurum ſit $\alpha = 1$ pedi. Homo porro quieſcens trahendo horizontaliter ingens pondus ſuſtinere poteſt: quoniam vero in opere continuo indeſinenter eandem vim exerere debet, loco vis p non nimis magnum pondus aſſumere licet; ad ſummum ergo pro p pondus 50 librarum accipiemus, quod autem iam nimis eſt magnum, ſi homo laborem continuo perpeti debeat, conueniet ergo, ſi opus ſine interruptione durare debeat, pro p non maius pondus quam 30 vel 40 librarum ſubſtitui: quo in negotio autem diligenter perpendendum eſt, vtrum homines ſint robuſti, ac labori adſueti, an debiles. Interim perpetuo tutius eſt vires hominum nimis paruas exiſtimare.

§. 557.

Digitized by Google

§ 557. His de viribus hominum aeſtimandis propoſitis, ponamus in naui ACDB funem SAR in S fixum a ψ hominibus protrahi, quorum ſinguli quieſcentes horizontaliter trahendo pondus p ſuſtinere valeant. Principio igitur quo omnes trahere incipiunt eorum vis aequiualebit ponderi ψp. Ponamus autem nauem iam eſſe motum aequabilem conſecutam, cuius celeritas debita ſit altitudini v; eadem ergo celeritate operarii verſus puppim migrabunt, eritque adeo ipſorum vis ad nauem protrahendam non amplius ψp ſed $\psi p(1-\frac{v}{\alpha})$; huic igitur vi aequalis erit reſiſtentia quam nauis in iſto motu offendit: quae cum ſit quadrato celeritatis hoc eſt ipſi altitudini v proportionalis, ponatur ea $= Rv$, eritque itaque $Rv = \psi p - \frac{\psi p v}{\alpha}$, vnde naſcitur $v = \frac{\alpha\psi p}{R\alpha+\psi p}$, quae eſt altitudo debita celeritati, qua nauis a ψ hominibus tracta promovetur.

§. 558. Ponamus nauem tantam ſufferre reſiſtentiam, quantam pateretur ſuperficies plana bb in aqua directe promota; eritque Rv aequale ponderi voluminis aquae bbv, atque ſi pondus nauis ponatur $= M$ et volumen carinae $= V$, erit vis reſiſtentia $Rv = \frac{Mbbv}{V}$, ideoque $R = \frac{Mbb}{V}$. Hoc valore ſubſtituto inuenietur $v = \frac{V\alpha\psi p}{Mbb\alpha+V\psi p}$; cuius radix quadrata exhibebit celeritatem qua nauis progreditur. Cum α ſit altitudo vnius pedis, altitudo v in pedibus exprimatur; eritque $250\sqrt{1000\,v}$ ſpatium, quod nauis vno minuto ſecundo conficiet in partibus milleſimis pedis expreſſum. Vno minuto primo ergo nauis conficiet ſpatium $15\sqrt{1000\,v}$ pedum Rhenanorum. Per milliare ergo germanicum quod continet 24000 pedes nauis protrahetur tempore $\frac{1600}{\sqrt{1000\,v}}$ minutorum primorum.

§ 559. Vt hunc motum exemplo illuſtremus ſit pondus nauis $M = 640000$ librarum erit $V = 10000$ pedum cubicorum. Sumatur $bb = 100$ pedum quadratorum, poſitisque $\alpha = 1$ pedi, et $p = 40$ librarum, fiet $v = \frac{\psi}{160+\psi}$ pedum, atque nauis vno minuto primo trahetur per ſpatium $15 \sqrt{\frac{1000\psi}{160+\psi}}$ pedum. Sit numerus hominum trahentium $\psi = 10$, atque nauis vno minuto primo protrahetur per ſpatium $= 15 \sqrt{\frac{1000}{17}} = 115$ ped. proxime. Decem igitur homines impendent tres horas cum ſemiſſe ad nauem per ſpatium vnius milliaris germanici protrahendam. Quadraginta autem homines eandem nauem vno minuto ſecundo protrahent per ſpatium $= 15 \sqrt{200}$ pedum, 212 pedum, et vnum milliare germanicum conficient tempore vnuis horae cum 53 minutis.

§. 560. Ex hoc exemplo apparet, in nauibus grandioribus fore $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$ numerum admodum magnum, quodſi ergo numerus hominum trahentium ψ reſpectu huius numeri ſit valde paruus, tum proxime erit $v = \frac{V\psi p}{Mbb}$. Celeritas ergo nauis, ſi numerus operariorum ψ fuerit valde paruus reſpectu numeri $\frac{Mbb\alpha}{Vp}$, tenebit rationem ſubduplicatam numeri operariorum, ita vt quadruplo plures operarii nauem tantum duplo celerius promouere valeant. Quodſi autem numerus operariorum ψ propius ad numerum $\frac{Mbb\alpha}{V}$ accedat, vel ipſum etiam ſuperet, tum in minori proportione celeritas nauis augebitur quam duplicata operariorum. Si enim numerus operariorum in infinitum vsque augeatur, fiet tantum $v = \alpha$ ſeu vnius pedis, atque nauis aeque celeriter progredietur, ac homo vacuus nihil gerens migrare valet. Perſpicuum enim eſt naui maiorem celeritatem a hominibus trahentibus

bus induci non poſſe, quam eſt ea, qua nullum onus vrgentes liberi ambulare valent.

§. 561. Haec ita ſe habent, ſi operarii funem SR ſimpliciter nuda manu prehendentes protrahant; verum quandoque ad hoc opus machinis vtuntur, quibus quantum proficiatur, inquiramus. Ponamus igitur in naui con- Tab. VII. fig. 4. ſtitutum eſſe axem in peritrochio mobilem circa axem C, quo circumacto funis S*a* circa cylindrum *a*C conuoluatur, nauisque verſus S propellatur. Vires autem hominum applicentur axi in data diſtantia AC, dum machinam circa axem horizontalem C mobilem ope alius funis AR quem trahunt, circumagunt. Vel quod perinde eſt, ſi axis machinae C verticaliter fuerit conſtitutus, eiusmodi machina in grandioribus nauibus vſurpari ſolet ad ancoras eleuandas, nauem mouebunt, dum machinam ope vectium CA in A prehenſorum in gyrum agunt. Vterque enim modus eodem redit, quoniam operarii celeritatem vectis in A ſequi, ac proinde eadem celeritate ambulare debent.

§. 562. Si igitur, cum nauis iam ope huius machinae a ψ operariis agitatae motum aequabilem in directione *a*S fuerit nacta, celeritas nauis ponatur debita altitudini v, erit vti vidimus reſiſtentia aquae ſuperanda $= \frac{Mbbv}{V}$, tanta igitur vi funem S*a* tendi oportet, quare ſi ratio radiorum AC : *a*C ponatur $= m:n$, vis funem AR trahens debebit eſſe $= \frac{Mnbbv}{Vm}$; et quoniam punctum *a* circumuoluitur celeritate, nauis celeritati aequali $\sqrt{v}$, celeritas puncti A, qua operarii incedere debent erit $= \frac{m\sqrt{v}}{n}$, ſeu celeritas operariorum debita erit altitudini $\frac{mmv}{nn}$. Hinc eo-

rum vis erit $= \psi p(1 - \frac{mmv}{nn\alpha})$ quae id circo aequalis eſſe debet vi $\frac{Mnbbv}{Vm}$, quae ad tenſionem funis AR requiritur. Ex quo habebitur aequatio $\frac{Mnbbv}{Vm} = \psi p - \frac{mm\psi pv}{nn\alpha}$, quae praebebit $v = \frac{Vmnn\alpha\psi p}{Mn^3\alpha bb + Vm^3\psi p}$.

§. 563. Ex hac expreſſione intelligitur rationem inter $m:n$ nimis magnam aeque eſſe damnoſam celeri nauis promotioni, ac rationem nimis paruam; ſiue enim ſit $\frac{m}{n} = 0$, ſiui $\frac{m}{n} = \infty$, vtroque caſu celeritas nauis euaneſcit. Ex quo perſpicuum eſt dari rationem inter m et n finitam, quae naui maximam celeritatem inducat. Ad eam inueniendam ponamus $\frac{m}{n} = z$, atque oportebit hanc expreſſionem $\frac{V\alpha\psi pz}{M\alpha bb + V\psi pz^3}$ maximam fieri, id quod euenit, ſi ſumatur $z^3 = \frac{M\alpha bb}{2V\psi p}$ ſiue $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{M\alpha bb}{2V\psi p}}$. Qui valor in expreſſione ipſius v ſubſtitutus dat $v = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{4V^2\alpha\psi^2p^2}{M^2b^4}}$, vnde erit celeritas ipſa $\sqrt{v} = \sqrt[3]{\frac{2V\psi p\sqrt{\alpha}}{2Mbb\sqrt{2}}}$, ex qua formula ſpatium, per quod nauis dato tempore protrahetur, aſſignari poteſt.

§. 564. Si volumen V in pedibus cubicis exprimatur erit $M = 64$ V librarum: vnde prodit $v = \frac{mnn\alpha\psi p}{64 n^3\alpha bb + m^3\psi p}$ Sumatur pro p pondus 32 librarum, et cum ſit α vnius pedis, exprimatur ſuperficies bb in pedibus quadratis, eritque $v = \frac{mnn\psi}{2n^3mbb + m^3\psi}$ pedum. Quamobrem nauis vno minuto primo protrahetur per ſpatium $15\sqrt{\frac{1000mnn\psi}{2n^3bb + m^3\psi}}$ pedum; in qua expreſſione tantum tres inſunt quantitates a circumſtantiis pendentes, nempe numerus hominum ψ; ratio inter radios machinae ſeu ergatae AC : aC $= m : n$; ac planum bb, quod in aqua, directe motum, parem

parem cum naui ſuffert celeritatem, Erit ergo bb minor quam ſectio carinae tranſuerſa, quoniam conuergentia laterum reſiſtentia diminuitur. Satis prope ergo valor bb aeſtimando colligi poterit, qui in noſtra expreſſione ſecundum pedes quadratos determinari debet.

§. 565. Quod ad quantitates ψ et bb attinet, perſpicitur celeritatem nauis ab aucto numero operariorum ψ augeri, contra vero ab aucta reſiſtentia ſeu valore bb diminui. Ratio autem $m:n$ vti vidimns celeritatem aeque augere ac diminuere valet, nauis enim promtiſſime protrahetur, ſi ſtatuatur $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{bb}{\psi}}$, ſubſtitutis valoribus, quos modo aſſumſimus, veritati ſatis conſentaneis. Iſta autem ratione inter m et n obſeruata celeritas nauis debita erit altitudini $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^4}}$ ped. atque ipſa celeritas iſta maxima erit $= \sqrt[3]{\frac{\psi}{3bb\sqrt{g}}}$, ſiue nauis hoc modo vnius minuti primi ſpatio promouebitur per $15\sqrt{333\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^4}}}$ pedes ſeu per $273\frac{861}{1000}\sqrt[3]{\frac{\psi}{bb}}$ pedes, ſi quidem ſuperficies bb in pedibus quadratis exprimatur.

§. 566. Cum ſit $\frac{m}{n} = \sqrt[3]{\frac{bb}{\psi}}$, intelligitur ſi numerus hominum operantium ψ aequalis fuerit numero pedum quadratorum in plano bb contentorum, tum ob $\frac{m}{n} = 1$ nauem ſine ergatae miniſterio celerrime protractum iri; hocque caſu operarii cum maximo lucro vires ſuas impendunt, ſi funem Sa immediate prehendant ac protrahant. Reliquis caſibus expediet machina, ſeu ergata vti: Si enim, quod ſemper vſu venire ſolet, numerus hominum ψ minor fuerit quam bb, tum prodit $m > n$, ita

ita vt his caſibus ergata commodiſſime vti liceat; cuius ope promtiſſimus adeo exeretur effectus, ſi ſtatuatur CA : Ca = $\sqrt[3]{bb} : \sqrt[3]{\psi}$. Atque ſi iſta diſpoſitio maxime lucroſa obſeruetur, erit pro diuerſo operariorum numero eandem nauem trahentium celeritas naui inducta in ratione ſubtriplicata numeri operariorum.

§. 567. Si nulla machina adhibeatur ſeu ſit $\frac{m}{n} = 1$, erit $v = \frac{\psi}{2bb+\psi}$, ſin autem ergata maxime idonea quam deſcripſimus vſurpetur, erit $v = \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{\psi\psi}{b^4}}$ quae expreſſio ſemper maior eſt quam illa, niſi ſit $\psi = bb$. Illo autem caſu nauis vno minuto primo per ſpatium $15\sqrt{\frac{1000\psi}{2bb+\psi}}$ pedum, hoc vero per ſpatium $273\frac{561}{1000}\sqrt[3]{\frac{\psi}{bb}}$ pedum promouetur. Vt diſcrimen clarius percipiatur, ponamus eſſe $bb = 100$. ped. quadr. atque numerum operariorum $\psi = 10$; nauis igitur ſine machina protrahetur per ſpatium 103. pedum. Sin autem ergata maxime idonea adhibeatur in qua ſit CA : Ca = $\sqrt[3]{10} : 1 = 21544; 10000$, tum nauis vno minuto primo protrahetur per ſpatium 127. pedum. Ope machinae igitur nauis vno minuto per ſpatium 24. pedibus maius, et vna hora per ſpatium 1440. pedibus maius protrahetur quam ſine machina, quod diſcrimen ſatis eſt notabile.

Tab. XVII. fig. 3. §. 568. Quae hic de promotione nauis, dum funis SR ab hominibus in R verſus puppim B protrahitur, dicta ſunt, eadem quoque valent, ſi loco funis pertica vnco inſtructa adhibeatur; dum enim vnco palo PQ infixo pertica trahitur, nauis pariter ad palum admouebitur, ac ſi

Digitized by Google

ſi funis fuiſſet adhibitus. Quodſi autem pertica RS contra palum applicata in directione RS protrudatur, tum nauis a palo remouebitur, idque eadem celeritate ac ſi aequali ope funis ad palum admota eſſet. Cum enim palus omni motui reſiſtat, vis qua pertica in directione RS truditur eundem praeſtabit effectum, ac ſi nauis pari vi in directione SR propelleretur. Atque ſi numerus hominum perticam trudentium ſit $= \psi$, atque bb ſit planum motu directo eandem reſiſtentiam, quam nauis patiens, idque in pedibus quadratis exprimatur, erit celeritas, qua nauis in directione AR a palo remouebitur, debita altitudini $\frac{\psi}{2bb+\psi}$ pedum.

§. 569. Quando nautae ad fundum aquae pertingere Tab. XVII. fig. 5.
poſſunt, perticam RS ipſi in S oblique infigunt, et contra R huic perticae innitendo nauem in directione ba promouent. Quanta enim vi homo in naui conſtitutus perticae RS incumbit, eamque contra fundum S vrget, tanta vi ipſe homo in directione Rr repellitur. Quatenus autem ab hac vi ſurſum in directione Rt eleuatur, iſte effectus in ſolum hominem redundat, neque nauis alium effectum hinc ſentit, niſi quod eius pondus ea hominis parte, quam pertica ſuſtinet, minuatur. Altera autem vis in directione horizontali Ru tota ad nauem propellendam impenditur, ſiquidem homo contra pauimentum nauis innitendo pedibus hanc vim in nauem transferat. Ad hanc vim determinandam ſit vis, qua homo virgae RS incumbit, $=$ ponderi p, atque anguli REa, quo inclinatio perticae ad horizontem indicatur, ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$; hinc per reſolutionem fit vis in directione $Rt = mp$, qua pondus hominis ipſiusque nauis ſubleuatur,

altera autem vis Ru qua nauis promouetur erit $=$ np.

§. 570. Vim autem, qua homo perticae in directione RS inniti valet, hoc modo colligere poterimus. Sit pondus hominis proprium $= q$, ac manifeſtum eſt, ſi pertica haberet ſitum verticalem, tum hominem toto hoc pondere q perticae incumbere poſſe; perticae ergo inclinatae RS ponderis tantum ſui parte mq inniti poterit. At praeter pondus proprium homo pollet vi horizontaliter vel trahendi vel trudendi, quae, ſi ſit in quiete, ponatur $= p$, pro quo pondere ante 30 vel 40 libras aſſumſimus, ſin autem progrediatur celeritate altitudini v debita, erit ea vis $= p(1-\frac{v}{\alpha})$ denotante $\sqrt{\alpha}$ maximam celeritatem, qua homo vacuus currere valet, vbi α eſt altitudo vnius circiter pedis. Quoniam vero hac vi in perticam oblique agit, eius portionem $np(1-\frac{v}{\alpha})$ in directione RS impendit. Vtraque ergo vi homo perticam in directione RS vrgebit vi $= mq + np(1-\frac{v}{\alpha})$; ac tanta vi homo in directione Rr vrgebitur, ſi quidem v ſit altitudo debita celeritati, qua homo progreditur.

§ 571. Quia autem homo incumbens perticae RS tanta vi, eadem celeritate, qua nauis progreditur, ambulare debet, ponamus v eſſe altitudinem celeritati nauis iam acquiſitae debitam; qua vniformiter iam procedat; atque ſuperficies nauis tantam patiatur reſiſtentiam, quantam ſuperficies plana bb eadem celeritate directe in aqua mota; erit ergo vis ad nauem promouendam requiſita $= \frac{Mbbv}{V}$. Nauis autem in directione horizontali Ru propellitur vi $= mnq + nnp(1-\frac{v}{\alpha})$; ex quo habebitur iſta ae-

quatio

Digitized by Google

quatio $\frac{Mbbv}{V} = mnq + nnp - \frac{nnpv}{\alpha}$; quae ergo dat $v = \frac{V\alpha(mnq + nnp)}{Mbb\alpha + Vnnp}$. Cum α ſit vnius pedis, ſi bb in pedibus quadratis exprimamus, ponamusque $p = 32$ libr. et $q = 128$ libr. (conueniet enim pondera nimis parua accipere) fiet $v = \frac{4mn + nn}{2bb + nn}$ pedibus, atque $15\ V\frac{1000(4mn + nn)}{2bb + nn}$ dabit numerum pedum vno minuto percurſorum.

§. 572. Si plures homines ſimili modo perticis innitantur tum nauem vtique celerius propellent; ponamus numerum hominum eſſe $= \psi$, atque omnes perticis aequaliter ad horizontem inclinatis incumbere; prodibit celeritas nauis vniformis debita altitudini $v = \frac{(4mn + nn)\psi}{2bb + nn\psi}$ ped. Quoniam maximus valor ipſius nn eſt $= 1$, patet numerum $nn\psi$ ſemper fore valde paruum reſpectu numeri $2bb$; ex quo erit proxime $v = \frac{(4mn + nn)\psi}{2bb}$: ex cuius conſideratione intelligitur, dari certum quendam angulum REa, ſub quo vis hominum maximam celeritatem naui inducat. Fit enim ob $nn + mm = 1$ haec formula $4mn + nn$ maximum ſi ſumatur $\frac{m}{n} = \frac{V17 - 1}{4}$, quae dat angulum RE$a$ $= 37°, 59'$; eritque $m = \frac{V17 - 1}{V(34 - 2V17)}$ et $n = \frac{4}{V(34 - 2V17)}$; vnde oritur $v = \frac{(V17 + 1)}{4bb} = 1,2808. \frac{\psi}{bb}$, ita vt hoc modo nauis vno minuto propelli debeat per ſpatium $536, 82\ V\frac{\psi}{bb}$ pedum. Celerius igitur hoc pacto nauis propellitur quam per tractionem funis horizontalis, quippe qua ſub iisdem conditionibus nauis propellitur per ſpatium $335, 40\ V\frac{\psi}{bb}$ pedum.

§. 573. Hactenus autem non attendimus vires hominum verticales et horizontales ita inter ſe comparatas eſſe oportere, vt per eas perticae eadem obliquitas conſeruetur;

tur; cum enim pertica circa S ſit mobilis, niſi virium momenta reſpectu S ſe deſtruant, ipſa pertica circa S mouebitur, quo fieret, vt minor pars ad motum nauis impenderetur. Hancobrem debebit eſſe $nq = mp$; quoniam igitur q ipſum hominis pondus excedere nequit, quod tantum 128 librarum aſſumſimus; atque vis horizontalis p vltra 40 aut 50 libras accipi nequit, neceſſe eſt vt tam $\frac{mp}{n}$ non excedat q, quam $\frac{nq}{m}$ non excedat p. Scilicet ſi angulus REa fuerit ſemirectus et $m = n$, fit $q = p$; hoc ergo caſu maior ponderis hominis pars, quam quae aequalis eſt vi p impendi nequit; eritque adeo tam q quam p tantum 40 circiter librarum. His obſeruatis ob $nq = mp$ fiet $mq + np = \frac{p}{n}$; hincque oritur $v = \frac{V\alpha p}{Mbh\alpha + Vnnp}$, ita vt obliquitas perticae motum nauis eatenus tantum acceleret, quatenus in denominatore terminus $Vnnp$ ob $nn < 1$ minor redditur.

Tab. XVII. fig. 3. §. 574. Proficiſcitur vtique iſte effectus, quo nauis tam ope funis tracti, quam perticae truſae propellitur, a reactione, quae actioni perpetuo eſt aequalis. Quanta enim vi funis SR in S fixus trahitur, in directione SR, tanta vi ipſe funis retrahit in directione RS, hacque vi nauis, quia eſt mobilis verſus palum PQ vrgetur. Similique modo ſi RS fuerit virga ſeu pertica rigida, quae in S applicata trudatur ſecundum directionem RS, tum eadem tanta vi in directione contraria SR repellet, nauemque a palo remouebit. Quantumuis autem hoc principium reactionis ſit certum, tamen genuina ac propria vis nauem immediate mouens in actione pedum hominis trahentis ſeu trudentis, eſt ſita. Dum enim homo manibus funem

funem in R prehenſum verſus puppim B trahit, tum pedibus proram verſus renititur, quae vis cum immediate naui ſit applicata, eam propellit. Manifeſtum autem eſt, vtrouis modo actio conſideretur, eandem vim reſultare nauem mouentem, ita vt alter modus alterum confirmet, atque effectum actionis, quem determinauimus, magis corroboret.

§. 575. Accedamus iam propius ad inſtitutum huius capitis quo actionem remorum in aqua vibratorum inueſtigare propoſuimus: et ne mobilitas aquae nimiam initio pariat difficultatem, remum ROS non aquae ſed obici firmo MN inniti ponamus. Repraeſentetur igitur remus linea recta RS quae primum mobilis ſit circa punctum fixum S, tum vero etiam hypomochlium O in ora navis ſit poſitum, circa quod, etſi eſt mobile, ipſa nauis conuerti poteſt; ita vt primo nauis cum remo motum communem circa S; deinde vero ſola nauis motum proprium circa O recipere queat. Trahat remex in R remum in directione RP manibus vi quapiam, atque manifeſtum eſt, remigem aequali vi pedibus nauem in directione contraria PR repellere debere. Hoc igitur caſu remus in directione RP certa quadam vi ea ſcilicet quam remex exercet, ſollicitabitur. Simul vero nauis in directione contraria PR eadem vi repelletur: quantus igitur effectus ab his duabus viribus ad motum nauis reſultet, inueſtigari oportet. Tab. XVII. fig. 6.

§. 576. Perſpicuum iam primum eſt, ſi nauis cum remo vnum corpus inflexile conſtitueret, ita vt circa O nullus nauis motus oriri queat, quod eueniret ſi remi pars OR in naui firmiter affigeretur, hoc caſu inquam

 per-

perſpicuum eſt, quantacunque vis a remige impendatur, nullum omnino motum oriri poſſe. Alius enim motus tum locum habere nequit praeter rotatorium circa punctum fixum S; at reſpectu huius puncti S momenta duarum illarum virium, inter ſe aequalium et contrariarum, ſe penitus deſtruunt, ita vt ab illis nullus motus circa S oriri queat. Quodſi autem remum tantum loco ſuo fixum ponamus, ita vt alius motus oriri nequeat, niſi rotatorius nauis circa hypomochlium O, tum vis remigis manu remum in directione RP trahentis, ob remum immobilem, nullum omnino effectum producet, vis autem contraria, qua pedibus renititur, nauem circa O ſecundum plagam AEB conuertet, qui motus cognoſcetur ex momento vis PR reſpectu puncti fixi O. Hoc ergo caſu nauis, cuius prora in A, regredietur potius quam progredietur.

§. 577. Dum autem hoc caſu nauis circa punctum fixum O conuertitur in plagam AEO, neceſſe eſt vt punctum O vim ſuſtineat, quae id prorſum trudere conetur, vti euenit in omni motu rotatorio circa axem fixum. Hancobrem ſi remo mobilitas circa S iterum concedatur, ita vt punctum O fiat mobile, tum illa vis effectum ſuum actu exeret, punctumque O vna cum naui circa S in directione RP circumaget. Inducetur ergo hoc pacto naui duplex motus, primum nempe rotatorius circa hypomochium O in plagam AEB; ac deinde inſuper motus circa punctum fixum S in plagam contrariam BEA, quo duplici motu nauis omnino promouebitur. Cum igitur iſte motus ex duplici motu angulari ſit compoſitus, binique ſint axes in S et O circa quos motus exiſtere queat, inueſtigatio motus nauis hinc oriundi altioris eſt

inda-

Digitized by Google

indaginis, neque ope principiorum hactenus ad motum nauium a datis viribus ortum determinandum adhibitorum definiri poterit: ex quo maiori cura huic inquiſitioni erit incumbendum.

§. 578. Sit ergo virga rigida RS mobilis circa axem fixum S, quem perpendicularem ad planum figurae concipiamus; cum hac autem virga in O ita connexum ſit corpus AB, vt id circa axem ad planum figurae pariter normalem, qui per O tranſeat, libere gyrari queat: perſpicuum enim eſt caſum nauis, quem finximus, huc redire. Iam antequam vires, quibus corpus actu ſollicitatur, atque ad motum incitatur, perpendamus, inquiramus generatim in motum, qui in corpus cadere queat. Ac primo quidem virga RS alium motum praeter angularem circa axem S recipere nequit, perueniat itaque angulo RSr confecto in ſitum Sor, ſi igitur corpus AB non eſſet mobile circa O, motum virgae perfectiſſime ſequi deberet, ita vt totum corpus aequali motu angulari circa axem S feratur: puncta ſcilicet O, R, V, quae hoc caſu aeque ad corpus ac virgam pertinent transferentur in o, r, v, ita vt ſit $So = SO$; $Sr = SR$; et et $Sv = SV$. Tab. XVIII. fig. 1.

§. 579. Tribuamus nunc corpori AB mobilitatem circa axem O, qui, quia virgae motum neceſſario ſequitur, priori motu translatus eſt in o. Gyretur ergo interea, dum virga RS motu angulari RSr in ſitum proximum RSr peruenit, corpus AB angulo quocunque circa axem o; ita vt linea ov, quatenus ad corpus refertur, confecto angulo voV circa axem o perueniat in ſitum oV. Haecque itaque recta oV alicubi ſecabit rectam SR productam

ductam in puncto V, hocque punctum V, quatenus ad corpus AB refertur, ſitum ſuum prorſus non mutabit; etſi enim motu angulari circa axem S transfertur in *v*, tamen motu angulari corporis circa axem O iterum in priſtinum locum V reſtituitur. Cum igitur in hoc motu generali, qui omnes motus poſſibiles in ſe complectitur punctum corporis V quieſcat, punctumque O in *o* transferatur, perſpicuum eſt corporis AB motum eundem omnino fore, ac ſi corpus circa axem fixum V motu angulari OV*o* ferretur interea, dum virga RS motu angulari RS*r* circa axem fixum S promouetur.

§. 580. Quoniam igitur corpus AB circa axem fixum V motu angulari OV*o* transfertur, videamus quanta vi opus ſit ad motum hunc in corpore AB generandum. Dum autem corporis punctum O ſpatiolum O*o* percurrit, aſſignari poterit ſpatiolum, quod quaevis corporis particula interea abſoluere debet; atque hinc vis acceleratrix ex eaque porro vis motrix ad quamuis particulam mouendam determinatur. Erit ſcilicet vis acceleratrix cuiusvis particulae proportionalis ſpatiolo percurrendo ſeu ipſi diſtantiae ab axe V, eiusque directio normalis erit ad hanc diſtantiam. Vis acceleratrix autem in maſſam cuiusque particulae ducta dabit vim motricem. Quodſi ergo ſingulae iſtae vires colligantur reſultabit vis ipſis omnibus aequiualens, cuius tam quantitas quam directio debet determinari; quae inueſtigatio etſi ex principiis ſtaticis poteſt expediri, tamen ea ſuccinctius abſoluetur ex iis, quae ſupra de motu angulari cuiusuis corporis circa axem fixum tradidimus.

§. 581

§. 581. Quod primum ad directionem iſtius vis ad motum angularem circa axem fixum V producendum requiſitae attinet, ea perpetuo eadem deprehenditur, ſiue motus ſit incitatior ſiue remiſſior. Ad eam definiendam conſiderari debet corporis centrum grauitatis, quod ſit in G, ex quo ad axem V ducatur normalis GV, eritque directio illius vis quaeſita normalis ad hanc rectam VG productam. Sit maſſa ſeu pondus totius corporis $AB = M$, eiusque momentum inertiae reſpectu axis per centrum grauitatis G ducti $= Mbb$: quo cognito ſumatur in VG producta $GT = \frac{bb}{VG}$; eritque T punctum applicationis vis illius quaeſitae; ideoque ſi ducatur TQ normalis ad VT, erit TQ directio vis, quae in corpore AB motum angularem circa axem V producere valet. Quantitas autem huius vis ex effectu debet colligi, qui cum ſit etiamnunc incognitus, ponamus vim iſtam in directione TQ ſollicitantem $= Q$.

§. 582. Cum autem quantitas huius motus angularis a viribus, quibus corpus actu ſollicitatur pendeat, neceſſe eſt, vt vis iſta Q in directione TQ ſollicitans aequiualeat viribus corpus actu ſollicitantibus; Quamobrem ſi loco huius vis Q corpori applicata concipiatur vis aequalis at in contrariam plagam ſollicitans, iſta vis cum viribus corpus actu ſollicitantibus in aequilibrio conſiſtet, ſeu corpus in perfecta quiete conſeruabit; vnde tam quantitas huius vis Q, quam poſitio axis V, a qua punctum T pendet, determinabitur. Aſſumo hic autem virgam RS inertiae expertem, ita vt ad eam circa axem S mouendam nulla vi opus ſit: ſi enim inertia remi RS quoque in computum duci debeat, quod deinceps faciemus, etiam vis ad

eum in ſitum Sr promouendum requiſita conſiderari debet, cuius opoſita ſimul cum ea, quae vi Q opponitur effectum virium actu ſollicitantium deſtruet.

§. 583. Quoniam igitur duplex motus rotatorius poſſibilis eſt, nempe circa axes S et O, neceſſe eſt vt momenta virium actu ſollicitantium reſpectu horum axium aequalia ſint momentis ex vi $TQ = Q$ oriundis reſpectu eorundem axium. At vis $TQ = Q$ momentum reſpectu axis O eſt $= Q . OQ . \text{ſin. } A . OQT = \frac{Q . OQ . HV}{GV}$; atque momentum reſpectu axis S eſt $= Q . QS . \text{ſin. } A . TQS = \frac{Q . QS . HV}{GV}$. Illud momentum ergo tendet ad corpus AB circa axem O in ſenſum AVB conuertendum, hoc vero momentum impendetur ad corpus cum remo circa S in ſenſum Vv rotandum. Vterque autem effectus reducitur ad rotationem corporis circa axem imaginarium V: atque cognita vi Q et puncto V, motus corporis perinde ex regulis datis definietur, ac ſi axis V eſſet fixus. Etſi enim hic axis reuera non eſt fixus, tamen vis Q corpus ita mouebit, vt punctum V in quiete perſeueret. Ideoque corpus ab hac vi pari modo mouebitur, quo moueretur, ſi omnino eſſet liberum.

§. 584. Sit iam vis, quam remex exercet ad remum RS in directione RP protrahendum $= p$: atque remex vi aequali et contraria nauem AB pedibus ſeu ea corporis parte, qua naui inhaeret, retrourgebit, vi ſcilicet p in directione PR. Harum virium poſterior tantum impendetur ad nauem circa axem O rotandam: pro axe autem S ambae ſimul effectum ſuum exerent. Cum autem hae duae vires ſint aequales et oppoſitae, ſe mutuo deſtruent, ita vt reſpectu axis S momentum inde oriatur nullum.

Digitized by Google

nullum. Quamobrem momentum ex vi Q reſpectu huius axis ortum debet nihilo aequari, vnde fit $\frac{Q.QS.HV}{GV}=o$. Ex vi autem p nauem in directione PR vrgente oritur momentum reſpectu axis $O=p.RO$ tendens in ſenſum AVB, vnde iſta reſultat aequatio $p.RO=\frac{Q.OQ.HV}{GV}$ ex quibus duabus aequationibus tam punctum V quam vis ipſa Q cognoſcetur.

§. 585. Ex priori aequatione intelligitur vel Q, vel QS, vel HV eſſe oportere $=o$, at ſecunda docet nec Q nec HV nihilo aequales eſſe poſſe; eritque igitur $QS=o$; atque recta TQ ad rectam VGT normaliter ducta per ipſum punctum S tranſibit. Hinc porro erit $OQ=SO$; ideoque $p.RO=\frac{Q.SO.HV}{GV}$. Quia duae habentur incognitae, quantitas vis Q nimirum, et poſitio puncti V, ponamus $HV=z$; erit $VG=\sqrt{(z^2+GH^2)}$ et $GT=\frac{bb}{\sqrt{(z^2+GH^2)}}$: ergo $VT=\frac{z^2+bb+GH^2}{\sqrt{(zz+GH^2)}}$; hincque $VQ=\frac{zz+bb+GH^2}{z}=VS$ $=z+SH$: ex qua aequatione elicitur $HV=z=\frac{bb+GH^2}{SH}$ indeque $GV=\frac{\sqrt{(b^4+2b^2.GH^2+(GH^2+SH^2)GH^2)}}{SH}$. His valoribus inventis vis Q ita definietur vt ſit $Q=\frac{p.RO}{SO}\cdot\frac{GV}{HV}$, vnde totus effectus, quem vis remigis producit, abſolute poteſt definiri.

§. 586. Vis remigis ergo eundem in naui producet effectum, ac ſi, remota axium conſideratione, ſola nauis ſollicitaretur vi $=\frac{p.RO}{SO}.\frac{GV}{HV}$ in directione SL, ita vt producta RS in N angulus LSN aequalis ſit angulo HGV. Quare ſi haec vis SL reſoluatur in laterales SM et SN, quarum illa ſit ad directionem remi RS normalis, haec vero in directionem remi incidat, ſiet vis $SM=\frac{p.RO}{SO}$;

et vis $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH}{HV} = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{CH.SH}{bb + CH^2}$. Illa iam vis SM eſt ipſa illa vis, qua remus contra obicem S apprimitur indeque propter reactionem repellitur; quoniam eſt vis SM ad vim RP vti RO ad SO, vti natura vectis hypomochlio O incumbentis poſtulat. Altera autem vis SN retrahet nauem verſus S; ex quo intelligirur, niſi ea adeſſet, per vim remigis nauem AB ab obice S retractum iri, vel ſi remus in S firmiter inhaereat, hypomochlium O de loco ſuo mutatum iri, niſi punctum remi O naui ſit firmiter affixum.

§. 587. Ponamus autem nunc remum inertia ac pondere praeditum, ita vt is ſine detrimento virium circa S moueri nequeat. Sit pondus remi $= K$, eius centrum gravitatis in I, atque momentum inertiae $= Kkk$. Sumatur $IK = \frac{kk}{SI}$, ita vt K ſit centrum oſcillationis remi axi ſuspenſionis S conueniens; ac requiretur vis quaedam R remo in K normaliter puta in directione KF applicanda, quae in ipſo motum angularem circa axem S producat. Momentum ergo huius vis erit $= R.KS$, quod diuiſum per momentum inertiae reſpectu axis S nempe per $K(kk + SI^2)$ dabit vim acceleratricem remi angularem $= \frac{R.KS}{K(kk + SI^2)}$. Vis autem acceleratrix angularis nauis circa axem V erit $= \frac{Q.TV}{M(bb + GV^2)}$, quae vires angulares cum ſint in ratione angulorum OSo et OVo ſimul deſcribendorum, ſeu vt VO ad SO dabunt hanc aequationem $\frac{R.KS.SO}{K(k^2 + SI^2)} = \frac{Q.TV.VO}{M(b^2 + GV^2)}$ ſiue $\frac{R.SO}{K.SI} = \frac{Q.VO}{M.GV}$ ob $IK = \frac{kk}{SI}$ et $ST = \frac{bb}{GV}$.

§. 588. Quoniam ex hac vi remo applicata nullum naſcitur momentum ad axem O relatum; manebit ſuperior aequatio pro iſto axe quae erat $p.RO = \frac{Q.OQ.HV}{GV}$.

At

At reſpectu axis S, pro quo a vi remigis nullum momentum reſultat, momenta virium aſſumtarum Q et R ſe mutuo deſtruere debent, quae cum in figura ad eandem partem vergant, erit $R.KS + \frac{Q.QS.HV}{GV} = 0$. Cum autem in aequatione paragraphi praeced: ſit $Q : R = \frac{SO}{K.SI} : \frac{VO}{M.GV}$ erit $\frac{KS.VO}{M.GV} + \frac{QS.SO.HV}{K.SI.GV} = 0$, ſeu $K.SI.KS.VO - M.QS.SO.HV = 0$. Sit vt ante $HV = z$; erit $VO = z + HO$; $VQ = \frac{zz+bb+GH^2}{z}$; et $QS = z + SH - VQ = \frac{z.SH-bb-GH^2}{z}$ quibus ſubſtitutis emergit iſta aequatio $K.SI.KS(z+HO) + M.SO(z.SH-bb-GH^2) = 0$, quae praebet $z = HV = \frac{M.SO(bb+GH^2) - K.SI.KS.HO}{K.SI.KS+M.SO.SH}$; vnde erit $Q : R = \frac{SO}{K.SI} : \frac{z+HO}{M\sqrt{(zz+HG^2)}} = (K.SI.KS + M.SO.SH)\sqrt{(zz+HG^2)} : K.SI(bb+HG^2+SH.HO)$.

§ 589. Ex valore ipſius $HV = z$ inuento reperietur $QS = \frac{-K.SI.KS(bb+GH^2+SH.HO)}{M.SO(bb+GH^2) - K.SI.KS.HO}$; quae expreſſio, ſi fuerit affirmatiua, punctum Q citra S cadet, vti figura repraeſentat, hincque cognoſcitur locus applicationis vis Q nauem ad motum ſollicitantis. Reſoluatur haec vis, vt ante fecimus in laterales, ac prodibit vis $QW = \frac{Q.HV}{GV} = \frac{p.RO}{OQ}$. At eſt $OQ = OS - SQ = \frac{M.SO^2(bb+GH^2)+K.SI.KS(bb+GH^2+HO^2)}{M.SO(bb+GH^2)-K.SI.KS.HO}$ vnde vis $QW = \frac{p.M.RO.SO(bb+GH^2)-p.K.RO.SI.KS.HO}{M.SO^2(bb+GH^2)+K.SI.KS(bb+GH^2+HG^2)}$ et vis $QN = \frac{p.M.RO.SO.GH.SH+p.K.RO.GH.SI.KS}{M.SO^2(bb+GH^2)+K.SI.KS(bb+GH^2+HO^2)}$.

§. 590. Ex his formulis intelligitur, ſi pondus remi K valde ſit paruum reſpectu ponderis nauis M, tum terminos, in quibus ineſt K ſatis tuto negligi poſſe: atque etiamſi plures remi adhibeantur, tamen omnium ſimul ſumtorum pondus adeo prae pondere nauis M quaſi infinite paruum ſpectari poteſt. Hancobrem ſine ſenſibili

 errore

errore formulis prius inuentis vti poterimus, nauisque motus is erit, qui producitur a duabus viribus SM et SN in puncto S applicatis, quarum huius directio SN in directionem remi incidit, illius vero ad hanc eſt normalis, erit autem vis $SM = \frac{p \cdot RO}{SO}$ et vis $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{b^2 + GH^2}$. Quae vires cum in nauem aeque agant, ac ſi eſſet libera ſaltem minimo temporis puncto, duplicem motum in naui generabunt, primo nempe motum progreſſiuum, quo centrum grauitatis in directione ipſi SL parallela promouetur; ac deinde motum rotatorium circa axem verticalem per centrum grauitatis G tranſeuntem, quo nauis in ſenſum AVB conuertetur.

§. 591. Si ex altera nauis parte alius remus ſimiliter contra obicem firmum applicetur, atque aequali vi a remige vrgeatur, manifeſtum eſt, nauem in directione ſpinae BA eſſe progreſſuram. Acceleratio enim ſecundum hanc directionem duplicabitur, verum acceleratio in latera vtrinque deſtruetur. Sit anguli GYH, quem remus cum ſpina nauis conſtituit, ſinus $= m$, coſinus $= n$; ex vi $SM = \frac{p \cdot RO}{SO}$ orietur vis nauem in directione ſpinae GA propellens $= \frac{mp \cdot RO}{SO}$; et vis in directione GE ad ſpinam normali $= \frac{np \cdot RO}{SO}$; praeterea vero inde oritur momentum nauem in ſenſum AVB conuertens $= \frac{p \cdot RO \cdot SH}{SO}$. Simili modo ex vi $SN = \frac{p \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ prodit vis nauem in directione GA propellens $= \frac{-np \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$ in directione GE vis $= \frac{mp \cdot RO}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$. Denique indidem naſcitur momentum nauem in ſenſum BVA conuertere conans $= \frac{p \cdot RO \cdot GH}{SO} \cdot \frac{GH \cdot SH}{bb + GH^2}$.

§. 592. Quodſi autem ex altera nauis parte aequalis remus aequaliter contra [illegible] ...em fuerit applicatus,

tus, ita vt ambo cum obicibus S firmiter ſint affixi, tum etiam ſuper hypomochliis in O repere omnino nequeant manifeſtum eſt, in naui nullum omnino motum produci poſſe; margines enim nauis vel propius ad ſe inuicem compeli, vel diduci deberent. Quare vt motus exiſtere queat, remos vel in obicibus S non firmiter affixos eſſe opertet, vel ſpatium ipſis eſt concedendum per quod remi ſuper hypomochlia O repere queant. Ad hoc autem vti vidimus impendetur vis illa SN; ita vt haec vis iam non amplius in computum duci debeat. Ex quo a duobus iſtiusmodi remis nauis in directione GA propelletur vi $= \frac{2mp \cdot RO}{SO}$. Vires ad latera autem GE tendentes pariter ac momenta motum rotatorium generantia vtrinque ſe deſtruent.

§. 593. Acquiſierit iam nauis a duobus huiusmodi remis ſollicitata motum in directione ſpinae BA, ſitque eius celeritas debita altitudini v. Progrediatur hac celeritate temporis elemento centrum grauitatis G per ſpatiolum $Gg = dx$; atque interea hypomochlium ſeu punctum remi O transferetur in o, vt ſit $Oo = \frac{GH\,dx}{GY} = m\,dx$; ex quo punctum R circa S conficiet ſpatium $Rr = \frac{m \cdot SR \cdot dx}{OS}$; circa O igitur motu relatiuo in naui abſoluet ſpatiolum $= \frac{m \cdot RO \cdot dx}{SO}$, ideoque circa O angulum $= \frac{m\,dx}{SO}$ abſoluet: quo angulo angulus GYO diminuetur. Cum igitur huius anguli diminuti ſinus ſit $= m + dm$ et coſinus $= n + dn$ fiet $dm = -\frac{mn\,dx}{SO}$ et $dn = \frac{mm\,dx}{SO}$; vnde erit $\frac{dn}{mm} = \frac{dx}{SO} = \frac{dn}{1-nn}$, et integrando $\frac{x}{SO} = \frac{1}{2}\, l\, \frac{1+n}{1-n} + C$. erit ergo $\frac{1+n}{1-n} = e^{\frac{2(x-c)}{SO}}$ et $n = \frac{e^{2(x-c):SO} - 1}{e^{2(x-c):SO} + 1}$; et

$m =$

Digitized by Google

$m = \frac{2e^{(x-c):SO}}{e^{2(x-c):SO}+1}$. Motus ergo initio, vbi erat $x=0$, ſitus remi reſpectu nauis ita erat comparatus vt eſſet $m = \frac{2e^{c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$ et $n = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$.

Tab. XVIII. fig. 2. §. 594. Ponamus nauem AB initio, vbi remi RS et rs agitari coeperunt ſitum tenuiſſe, quem figura repraeſentat; euaneſcente ſpatio x. Sit anguli BYS ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$, fiet $\nu = \frac{1-e^{2c:SO}}{1+e^{2c:SO}}$, hincque $e^{2c:SO} = \frac{1-\nu}{1+\nu} = \frac{\mu\mu}{(1+\nu)^2}$ ita vt ſit $e^{c:SO} = \frac{\mu}{1+\nu}$. Cum igitur prora nauis A abſoluerit ſpatium $AX = x$, poſitio remorum conſtanter ad obices S et s applicatorum reſpectu nauis ita immutabitur vt ſit $m = \frac{2\mu e^{x:SO}}{e^{2x:SO}(1+\nu)+(1-\nu)}$ et $n = \frac{e^{2x.SO}(1-\nu)-(1-\nu)}{e^{2x:SO}(1+\nu)+(1-\nu)}$ vnde quouis loco obliquitas remorum cognoſcitur, donec tandem fiat tanta, vt amplius agere nequeat. Ponamus remos ſub ſimili obliquitate ceſſare, qua coeperant; ceſſabunt ergo ſi fiat $m=\mu$ et $n=-\nu$. Hinc erit $(1-\nu)^2 = e^{2x:SO}(1+\nu)^2$; ideoque $e^{x:SO} = \frac{1-\nu}{1+\nu}$ et $x = SO\, l\frac{1-\nu}{1+\nu}$. Deberet autem vtique eſſe $x = 2\nu.\, SO$, cuius erroris cauſa in hoc verſatur, quod quantitatem SO tanquam conſtantem aſſumſimus, quae reuera variatur, ſi punctum S maneat fixum.

§. 595. Sit igitur $SO=y$; erit $dy : Oo = YH:GH$
fig. 1. $= n:m$ hincque $dy = n\,dx$. Cum igitur ſit $dm = \frac{-mn\,dx}{SO}$
fig. 2. $= \frac{-m\,dy}{y}$ fiet $m = \frac{C}{y}$. Sit motus initio $SO=a$; fiet $\mu = \frac{C}{a}$, ideoque $C = \mu a$, ita vt prodeat $m = \frac{\mu a}{y}$ et $n = \surd(yy-$

Digitized by Google

$\frac{\sqrt{(yy-\mu^2 aa}}{y})$. Habetur ergo $\frac{ydy}{\sqrt{(yy-\mu^2\alpha^2)}} = dx$, et $x = \sqrt{(yy-\mu^2 \alpha^2)}C$, $+$ quoniam ſi $x = 0$ fit $y = a$, erit $x = \sqrt{(yy-\mu^2 a^2)} + \nu a$; quia coſinus anguli BYO ſeu ν eſt negatiuus. Quo circa erit $SO = y = \sqrt{(aa-2\nu ax+xx)}$; hincque $m = \frac{\mu a}{\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)}}$ et $n = \frac{\nu a+x}{\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)}}$. Remus ergo agere ceſſabit, quando fit $m = \mu$ et $n = -\nu$, hoc eſt percurſo ſpatio $x = 2\nu a$ vti rei natura poſtulat. Ceterum prior valor $x = al\frac{1-\nu}{1+\nu}$ ab hoc parum differt, ſi quidem obliquitas remi fuerit valde parua.

§. 596. Cum igitur vis remorum ad nauem mouendam inuenta eſſet $= \frac{2mp.RO}{SO}$; ſi ponatur tota remi RS longitudo $RS = c$, erit $RO = c-y = c-\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)}$ ob $SO = \sqrt{(aa-2\nu ax+xx)}$ durante motu, quoniam remos in S fixos ſuper margine nauis repere aſſumimus. Hinc erit vis illa $= \frac{2\mu ap(c-\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)})}{aa-2\nu ax+xx}$, ſi quidem remiges conſtanter eandem vim p exerant. At quoniam ſi remus ipſe reſpectu nauis mouetur, remex, niſi ſe ipſum moueat, remum agitare nequit, minorem vim remex in remum exeret, quam ſi quieſceret. Cum igitur remi punctum R in naui circa O feratur per ſpatiolum $= \frac{m.ROdx}{SO}$ dum nauis celeritate $\sqrt{v}$ percurrit ſpatiolum dx, erit celeritas remigis debita altitudini $= \frac{mm\cdot RO^2\cdot v}{SO^2} = \frac{\mu\mu aav(c-\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)})^2}{(aa-2\nu ax+xx)^2}$.

§. 597. Si ergo p denotet vim remigis quieſcentis atque α ſit altitudo debita celeritati, qua motus nullam amplius vim exerere poteſt, vis remigis praeſenti ſtatu aeſtimanda eſt $= p(1-\frac{\mu\mu aav(c-\sqrt{(aa-2\nu ax+xx)})^2}{\alpha(aa-2\nu ax+xx)^2})$, quae in ſuperiori expreſſione loco p debet ſubſtitui. Offendat iam nauis in motu ſuo tantam reſiſtentiam, quantam ſuper-

ficies plana $= ff$ aequali celeritate directe mota ; erit reſiſtentia $= \frac{Mffv}{V}$; ex his reſultabit nauis acceleratio $Mdv = \frac{2\mu apdx(c - \surd(aa - 2vax + xx))}{aa - 2vax + xx} - \frac{2\mu^3 a^3 pvdx(c - \surd(aa - 2vax + xx))^3}{\alpha(a^2 - 2vax + xx)^2} - \frac{Mffvdx}{V}$. Quodſi autem variationem partis remi SO tanquam infinite paruam ſpectemus vt ſit $\surd(aa - 2vax + xx) = a$ erit $Mdv = \frac{2\mu pdx(c-a)}{a} - \frac{2\mu^3 pvdx(c-a)^3}{\alpha a^3} - \frac{Mffvdx}{V}$.

§. 598. Quo iſta hypotheſis, qua longitudinem SO $= a$ conſtantem aſſumimus, propius ad veritatem accedat, obliquitatem remi BYS ab angulo recto tam parum diſcrepantem accipi oportet, vt ſit $\mu = 1$. Cui hypotheſi ſatisfit, ſi remi continuo contra nouos obices immobiles applicentur. Quoniam vero, dum remi ad nouos obices applicantur, non agunt, bina remorum paria conſiderentur, ita vt dum vnum par nauem propellit, alterum par motum ſeſe ad nouos obices applicandi conficiat. Quatuor itaque huiusmodi remi alternatim agentes nauem non magis ſollicitabunt, quam ſi duo continuo agerent; hincque quatuor remigum hoc pacto nitentium effectus in hoc conſiſtet, vt ſit $Mdv = \frac{2bpdx}{a} - \frac{2b^3 pvdx}{\alpha a^3} - \frac{Mffvdx}{V}$ poſito breuitatis gratia $RO = c - a = b$, exiſtente $SO = a$. Sic igitur ob vires continuo aequabiliter durantes motus nauis quaſi vniformiter continuabitur.

§. 599. Hoc pacto, etiamſi nauis motum a quiete inceperit, mox ad motus vniformitatem perueniet; ita vt fiat $dv = 0$. Erit ergo celeritatis, quae a quatuor iſtiusmodi remis naui inducetur, altitudo debita $v = \frac{2Va^2 b\alpha p}{2Vb^3 p + Ma^3 ff\alpha}$. Ad quam quantitatem cognoſcendam notari oportet eſſe p circiter 40 libr. ſumamus autem tantum $p = 32$ libr. α $=$ vni pedi; et ſi longitudines in pedibus rhenanis expri-

primantur fore $M = 64\,V$ librarum : ex quibus fiet $v = \frac{a^2 b}{b^3 + a^3 ff}$ ped. Hinc ſi a, b, et f, in pedibus rhenanis exprimantur, ex iis quae ſupra tradita ſunt, patet, nauem a quatuor remigibus hoc modo propulſam tempore vnius minuti primi confecturam eſſe ſpatium $15\,\sqrt{\frac{1000\,a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum.

§. 600. Caſus iſte, quo remos obicibus immobilibus applicari ponimus, locum obtineret, ſi aqua remis omnino non cederet, ſed, quaſi eſſet conglatiata, vbique obſtacula inuincibilia obiiceret; ita tamen vt ipſa nauis in motu ſuo conſuetam reſiſtentiam offendat. Quodſi ergo aqua remis nequicquam cederet, tum quatuor remiges, quorum quisque quieſcens vi 32 librarum remum vrgere valeat, nauem tanta celeritate promouebunt, vt vno minuto primo percurrat ſpatium $15\,\sqrt{\frac{1000\,a^2 b}{b^3 + a^3 ff}}$ pedum, ſi quidem remiges per aequalia temporis interualla alternatim remos vrgeant, et nouis obſtaculis applicent. Sin autem moram duplo longiorem inter ſollicitationes remorum interponant, vti fere in remigatione fieri ſolet, tum effectus repertus non quatuor ſed ſex remigibus debebitur. Hincque duodecim remiges vno minuto nauem propellent per ſpatium $15\,\sqrt{\frac{2000\,a^2 b}{2b^3 + a^3 ff}}$; et generatim 6ψ remiges per ſpatium $15\,\sqrt{\frac{1000\,\psi a^2 b}{b^3\psi + a^3 ff}}$ pedum.

§. 601. Sit P vis immaterialis, quae nauem directe in directione AX trahendo aeque celeriter promoueat, ac 6ψ remiges, eritque $M\,dv = P\,dx - \frac{Mffv\,dx}{V}$; ideoque motu ad vniformitatem compoſito $v = \frac{PV}{Mff} = \frac{P}{64\,ff}$ ped. ſi vis P in libris, et ſuperficies ff in pedibus quadratis exprimatur. At a 6ψ remigibus oritur $v = \frac{a^2 b\psi}{b^3\psi + a^3 ff}$, vnde

Digitized by Google

de erit $P = \frac{64 a^2 b ff \psi}{b^3 \psi + a^3 ff}$ librarum. Vnus ergo remex cenſendus eſt ad nauis propulſionem conferre vim $= \frac{32 a^2 b ff}{3 b^3 \psi + 3 a^3 ff}$ librarum. Quo plures ergo remiges adhibentur eo minor vis a ſingulis ad nauem propellendam naſcitur. Sin autem ſuperficies ff tanta fuerit vt terminus $b^3 \psi$ prae $a^3 ff$ euaneſcat, tum vis vnius remigis aeſtimanda erit $\frac{32 b}{3 a}$ librarum; alias autem adhuc erit minor.

§. 602. Quod ad celeritatem nauis a 6ψ remigibus ipſi impreſſam, qua vno minuto primo abſoluit ſpatium $= 15 \sqrt{\frac{1000 \psi a^2 b}{\psi b^3 + a^3 ff}}$ pedum; primo apparet celeritatem vtique augeri multiplicato remigum numero; attamen in minore ratione celeritas creſcit, quam ſubduplicata numeri remigum. Deinde quia ff exhibet reſiſtentiam nauis abſolutam, perſpicuum eſt celeritatem fere eſſe in ratione reciproca ſubduplicata reſiſtentiae, quamdiu terminus ψb^3 valde eſt paruus reſpectu termini $a^3 ff$; at niſi hoc fuerit celeritas in minore ratione creſcet; ita vt diminutio reſiſtentiae celeritatem in minore quam ſubduplicata ratione augeat. Tum vero celeritas nauis plurimum pendet a ratione $a : b$ ſeu SO : RO, neque vero longitudo remi ipſa quicquam ad celeritatem confert; ex quo remos tam breues fieri expedit, quam circumſtantiae ceterae permittunt, quo minor virium portio ad ipſos mouendos impendatur.

§. 603. Si ponamus $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b} = z$, erit altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{\psi zz}{\psi + ff z^3}$, vnde intelligitur nimis magnum valorem pro z celeritatem aeque diminuere, ac nimis paruum. Dabitur ergo valor definitus pro z ſubſtituendus, qui naui maximam celeritatem conciliet; quique continetur in hac aequatione $2 \psi = ff z^3$, ita vt ſit $z = \frac{a}{b}$

$= \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$. Quare ſi haec ratio inter partes remi RO et SO conſtituatur, nauis celerrime promouebitur; atque vno minuto primo conficiet $15 \sqrt{\frac{1000aa}{3bb}}$ pedes $= 273, 86 . \frac{a}{b}$ ped. Quando igitur $2\psi < ff$, tum remi pars SO minor capi debet quam pars RO, ſin $2\psi = ff$ fiet $SO = RO$, atque ſi numerus remigum tantopere augeatur, vt fiat $2\psi > ff$, tum remi pars SO ſuperare debet partem RO quo magis ſcilicet numerus remigum augetur, eo maior ſtatui debet ratio inter SO:RO idque in ratione ſubtriplicata.

§. 604. Cum igitur ſumta $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$, nauis a 6ψ remigibus celerrime promoueatur et vno minuto primo ſpatium $273, 86. \sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}$ pedum abſoluat, erit eius celeritas vt $\sqrt[3]{\frac{\psi}{f}}$ hoc eſt celeritas erit in ratione ſubtriplicata directa numeri remigum et ſubtriplicata inuerſa reſiſtentiae abſolutae ff. Quamobrem quo naui eidem duplo maior celeritas imprimatur numerus remigum octuplo maior ſtatui debet, manente eadem reſiſtentia; ſimul vero ratio $\frac{SO}{RO}$ duplo maior eſt capienda. Per diminutionem porro reſiſtentiae celeritas nauis quoque augetur; vt autem ex hoc capite celeritas duplo maior reddatur oporteret reſiſtentiam octuplo fieri minorem; tanta autem diminutio non eſt in noſtra poteſtate. Si profunditas carinae ſit C pedum, latitudo carinae, vti ſupra oſtendimus maior eſſe debet quam 2C; ſit ea vt ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis eo maior euadat, $= 3C$, erit ſectio carinae tranſuerſa maxima circiter $= 2CC$, atque ſi reſiſtentia multum diminuatur, fiet propemodum ff CC.

Digitized by Google

§. 605. Si igitur $\frac{SO}{RO} = \frac{a}{b}$ eam habeat rationem quam nauis celerrimus motus poſtulat, ex hac ſola ratione celeritas nauis abſoluta definietur: percurret enim nauis vno minuto primo $273, 86. \frac{a}{b}$ pedes; atque vna hora $16431, 6. \frac{a}{b}$ ped Quare cum milliare germanicum contineat 23627 ped, ſeu vt nauis vna hora milliare germanicum abſoluere queat, debet eſſe $\frac{a}{b} = \frac{23627}{16431} = \frac{10}{7}$ proxime. Hinc fiet $\frac{2\psi}{ff} = \frac{1000}{343}$, et $2\psi = \frac{1000}{343}. ff$, hincque numerus remigum ad hoc requiſitorum $6\psi = \frac{1000}{343} ff = 8\frac{3}{4} ff$. Quodſi ergo profunditas carinae ſit vnius pedis, remiges 9 vna hora milliare germanicum conficient; ſin profunditas carinae f ſit duorum pedum, remiges 35 requirentur ad vnum milliare vna hora abſoluendum. Et, ſi ſit $ff = 16$, vt fere in triremibus euenire ſolet, remiges 140 valebunt nauem vna hora per milliare germanicum promouere: remiges autem 18 eandem nauem vna hora per ſemiſſem vnius milliaris propellent.

§. 606. In inſtituto igitur noſtro hoc iam ſumus conſecuti, vt motum nauis ab actione remorum oriundum determinare valeamus, ſi aqua remis obſtaculum immobile obiiceret, quod eueniret, ſi vel aqua vtrinque circa nauem eſſet congelata, vel ſeries palorum vtrinque firmiter eſſet conſtituta, quibus remi applicari queant. Quae hypotheſis etſi a veritate abhorret, tamen ad motum nauium a vibratione remorum in aqua ortum determinandum maxime eſt accommodata atque viam dilucide ſternit; dum enim aqua motui remorum cedit, effectum a ceſſione oriundum facillime cognoſcemus, ſi ante effectum remota penitus ceſſione inueſtigauerimus. Ceterum hypotheſis

Digitized by Google

theſis, quam hactenus tractauimus, etiam in ſe ſpectata non omni caret vtilitate; ſaepenumero enim euenit, vt remos contra obices firmos applicare liceat; hisque ideo caſibus quantus naui motus imprimatur, operae pretium erat inueſtigare: ne vllus nauium propellendarum modus eſſet praetermiſſus.

§. 607 His igitur praeparatis progrediamur ad effectum remorum more ſolito in aqua vibratorum determinandum, qui etſi in motu naui impreſſo conſumitur, tamen initio nauem a vi quacunque externa in eodem ſitu firmiter detineri ponamus. Contineatur itaque nauis A B conſtanter in quiete, ita vt vis a remis orta ipſi nullum motum inducere valeat; ſitque COD remus mobilis circa hypomochlium in naui fixum O, qui a remige in naui ſedente ac ſecundum directionem CR ad remum continuo normalem ita vibretur, vt extremitates C et D circa O arcus circulares CR et DS deſcribant. Verſetur autem portio quaedam remi DE in aqua, cuius planities in ſitu verticali contra aquam impellatur atque cum vis aquae normaliter agat ad ſuperficiem remi, erit directo vis aquae a remo exceptae horizontalis, quae vtique ad nauem promouendam maxime eſt accommodata. Aſſumimus autem ſuperficiem remi, qua aquam ſtringit, planam, ita vt per lineam rectam COD repraeſentari queat. Tab. XVIII. fig. 3.

§. 608. Perductus ſit remus iam in ſitum ROS, ibique ſit eius motus, quo in ſitum proximum rOs promouetur tantus, vt celeritas puncti R per ſpatiolum Rr debita ſit altitudini u, ex qua cuiusuis remi puncti celeritas cognoſcetur. Nempe ſi dicatur $OS = a$, $OR = b$, et interuallum quodcunque $OX = x$, erit celeritas puncti

S =

$S = \frac{x\sqrt{u}}{b}$, et celeritas puncti $X = \frac{x\sqrt{u}}{b}$. Quo autem inveſtigatio haec latius pateat, atque ad nauem motam facile traduci queat, aquam non quieſcentem ſed motam ponemus, ita vt in directione HX ſpinae nauis AB parallela fluat celeritate debita altitudini v; tantam enim celeritatem aqua habere cenſenda eſt, ſi nauis in directione ſpinae BA progrediatur celeritate altitudini v debita. Quodſi autem aqua euaneſcente v quieſceret, remi particula $Xx = dx$ contra aquam directe impingeret celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, ex qua vis reſiſtentiae aquae determinari deberet.

§. 609. Quoniam vero aqua ipſa mouetur in directione HX celeritate $\sqrt{v}$, atque remi elementum Xx in directione KN normali ad OX celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, quaeri debet celeritas aquae relatiua, qua in remum impingit. Ad hoc capiatur XM ad XN vt $\sqrt{v}$ ad $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, et compleatur parallelogrammum XNLM: cuius diagonalis LX exhibebit tam directionem quam celeritatem, qua aqua in remi particulam Xx irruet. Si enim remus tanquam quieſcens conſideretur, eiusque motus in aquam transferatur: tum ſi aqua nullum haberet motum proprium, particula aquae L moueri cenſenda eſſet in directione LM normali ad remum, celeritate $\frac{x\sqrt{u}}{b}$, ob motum autem proprium eadem aquae particula L progredietur in directione LN parallela ipſi AB celeritate $\sqrt{v}$. Quare vtroque motu particula L deſcribet diagonalem LX, et remi elementum Xx percutiet ſecundum hanc directionem celeritate quae erit ad $\sqrt{v}$ vel $\frac{x\sqrt{u}}{b}$ vti eſt LX ad LN vel LM.

§. 610. Sit anguli BYO quem directio remi RS cum directione ſpinae nauis AB conſtituit ſinus $= m$,

coſinus

coſinus $= n$ poſito ſinu toto $= 1$, erit anguli LNX ſinus $= n$ coſinus $= m$. Hinc cum ſit $NX = \frac{x\sqrt{u}}{b}$ et $NL = \sqrt{v}$ reperietur $LX^2 = v + \frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b}$, quae exprimet quadratum celeritatis, qua aqua in remi elementum Xx incurrit. Incurrit autem ſub angulo LXO, cuius ſinus aequatur coſinui anguli LXN. At anguli L XN ſinus eſt $= \frac{n.LN}{LX} = \frac{n\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$; eiusque ergo coſinus ſeu ſinus anguli incidentiae $LXO = \frac{\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v}}{\sqrt{(v - \frac{2mx\sqrt{uv}}{b} + \frac{xxu}{bb})}}$. Cum igitur vis aquae impellentis eſt vt quadratum celeritatis; atque vt quadratum ſinus anguli incidentiae coniunctim, erit ea vt $(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$; quae quantitas ducta in remi elementum in quod agit, dabit volumen aquae; cuius pondus aequatur vi aquae impingentis.

§. 611. Ponatur latitudo remi in loco X, qua aquam percutit $= y$, erit elementum remi illam vim ſentiens $= ydx$; vnde vis, quam hoc remi elementum ab aqua ſuffert, aequiualebit ponderi aquae, cuius volumen eſt $= ydx(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$. Huiusque vis directio ad remum eſt normalis. Notari autem oportet, vbique eſſe debere $\frac{x\sqrt{u}}{b} > m\sqrt{v}$, alioquin enim remus non parte anteriori aquam percuteret, ſed aqua in parte poſtica in ipſum irrueret. Quoniam vero alicubi angulus BYO exiſtit rectus, ideoque $m = 1$, neceſſe eſt vt ſit $\frac{x\sqrt{u}}{b} > \sqrt{v}$; hincque $x > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Initium ergo remi X quo aquae immergi incipit magis ab O remotum eſſe oportet, quam interuallo $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; ſi quidem directio RS ſit horizontalis; ſin autem RS, vti neceſſario euenit, ad horizontalem

Digitized by Google

ſit inclinata, tum iſte terminus $\frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ inſuper in ratione coſinus anguli inclinationis remi ad ſinum totum augeri debet.

Tab XVIII. fig. 4. §. 612. Conſideremus remum hoc modo agitatum ſeorſim, ſitque EEFF eius planities verticalis, qua aquam percutit, ponatur $OC = f$; $CD = b$; $EE = g$, $OX = x$, et $YY = y$, erit vis, quam elementum $YyyY$ ab aqua ſuſtinet $= y\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{b} - m\,V.v)^2$, exiſtente $OC = f > \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Quoniam iam omnium harum virium directiones ſunt inter ſe parallelae, ad planum nempe EF normales, vis ipſis omnibus aequiualens aequabitur ſummae omnium. Ponamus, vt hanc ſummam inuenire queamus, EF eſſe lineas rectas, atque $FF = k$, erit $k-g : b = y-g : x-f$, hincque $y = g + \frac{(k-g)(x-f)}{b} = g - \frac{f(k-g)}{b} + \frac{x(k-g)}{b}$. Quod ductum in $dx\,(\frac{xxu}{bb} - \frac{2\,mx\sqrt{uv}}{b} + mmv)$ et integratum dabit $\frac{(gb-fk+fg)}{b}(\frac{x^3u}{3bb} - \frac{mxx\sqrt{uv}}{b} + mmvx) + \frac{(k-g)}{b}(\frac{x^4u}{4bb} - \frac{2mx^3\sqrt{uv}}{3b} + \frac{m^2vxx}{2}) - \frac{(gb-fk+fg)}{b}(\frac{f^3u}{3bb} - \frac{mff\sqrt{uv}}{b} + m^2fv) - \frac{(k-g)}{b}(\frac{f^4u}{4bb} - \frac{2mf^3\sqrt{uv}}{3b} + \frac{m^2ffv}{2})$. Ponatur iam $x = f + b$ ac prodibit vis totalis.

§. 613. Ne expreſſio tantopere prolixa prodeat, ponamns $k = g$, ita vt figura remi EEFF ſit parallelogrammum rectangulum, eritque vis a remo excepta $= g\,b\,((ff + g + \frac{1}{3}bb)\frac{u}{bb} - m\,(2f + b)\frac{\sqrt{vu}}{b} + mmv)$. Quoniam vero neceſſe eſt, vt ſit $f > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, ponatur $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + i$, atque reperietur vis illa remi $= \frac{gbu}{bb}(ii + ib + \frac{1}{3}bb)$. Ad cuius mediam directionem inueniendam, quae ſit in S, quaeratur momentum reſpectu O, quod erit $= \int y\,x\,dx\,(\frac{xxu}{bb} - \frac{2mx\sqrt{vu}}{b} + mmv)$, cuius integrale ob $y = g$ eſt $= \frac{gx^4u}{4bb} - \frac{2mgx^3\sqrt{vu}}{3b} + \frac{mmgx^2v}{2}$ ac pro toto remo $= gb((f^3 + \frac{3}{2}f^2 b + fbb + \frac{1}{4}b^3)\frac{u}{bb} - \frac{2m}{b}(ff + fb + \frac{1}{3}bb)V\,vu + mmv\,(f + \frac{1}{2}b))$

$= gb$

$$= gb\left((ii+ib+\tfrac{1}{3}bb)\frac{m\sqrt{vu}}{b}+(i^3+\tfrac{3}{3}i^2b+ibb+\tfrac{1}{4}b^3)\frac{u}{bb}\right)$$

vnde fit $OS = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}} + \frac{i^3+\frac{3}{2}i^2b+ibb+\frac{1}{4}b^3}{ii+ib+\frac{1}{3}bb} = f + \frac{\frac{1}{2}i^2b+\frac{2}{3}ibb+\frac{1}{4}b^3}{ii+ib+\frac{1}{3}bb}$

§. 614. Ponamus remum eousque nempe in C aquae immergi, vt ſit $OC = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, atque erit $i = 0$; vis igitur a remo excepta aequabitur ponderi aquae, cuius volumen eſt $= \frac{gb^3u}{3vb}$, huiusque vis media directio erit in puncto S ſumto $OS = f + \frac{3}{4}b$, ſeu $CS = \frac{3}{4}CD$. Quamobrem ſi tota remi vltra hypomochlium O longitudo OD ponatur $= a$, et remi latitudo ſit $= g$, tum erit $f = \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ et $b = a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. Hinc erit vis remi RS in aqua vibrati $=$ Tab. XVIII. fig. 3.
$\frac{gu}{3bb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$; ſeu ſi pondus huic vi aequale deſideretur erit id $= \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3$ denotante M pondus nauis, et V volumen partis eius in aqua verſantis; quae vis remum in directione ad ipſum normali ST vrgebit, ſumta $OS = \frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$. Debet autem ante omnia eſſe $a > \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin ſecundum hypotheſin nulla eius pars aquam vibraret.

§. 615. Sit iam vis, quam remex quieſcens ad remum trahendum exercere valet $= p$, erit vis, qua remum RS iam motum ſollicitabit $= p(1 - \frac{u}{\alpha})$, exiſtente α altitudine vnius pedis circiter, vti ſupra notauimus, et p pondere, pro quo 32 libras accepimus. Quod ſi nunc remex remum motu vniformi trahat, ad quam vniformitatem remum mox a principio perducet, niſi pondus remi ſit valde magnum, fiet $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{mb\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^3(\frac{3}{4}a + \frac{mb\sqrt{v}}{4\sqrt{u}})$. Quamobrem ſi angulus BYO fuerit rectus, vel ab eo non multum diſcrepet, vti in motu remorum vulgo fieri ſolet, erit $pb(1 - \frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})(\frac{3}{4}a + \frac{b\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$

$\frac{b\sqrt{v}}{4\sqrt{u}}$): ex qua aequatione ſi valor ipſius u eruatur, atque in $\frac{Mgu}{3Vbb}(a - \frac{b\sqrt{v}}{\sqrt{u}})^2$ ſubſtituatur, prodibit vis, quam remus ab aqua in directione ST ſuſtinet.

§. 616. Quoniam vero hic remi pars, quae in aqua vibratur, in ſe non eſt determinata, ſed tam ex ipſius remi, quam aquae celeritate determinatur, in praxi eiusmodi menſura obſeruari difficulter poterit. Quamobrem vt propius ad praxin inueſtigationem noſtram accommodemus, ſimulque calculo conſulamus, in quo rem vero
Fig. 5. proxime expediuiſſe ſufficit; concipiamus ergo remum palae formem ODFF cuius planities DFF aquam findat; ſit eius centrum grauitatis, ſeu potius media directio vis aquae in puncto S, quod in planitiei puncto medio ſatis tuto accipere licet, ſiquidem longitudo DF prae OS ſit valde parua. Ponatur $OS = a$, ſitque latitudo remi FF $= g$ et longitudo $DF = b$, erit iam ex praecedentibus vero proxime vis, quam iſte remus vibratus ab aqua ſuſtinet $= gb\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, ſeu pondus huic vi aequiualens eſt $= \frac{Mgb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$; quae vis in puncto S normaliter ad planitiem DFF erit applicata.

Fig. 3. §. 617. Poſita igitur portionis remi aquam findentis longitudine $= b$, et latitudine $= g$, remus ROS in S vrgebitur in directione ST vi $= \frac{Mgb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$ cuius momentum reſpectu hypomochlii O erit $= \frac{Magb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$. Huic ergo momento aequale eſſe debet momentum vis remigis, quod eſt $= pb(1 - \frac{u}{a})$, ita vt habeatur iſta aequatio $pb(1 - \frac{u}{a}) = \frac{Magb}{V}\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - m\sqrt{v})^2$, ex qua ſi valor ipſius u eruatur, innoteſcet vera vis, quam remex exercet. Si igitur obliquitas remi tam fuerit parua vt ſinus

Digitized by Google

ſinus m ſinui toti aequalis aeſtimari queat, tum erit $pb(1-\frac{u}{\alpha}) = \frac{Mgb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$; et vis ST quam remus ſuſtinet erit $= \frac{Mgb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$ vel $= \frac{pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$.

§. 618. Si igitur nauis ſtatuatur mobilis ab hac vi ST actu mouebitur, ſimul vero conuertetur circa axem verticalem per centrum grauitatis tranſeuntem. Quod ſi autem in altera nauis parte alius remus aequali vi vibretur, tum vires nauem rotantes ſe mutuo deſtruent, atque vis nauem in directione ſpinae BA propellens duplicabitur ita vt ea futura ſit $= \frac{2pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$. Haec autem vis non continuo aget, cum remiges tempore opus habeant, cum ad remum ex aqua poſt finitam vibrationem extrahendum tum iterum in aquam immittendum, ita vt triens tantum temporis totius fere ad nauem promouendam impendatur. Hancobrem ſex remigum more ſolito operantium effectus huc redibit, vt nauis conſtanter vi $= \frac{2pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$ propellatur: atque ſi 6ψ remiges operi ad moueantur, erit vis ab illis exerta $= \frac{2\psi pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$.

§. 619. Ponamus iam reſiſtentiam, quam nauis motu ſuo directo in aqua ſuffert, tantam eſſe, quantam ſuperficies plana ff, directe in aqua mota aequali celeritate patitur; atque ſit motus nauis iam ad aequabilitatem perductus, ita vt celeritas ipſius debita ſit altitudini v. Habemus ergo caſum ſupra tractatum, quo aquam contra nauem quieſcentem celeritate $\sqrt{v}$ aduenire poſuimus; ſcilicet remi in naui hac celeritate mota in aqua ſtagnante eundem praeſtabunt effectum, ac ſi nauis quieſceret, et aqua celeritate $\sqrt{v}$ in directione HX affflueret. Reſiſtentia ergo quam nauis iſta celeritate ſecundum directionem

BA mota patitur erit $= \frac{Mffv}{V}$, cui, quia motus aequabilis ponitur, aequalis eſſe debet vis remorum, quorum numerus ſit 6ψ, quae eſt $= \frac{2\psi pb}{a}(1 - \frac{u}{\alpha})$, ita vt habeatur iſta aequatio $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}(1 - \frac{u}{\alpha})$.

§. 620. Ad motum nauis igitur a 6ψ remigum opere ortum definiendum habemus has duas aequationes $\frac{Mffv}{V} = \frac{2\psi pb}{a}(1-\frac{u}{\alpha})$ et $pb\,(1-\frac{u}{\alpha}) = \frac{M\alpha gb}{V}(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$; quae vt ad ſimpliciorem formam redigantur, ponamus longitudines in pedibus rhenanis exhiberi, et cum ſit $\alpha = 1$, $M = 64\,V$ libr. et $p = 32$ libr. obtinebimus has aequationes $ffv = \frac{\psi b}{a}(1-u)$ et $b\,(1-u) = 2agb\,(\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v})^2$; ex quarum poſteriori oritur $\frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{v} = \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agb}}$ et $\sqrt{v} = \frac{a\sqrt{u}}{b} - \sqrt{\frac{b(1-u)}{2agb}} = \sqrt{\frac{\psi b(1-u)}{aff}}$. Erit ergo $\frac{aau}{bb} = \frac{b(1-u)}{a}(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2$. Sit $\frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = z$ erit $z^3u = (1-u)(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2$ hincque $u = \frac{(\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ et $1 - u = \frac{z^3}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$ et conſequenter $v = \frac{\psi zz : ff}{z^3 + (\sqrt{\frac{1}{2gb}} + \sqrt{\frac{\psi}{ff}})^2}$.

§. 621. In hac expreſſione deſignat gb planitiem remi, qua aqua finditur; intelligitur ergo quo maior fuerit iſta planities eo maiorem prodituram eſſe nauis celeritatem; et, ſi amplitudo iſta remi fiat infinita, tum prodit $v = \frac{\psi zz}{ffz^3 + \psi}$, quae eſt ea ipſa expreſſio, quam invenimus poſito obſtaculo, cui remus applicatur, immobili. Hoc ipſum natura rei poſtulat, nam facta amplitudine remi infinita, reſiſtentia aquae erit infinita, ideoque obici immobili aequiualebit. Minor ergo remi ſuperficies naui minorem inducet celeritatem; ex quo videatur maxime ex-

Digitized by Google

expedire remos quam ampliſſimos confici. Verumtamen aliae rationes nimiam remi amplitudinem diſſuadent; quoniam quo amplior remi extremitas efficitur, eo fortiorem ac grauiorem remum facere oportet, quo fit, vt difficilius vibretur indeque propulſio nauis debilitetur.

§. 622. Tantam igitur remis amplitudinem tribui oportet, quantam reliquae circumſtantiae permittunt; has autem ſi conſulamus, deprehendemus remo ab vno homine agitando maiorem commode amplitudinem tribui non poſſe, quam vnius pedis quadrati, ita vt futurum ſit $gb = 1$ et $\sqrt{\frac{1}{2gb}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,7071$ proxime. Si materia ſimul leuior ac fortior reperiatur, vt remus minus grauis eandem vim ſuſtinere queat, tum vtique conſultum erit maiorem amplitudinem conficere; qua in re experientia aptiſſimam ſuppeditabit deciſionem: dummodo hoc praeceptum teneatur, vt remi circa extremitatem, qua aquam vrgent, tam fiant ampli quam fieri poteſt; vt ſcilicet non ſolum ſatis ſint firmi ſed etiam ab vno homine facile tractari poſſint. Si plures homines vni remo deſtinentur, tum pari modo ex eorum vi tam firmitas remi, quam pondus et amplitudo determinabuntur.

§. 623. Sit $\sqrt{\frac{1}{2gb}} = \gamma$, et $\sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \delta$, erit vt oſtendimus $\gamma = 0,7071$ quam proxime; retinebimus autem valorem generalem γ; vt concluſiones latius pateant: erit ergo $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3+(\gamma+\delta)^2}$ ped. Maxima ergo ab eodem remigum numero, et eadem remorum amplitudine, naui celeritas imprimetur, ſi fuerit $z^3 = 2(\gamma+\delta)^2$, et $z = \frac{a}{b} = \frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$. Definitur ergo hac aequatione ratio maxime idonea inter partes remi SO et RO, ad

nauem

nauem celerrime promouendam. Si $\gamma = 0$, prodit caſus ſupra tractatus, vbi remos obſtaculis immobilibus applicari poſuimus; praeſenti igitur caſu, dum aqua remo cedit ratio SO ad RO maior oritur, ideoque pars remi exterior SO reſpectu partis interioris RO maior ſtatui debet, quam in praecedente hypotheſi erat definita: et quo minor remo amplitudo tribuitur ob auctum valorem γ, ratio $\frac{SO}{RO}$ augebitur.

§. 624. Quoniam eſt $\gamma = 0, 7071 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, erit $2\gamma\gamma = 1$, hincque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + 2\delta\sqrt{2} + 2\delta\delta)}$; quae fractio cum ſit vnitate maior, indicat perpetuo in remis partem exteriorem SO ſuperare debere partem intra nauem ſitam RO; quantumuis exiguus ſit remigum numerus 6ψ. Aucto autem remigum numero 6ψ, ratio SO ad RO magis augeri debet. Si ergo pro quouis pede quadrato, quem ſuperficies ff reſiſtentiam abſolutam exhibens continet, ſex remiges conſtituantur, vt ſit $\psi = ff$, fiet $\delta = 1$ eritque $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2})} = 1, 79963 = \frac{9}{5}$ proxime. Hoc ergo caſu debet eſſe SO:RO $= 9 : 5$. Si numerus remigum ab hac regula paulisper diſcrepet, vt ſit $\psi = ff(1 \pm \theta)$ exiſtente θ fractione quam minima, erit $\delta = \sqrt{(1 \pm \theta)} = 1 \pm \frac{\theta}{2}$ et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(3 + 2\sqrt{2} \pm (2 + \sqrt{2})\theta)} = \frac{9}{5} \pm \frac{2\theta}{5}$; ſeu erit SO: RO $= 9 \pm 2\theta : 5$ proxime, ſi fuerit numerus remigum $= 6(1 \pm \theta)ff$.

§. 625. Hinc definiri poteſt abſolute maxima celeritas, quam datus remigum numerus, remis ſecundum praecepta data inſtitutis, naui imprimere valet. Cum enim

ſit

fit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3 + (\gamma + \delta)^2}$, et $z = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, fiet $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ $= \frac{2\delta\delta . RO}{3SO}$ ped. Hinc nauis vno minuto primo propelletur per ſpatium $387, 3\delta \sqrt{\frac{RO}{SO}}$ pedum, hoc eſt per ſpatium $\frac{345\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ pedum. Si igitur ſit numerus remigum $6\psi = 6ff$, ita vt ſit $\delta = 1$, et ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, nauis tempore vnius minuti propelletur per ſpatium $387, 3\sqrt{\frac{5}{9}} = 288\frac{3}{5}$ pedum. Vna igitur hora nauis percurret ſpatium 17323 pedum, quod ſpatium aliquanto beſſem vnius milliaris germanici ſuperat. Si eſſet $\gamma = 0$, atque remi obſtaculis inuincibilibus applicentur, tum caſu $\psi = ff$ nauis vna hora ſpatium 20700 pedes abſolueret.

§ 626. Ex his porro numerus remigum determinari poterit, qui nauem dato tempore per datum ſpatium promouere valeant. Oporteat ſcilicet nauem tempore vnius horae per ſpatium n pedum propelli; ac fiet $n = \frac{20700\delta}{\sqrt[3]{(\gamma+\delta)}}$ $= \frac{20700\delta}{\sqrt[3]{(\delta+\sqrt{\frac{1}{2}})}}$ ob $\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$, ſit $n = 20700\, m$. fiet $\delta^3 = m^3\delta$ $+ m^3\sqrt{\frac{1}{2}} = m^3\delta + m^3 . 0, 7071$. Quodſi ſpatium vna hora abſoluendum ſit vnum milliare, fiet $m = 1, 1414$ eritque adeo $\delta^3 = 1,48701\,\delta + 1,05148$; vnde reperitur $\delta = 1, 4822 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$. Habebitur ergo $\psi = 2, 1967\, ff$, et remigum requiſitorum numerus erit $= 13, 18\, ff$. Vt autem nauis vna hora tantum 20700 pedes conficiat, ex aequatione $\delta^3 = \delta + 0, 7071$ oritur $\delta = 1, 2531 = \sqrt{\frac{\psi}{ff}}$, hincque $\psi = 1, 57\, ff$, numerus ergo remigum ad hoc iter abſoluendum requiſitus eſt $6\psi = 9, 42\, ff$.

§. 627. Ponamus numerum remigum $6\psi = nff$ erit $\delta = \sqrt{\frac{\psi}{ff}} = \sqrt{\frac{n}{6}}$; et $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{\frac{4n}{3}} + \frac{n}{3})}$; nauisque vna hora propelletur per ſpatium $23238\sqrt{\frac{n}{6}} \cdot \frac{RO}{SO} = \frac{9487\sqrt{n}}{\sqrt[3]{(1+\sqrt{\frac{n}{3}})}}$ pedum, ſubſtituendis ergo loco n ſucceſſiue numeris definitis erit

numerus Remigum	Ratio RO : SO	nauis vna hora propellitur per ſpatium.
ff	1000 : 1355	8150 ped.
2 *ff*	1000 : 1488	10995 ped.
3 *ff*	1000 : 1587	13042 ped.
4 *ff*	1000 : 1668	14690 ped.
5 *ff*	1000 : 1738	16092 ped.
6 *ff*	1000 : 1800	17323 ped.
7 *ff*	1000 : 1855	18426 ped.
8 *ff*	1000 : 1907	19432 ped.
9 *ff*	1000 : 1954	20358 ped.
10 *ff*	1000 : 1998	21217 ped.
11 *ff*	1000 : 2040	22022 ped.
12 *ff*	1000 : 2080	22786 ped.

§. 628. Quoniam igitur remis ad celerrimum nauis motum inſtructis naui a 6ψ remigibus imprimitur celeritas debita altitudini $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}\,(\gamma+\delta)^2}$, videamus quanta vis requiratur, quae nauem directe ſecundum BA trahens ipſi eandem celeritatem inducat. Sit vis haec quam quaerimus = P librarum: fiet $P = \frac{Mffv}{V} = 64ffv$ libr. ſi f et v in pedibus exprimantur, erit ergo $v = \frac{P}{64ff}$, quae ipſi

ipſi $\frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ aequalis poſita dabit $P = \frac{125\delta\delta ff}{3\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$; tantam ergo vim 6ψ remiges exerunt; vis igitur vnius remigis valebit $\frac{64\delta\delta ff}{9\psi\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. $= \frac{64}{9\sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}}$ libr. propter $\frac{\psi}{ff} = \delta\delta$. Cum iam ſit $\frac{SO}{RO} = \sqrt[3]{2(\gamma+\delta)^2}$, erit vis vnius remigis $= \frac{64 \cdot RO}{9 \cdot SO}$ libr. Si igitur ſit $RO = SO$, vis vnius remigis valebit $7\frac{1}{9}$ libr; at ſi $SO = 2RO$ valebit tantum ſemiſſem $3\frac{5}{9}$ libr.

§. 629. Ex his intelligitur vires ſingulorum remigum, quatenus tendunt ad nauem propellendam, ſine reſpectu ad nauem habito determinari non poſſe, etſi remiges aequales vires ad remos vrgendos impendant. Vidimus autem cum ſemper debeat eſſe $SO > RO$, maximam vim vnius remigis ad nauem propellendam non vltra 7 libras extendi poſſe, quae autem ſi nauis celerius progrediatur adhuc multo fit minor. Scilicet ſi nauis vna hora integrum milliare germanicum abſoluat, tum ob $\frac{SO}{RO} = 2,1246$, vnius remigis vis valebit $3\frac{1}{3}$ libr; ita vt de 32 libris, quas remex quisque ad remum impendit, tantum $3\frac{1}{3}$ librae ad nauem propellendam impendantur. Celeritate igitur nauis cognita, ex tabula praecedente innoteſcit ratio inter SO ad RO; hincque definietur vis vnius remigis ad nauem propellendam: ſi quidem remi modo maxime lucroſo ſint inſtructi.

§. 630. Quemadmodum haec ex principiis indubitatis deduximus, ac litteris vniuerſalibus tales tribuimus valores, qui a praxi parum diſcrepant, ſic etiam concluſiones, quas inde ſumus conſecuti, experientiae ſatis ſunt conſentaneae. Quod vt clarius appareat, exemplum ab experientia petitum ſecundum theoriam curatius euoluamus. Perhibetur autem eiusmodi exemplum in Comment. Acad.

Digitized by Google

Scient. Pariſinae A. 1702, quo Vir Celeb. Daniel Bernoulli vſus eſt in Hydrodynamica; triremis ſcilicet Galera dicta a 260 Remigibus propulſa ſingulis minutis ſecundis $7\frac{1}{2}$ pedes abſoluebat: tenebat autem in remis pars exterior SO ad partem interiorem RO rationem duplam, atque omnium remorum planities, quibus aqua findebatur, aeſtimabatur 130 pedum quadratorum. Reſiſtentia triremis non aſſignatur, videtur autem ea tanta aſſumi poſſe, quantum patiatur ſuperficies 20 ped. quadratorum aequali celeritate directe in aqua mota.

§. 631. Primum diſcrimen ſtatim in eo verſatur, quod in hoc exemplo ſingulis remigibus tantum ſemiſſis pedis quadrati, quo aquam percutiunt, tribuatur; dedimus autem hactenus vnicuique remo planitiem vnius pedis quadrati; quare hoc caſu erit $gb = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\sqrt{gb}} = \gamma = 1$. Mirum autem non eſt, hic minorem planitiem vni remigi reſpondere, quoniam plures remiges vni remo erant admoti, atque planities remorum non in eadem ratione augeri poteſt, ſi enim caſu duorum remigum vni remo admotorum velimus ſuperficiem remi duplicare, pondus remi in ratione $2\sqrt{2} : 1$ augeri deberet; ex quo duo homines multo maiorem difficultatem offenderent ad hunc remum mouendum, quam vnus homo ad remum ſimplicem. Etſi ergo, ſi quisque remex remum vibrat, aſſumi poteſt $gb = 1$, in caſu praeſente tamen valor ipſius gb erit $= \frac{1}{2}$.

§. 632. Quoniam numerus remigium eſt 260, fiet $\psi = 43\frac{1}{3}$; hinc erit ob $ff = 20$ circiter, $\frac{\psi}{ff} = 2,1666$ etc. haec autem quantitas, quia pendet a vi cuiusque remigis, quae valde eſt variabilis, et modo intendi modo remitti poteſt, non tam exacte definiri poteſt, ſed

ſi

ſi remiges maiorem vim intendant, augetur, contraque diminuitur. In caſu praeſente videntur remiges omnibus viribus labori incubuiſſe, quia ſingulis minutis 24 vibrationes abſoluiſſe perhibentur, ita vt quantitas $\frac{\psi}{ff}$ maiorem valorem habuiſſe videatur. Sumamus ergo $\frac{\psi}{ff} = 2, 56$ vt ſit $V\frac{\psi}{ff} = 1, 6$; et $V\frac{1}{2gb} + V\frac{\psi}{ff} = 2, 6$. Porro ratio partium cuiusque remi SO : RO erat dupla ideoque $\frac{g}{b} = z = 2$, hincque ex §. 620, reſultat altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{10, 24}{14, 76}$ ped. qua ergo nauis ſingulis minutis primis abſoluet 395 ped. hincque ſingulis minutis ſecundis $6, \frac{7}{12}$ ped.

§. 633. Experientia autem docuit iſtam nauem ſingulis minutis confeciſſe $7\frac{1}{5}$ pedes, quamobrem neceſſe eſt vt vel remiges multo maiorem vim exercuerint, quam quidem aſſumſimus, vel reſiſtentia nauis minor fuerit quam quae plano 20 ped. quadr. deſignari queat. Maiorem ergo fuiſſe oportet valorem $\frac{\psi}{ff}$, quam poſuimus, quamobrem eius valorem a poſteriori inueſtigemus. Sit ergo $V\frac{\psi}{ff} = \delta$ erit $v = \frac{4\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$; cui vno minuto ſecundo reſpondet ſpatium $\frac{1}{4}V\frac{4000\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$ ped; quod cum eſſe debeat $7\frac{1}{5}$ ped. erit $\frac{24}{5} = V\frac{2500\delta\delta}{9+2\delta+\delta\delta}$, ex qua fit $\delta = 1, 7964$ hincque $\frac{\psi}{ff} = 3, 2367$. Ita vt fuerit vel ff tantum 13, 39 ped. quadr. vel remiges maiorem vim quam 32 libr. impenderint vel vtrumque.

§. 634. Cognito iam per experientiam valore $\delta = V\frac{\psi}{ff}$, inquiramus, quantum ratio $\frac{SO}{RO} = z$, quae erat $= 2$ diſcrepet ab ea, quae naui maximam celeritatem ceteris paribus imprimere valet. Scilicet cum ſit $v = \frac{\delta\delta zz}{z^3+(1+\delta)^2}$

 fiet

fiet haec expreſſio maxima, ſi fuerit $z^3 = 2(1+\delta)^2 = 15,638$, quae praebet $z = 2,5 = \frac{SO}{RO}$. Quare ſi remorum pars exterior ad interiorem habuiſſet rationem vt 2, 5 ad 1 ſeu vt 5 : 2, tum iidem remiges nauem adhuc celerius, idque cellerrime, quantum eadem vi licet, promouiſſent. Hoc enim caſu foret $v = \frac{20229}{23417}$ ped. qua celeritate minuto ſecundo abſoluuntur pedes 7, 3416. minuto primo autem 440, 496, et hora vna 26429, 76 ped. Ratione autem $\frac{SO}{RO} = 2$ nauis vno minuto ſecundo fecit 7, 2 ped. vno minuto primo 432 ped. et vnius horae ſpatio 25920 ped.

§. 635. Exemplo hoc non ſolum theoria, quam de actione remorum expoſuimus, confirmatur, verum etiam ipſa praxis huius theoriae ope ad maiorem perfectionis gradum euehi poterit. Per experientiam quidem iam ſatis prope ii caſus, quibus maximum minimumue locum habet, ſunt eruti, atque etiam in exemplo allato ratio SO : RO = 2 : 1 non tantopere a vera et maxime lucroſa 5 : 2 differt, quam videatur: dum enim plures remiges vni remo erunt admoti, omnes non in eodem puncto remum ſollicitare poſſunt, ex quo pars remi interior RO minor aeſtimari debet, quam reuera eſt, qua diminutione ratio SO : RO a ratione 5 : 2 parum diſcrepabit. Neque tamen ſola praxis ſine ſubſidio theoriae verum cuiusque maximi minimiue gradum ſuppeditare valet; hincque theoria perpetuo praxi quantumuis iam excultae inſigne adiumentum ac lucrum afferet.

§. 636. Quoniam igitur in agitatione remorum conſueta tam exigua portio virium, quas remiges exerunt, ad nauis promotionem impenditur: eo quod duas temporis,

qua

Digitized by Google

qua vnaquaeque agitatio abſoluitur, partes in eleuatione remorum eorumque noua applicatione conſumunt, vnamque tantum partem remos in aqua vibrant. Quo fit vt etiam in hoc temporis articulo non ſolum multum de vi ſua perdant, antequam remum ad motum aequabilem perducant, ſed etiam maximam partem remum oblique percutiant, quoniam vtrumque effectum remi vehementer debilitant. Primum igitur duae tertiae partes totius vis a remigibus exertae inutiliter pereunt; ac deinde quauis agitatione motus de nouo generari debet; neque enim motus in praecedente agitatione genitus, quicquam ad ſequentem confert, quin potius motus ante productus totus deſtrui debet, quod ſine virium diſpendio fieri nequit. Ex quo mirum non eſt de 32 libris, quas cuique remigi tribuimus tantum $3\frac{1}{3}$ libras ad nauis propulſionem redundare.

§. 637. Incommodum hoc practici quoque iam pridem ſenſerunt, et hancobrem alium remigandi modum propoſuerunt, quo remi in rotam diſpoſiti motu continuo in gyrum agantur. Qui modus vtique, ſi commode ad praxin accommodari poſſet inſigni gauderet praerogatiua prae modo ſolito. Primo enim omnis vis, quae continuo ad rotam circumagendam impenditur, perpetuo remos contra aquam impellit, neque vllo tempore vis omnino inutiliter collocatur. Deinde motus rotae ſemel impreſſus non ſolum non deſtrui debet, ſed etiam non parum confert ad vniformitatem conſeruandam; ita vt nulla virium portio inutiliter impendatur, niſi quae ad frictionem ſuperandam requiritur. Quo igitur intelligatur, quantum emolumentum ab huiusmodi machina ſit expectandum, effectum ab ea oriundum calculi ope determinabimus; ſimul

Tab. XVIII. fig. 6.

mulque inueſtigabimus, quomodo ea ad inſtitutum maxime idonea ſit inſtruenda.

§. 638. Ad vtrumque igitur nauis latus conſtituta ſit rota mobilis circa axem horizontalem O, cuius radii OA, OB, OC, etc. ſint totidem remi cylindro O tam firmiter affixi, quantum vis ab ipſis ſuſtinenda poſtulat. Vnus quisque ergo radius erit remus, cuius ſuperficies, qua aquam percutit, cum axe horizontali in eodem plano eſt ſita. Sit IK ſuperficies aquae cui remorum partes $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$, $E\epsilon$, $F\zeta$ immergantur, atque circum agatur rota in ſenſum ABCDE, vt palae remorum ſubmerſae in aquam impingant. A vi igitur aquae nauis ſecundum directionem KI promouebitur; vires enim, quam ſingulae palae ſuſtinent, eundem in naui propellenda effectum exerent, ac ſi in directionibus parallelis in centro grauitatis nauis eſſent applicatae.

§. 639. Ponamus nauem motum vniformem iam eſſe adeptam, quo in directione K progrediatur celeritate altitudini v debita; quem motum ſi in aquam transferamus, perinde erit, ac ſi nauis quieſceret, atque aqua in directione IK celeritate eidem altitudini v debita incurreret. Sit quoque celeritas, qua rota in plagam ABCD conuertitur, aequabilis et altitudo debita celeritati, qua extremitates radiorum A, B, C, etc. circumaguntur, ſit $= u$. Longitudo radiorum OA ponatur $= a$, et latitudo palarum aquam findentium ſit $= g$. Teneat pala OD ſitum verticalem, ſitque eius pars δ D aquae ſubmerſa $= b$, ita vt huius palae ſuperficies aquam percutiens ſit $= g\,b$; erit pars radii extra aquam eminens $O\delta = a - b$. Conſideretur iam alia quaecunque pala OC cum verticali OD an-

angulum conſtituens COD, cuius ſinus ſit $= m$, coſinus $= n$, poſito ſinu toto $= 1$, erit $\frac{O\delta}{O\gamma} = n$, et $O\gamma = \frac{a-b}{n}$ hincque pars aquam findens γC erit $= a - \frac{a+b}{n} = \frac{b-(1-n)a}{n}$, quae motu angulari circa O in aquam impingit.

§. 640. Conſideremus huius palae elementum quodcunque X, in aqua verſans, cuius ab axe O diſtantia ſit $OX = x$. Hoc ergo punctum in directione ad OC normali XN mouebitur celeritate $= \frac{x\sqrt{u}}{a}$; tantaque celeritate aqua in hanc palam incurreret in directione NX, ſi aqua non haberet motum propium. At cum ob motum nauis aqua moueatur in directione HX celeritate $\sqrt{v}$; ſumto $XN = \frac{x\sqrt{u}}{a}$, capiatur $XM = \sqrt{v}$, et compleatur parallelogrammum XMLN, cuius diagonalis LX tam directionem quam celeritatem, qua aqua in X incurrit, repreſentabit. Erit autem vis aquae incurrentis, vt quadratum celeritatis XL^2 et quadratum ſinus anguli incidentiae LXC coniunctim, ex quo vis aquae erit vt XL^2 $(\text{ſin.} LXC)^2$. Eſt vero ſin. LXC = coſ. LXN, et $(\text{ſin.} LXC)^2 = 1 - (\text{ſin.} LXN)^2$ et propter ſin. $LXN = \frac{LN\ \text{ſin.}\ LNX}{XL}$, erit $(\text{ſin.} LXC)^2 = 1 - \frac{LN^2 (\text{ſin.}\ LNX)^2}{XL^2}$.

§. 641. Cum iam ſit anguli XNL ſinus $= m$, et coſinus $= n$, erit $XL^2 = v + \frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{vu}}{a}$; et LN^2 $(\text{ſin.} LNX)^2 = mmv$; hincque oritur vis aquae in elementum X vt $(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, quae ſi ducatur in elementum $g\,dx$ dabit volumen aquae $= g\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$, cuius pondus aequale eſt vi aquae impingentis. Directio huius vis normalis eſt ad ſuperficiem palae, ex eaque ergo oritur vis nauem horizontaliter promouens $= n g\,dx\,(\frac{x\sqrt{u}}{a} - n\sqrt{v})^2$

$n\sqrt{v})^2 = ngdx\,(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv)$, quae integrata dat $\frac{ngx^3u}{3aa} - \frac{nngxx\sqrt{uv}}{a} + n^3gxv - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$. Ponatur $x = a$, ac prodibit vis a tota pala $C\gamma$ ad nauem promouendam orta $= \frac{ngau}{3} - nnga\sqrt{uv} + n^3gav - \frac{g(a-b)^3u}{3nnaa} + \frac{g(a-b)^2\sqrt{uv}}{a} - nng(a-b)v$.

§. 642. Praeterea vero vis aquae circumactionem rotae impedit, qui effectus propterea vi hominum compenſari debet. Determinanda haec ex momento, quod iſta vis reſpectu axis O praebet, quod eſt $= gxdx\,(\frac{xxu}{aa} - \frac{2nx\sqrt{uv}}{a} + nnv)$. Huius integrale eſt $= \frac{gx^4u}{4aa} - \frac{2ngx^3\sqrt{uv}}{3a} + \frac{nngxxv}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3n^2a} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Ponamus $x = a$, vt prodeat totum momentum a pala $C\gamma$ ortum circumactioni rotae reſiſtens $= \frac{gaau}{4} - \frac{2ngaa\sqrt{uv}}{3} + \frac{nngaav}{2} - \frac{g(a-b)^4u}{4n^4aa} + \frac{2g(a-b)^3\sqrt{uv}}{3nna} - \frac{g(a-b)^2v}{2}$. Hic autem vbique notandum eſt eſſe debere $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$; oportet ergo eſſe $\frac{(a-b)\sqrt{u}}{na} > n\sqrt{v}$ ſeu $a-b > \frac{nna\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$. In ſitu ergo verticali OD debet eſſe $a-b > \frac{a\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$ ſeu $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$; quod, ſi euenerit in omni ſitu obliquo ſimul erit $\frac{x\sqrt{u}}{a} > n\sqrt{v}$.

§. 643. Ponamus iam rotam duodecim radiis eſſe inſtructam, vti figura repraeſentat, ac pro binis radiis OC et OE verticali OD proximis erit $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, pro ſequentibus OB et OF erit $n = \frac{1}{2}$. Numerus igitur palarum aquam ſimul percutientium pendebit ab eleuatione axis O ſupra aquae ſuperficiem; quae tanta eſſe debet, vt ſit $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$: ſumamus ergo $O\delta = a-b = \frac{1}{2}a$, vt ſit $b = \frac{1}{2}a$, atque ſi radius OD ſit verticalis, praeter eum duo tantum remi proximi OC et OE in aqua verſabuntur. Etſi autem motu rotae quatuor radii in aquam porriguntur,

riguntur, tamen quia tum oblique mouentur, vis eorum tuto aequalis aeſtimari poteſt vi trium, quorum medius eſt verticalis; ita vt rota perpetuo eandem vim exerere ſit cenſenda.

§. 644. Pro radio igitur verticali O D eſt $n = 1$, ex eoque ad nauem propellendam vis naſcitur $\frac{7gau}{24} - \frac{3gav\sqrt{uv}}{4} + \frac{gav}{2}$. Pro radio vero O C eſt $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ex eoque naſcitur vis ad nauem propellendam $= \frac{gau}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8}\right) - \frac{gav\sqrt{uv}}{2} + \frac{gav}{8}(3\sqrt{3} - 3)$, quae cum eadem ſit pro radio O E nauis a tribus radiis O C, O D et O E atque adeo a tota rota propelletur vi $= \frac{gau}{3}\left(\frac{13}{24} + \sqrt{3}\right) - \frac{7gav\sqrt{uv}}{4} + gav\left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}\right)$ quae ſumtis in fractionibus decimalibus valoribus proximis abit in $0,757905 . gau - 1,75 . ga\sqrt{uv} + 1,049037 . gav$. Haec igitur vis nauem propellens aequalis eſſe debet reſiſtentiae, quam nauis in aqua patitur, quae vt ſupra aſſumſimus ſit $= ffv$, ita vt iam habeatur vna aequatio $ffv = 0,757905 . gau - 1,75 . ga\sqrt{uv} + 1,049037 . gav$, qua ratio inter v et u continetur, vt ſit $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{\left(1,31942 . \frac{ff}{ga} - 0,05126\right)}$.

§. 645. Momentum iam vis aquae a radio verticali O D ortum eſt $= \frac{15gaau}{64} - \frac{7gaa\sqrt{uv}}{12} + \frac{3gaav}{8}$: at momentum a radio O C vel O D ortum ob $n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ erit $= \frac{2gaau}{9} - \frac{gaa\sqrt{uv}}{9}(3\sqrt{3} - 1) + \frac{gaav}{4}$, cuius duplum ad praecedens momentum ex radio verticali O D ortum dabit momentum totale, quo rota ab aqua impeditur $= \frac{101}{576} ga^2u - gaa\sqrt{uv}\left(\frac{13}{36} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) + \frac{7gaav}{8}$; ſeu in fractionibus decimalibus $0,67882 . gaau - 1,51581\, gaa\sqrt{uv} + 0,875 . gaav$, quod ductum in $\frac{M}{V}$ dabit momentum ponderis, cui

 aequa-

aequale eſſe debet momentum virium rotam circumagentium. Denotat autem M pondus totius nauis, et V volumen carinae, ita vt ſi V in pedibus cubicis et M in libris exprimatur ſit $\frac{M}{V} = 64$.

§. 646. Ex relatione autem inter u et v ſupra inventa reperitur $\frac{u}{v} = 1,28160 + 1,31942 . \frac{ff}{ga} + 2,3090 \sqrt{(1,31942 , \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$, ex qua ſi valores loco u et $\sqrt{u}$ in momento nunc inuento ſubſtituantur, prodibit hoc momentum $= \frac{Mgaav}{V} (0,89565 . \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(1,31942 . \frac{ff}{ga} - 0,05126)})$. Quae formulae, ſi ff fuerit multo maius quam ga ob terminum 0,05126 valde paruum multo fieri poſſunt ſimpliciores; fiet nimirum $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + 1,14866 . \frac{f}{\sqrt{ga}}$ et $\frac{u}{v} = 1,28160 + 2,65225 . \frac{f}{\sqrt{ga}} + 1,31942 . \frac{ff}{ga}$; hincque porro momentum a vi aquae ortum et motui rotae contrarium erit $= \frac{Mgaav}{V} (0,05925 . \frac{f}{\sqrt{ga}} + 0,89565 . \frac{ff}{ga})$.

§. 647. Ponamus iam rotam hanc ope eiusmodi ergatae circumagi, vt dum ergata ſemel conuertitur, rota faciat n reuolutiones. Sit longitudo vectium quibus ergata circum agitur $= b$, atque numerus hominum ergatam voluentium ponatur $= \theta$, qui numerus ante erat $6\ \psi$. Celeritas igitur hominum ſe habebit ad celeritatem rotae in extremitate D, quae eſt $= \sqrt{u}$, in ratione compoſita ex ratione $1 : n$ et ratione $b : a$, ex quo celeritas hominum erit $= \frac{b\sqrt{u}}{na}$, et altitudo huic celeritati debita $= \frac{bbu}{nna^2}$. Hinc ſi vis, quam quisque homo quieſcens valeat exerere ponatur $= p$, erit vis qua tanta celeritate progrediens exercere valet $= p(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha})$ denotante α altitudinem vnius pedis

pedis momentum ergo omnium hominum ad ergatam circumagendam erit $= \theta p b \left(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha}\right)$, quod ad axem rotae tranſlatum fit $= \frac{\theta pb}{n}\left(1 - \frac{bbu}{nna^2\alpha}\right)$.

§. 648. Quoniam vero ad vtramque nauis partem vnam eiusmodi totam collocamus, vis aquae tam abſoluta, qua nauis propellitur, quam momentum inde ortum duplicari debebit. Duplum igitur vis illius abſolutae ſupra (644) aequare debuiſſemus ipſi ffv, vel ipſam vim huius ſemiſſi $\frac{1}{2}ffv$, vnde ſcribendo $\frac{ff}{2}$ loco ff, orietur $\frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1,1545 + \sqrt{\left(1,31942. \frac{ff}{2ga} - 0,05126\right)} = 1,1545 + 1,14866. \frac{f}{\sqrt{2ga}}$ quam proxime, et $\frac{u}{v} = 1,2816 + 2,65225. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942. \frac{ff}{2ga}$. Momentum vero quod vtraque rota ab aqua coniunctim ſuffert erit $= \frac{2Mgaav}{V}\left(0,05925. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565. \frac{ff}{2ga}\right)$, cui aequale eſſe deberet momentum virium ſollicitantium, ſi nulla eſſet frictio ſuperanda.

§. 649. Cum igitur frictio in machina tantopere compoſita ſit admodum notabilis, eo quod tam axis rotae quam axis ergatae frictionem patiantur, momentum impedimentorum augeri debet. Addamus ergo ad momentum illud ab aqua ortum frictionem cuius momentum ad axem rotae relatum, ab vtraque rota ſit $= 2Fa$, atque ſi aggregatum momento virium ſollicitantium aequale ponamus, habebimus hanc aequationem. $2Fa + \frac{2Mgaav}{V}\left(0,05925. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565. \frac{ff}{2ga}\right) = \frac{\theta pb}{n} - \frac{\theta pb^3 v}{n^3a^2\alpha}\left(1,2816 + 2,65225. \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,31942. \frac{ff}{2ga}\right)$ ex qua obtinetur altitudo celeritati nauis debita $v = \left(\frac{\theta pb}{n} - 2Fa\right) : \frac{2Mgaa}{V}$

$\frac{2Mgaa}{V}(0,05925 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}) + \frac{\theta p b^3}{n^3 a^2 \alpha}(1,2816 +$ $2,65225 \cdot \frac{f}{\sqrt{2ga}} + 1,3194 \cdot \frac{ff}{2ga})$ vnde ipſa nauis celeritas poteſt determinari.

§. 650. Quo haec expreſſio tractabilior reddatur, ponamus $\frac{b}{n} = z$; ſitque breuitatis gratia $\gamma = 0,05925 \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 0,89565 . \frac{ff}{2ga}$ et $\delta = 1,2816 + 2,65225, \frac{f}{\sqrt{2ag}} + 1,3194 . \frac{ff}{2ag}$, erit autem accuratius nullo neglecto termino: $\gamma = 0,44782 . \frac{ff}{ga} + 0,05158 \sqrt{(0,65971 \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$ $\delta = 1,2816 + 0,65971 . \frac{ff}{ga} + 2,309 \sqrt{(0,65971 . \frac{ff}{ga} - 0,05126)}$. Quibus factis ſubſtitutionibus erit altitudo debita celeritati, qua nauis propelletur $v = \frac{\theta p z - 2Fa}{\frac{2Mgaa\gamma}{V} + \frac{\theta p z^3 \delta}{aa\alpha}}$. Exprimantur longitudines in pedibus rhenanis, eritque $\frac{M}{V} = 64$; ac ponatur vt hactenus $p = 32$ libr. et $\alpha = 1$ ped. Praeterea ſit momentum $2Fa = 32k$, nempe ſit frictio tanta ad quam ſuperandam axi rotae in diſtantia k applicari debeat pondus 32 librarum: eritque $v = \frac{\theta z - k}{4gaa\gamma + \frac{\theta z^3 \delta}{aa}}$

§. 651. Patet hic eiusmodi valorem ipſi z tribui poſſe vt celeritas nauis fiat maxima ceteris paribus, ad quem inueniendum differentiatur formula ipſi v aequalis, eritque $4gaa\gamma\theta - \frac{2\theta\theta\delta z^3}{aa} + \frac{3k\theta\delta zz}{aa} = 0$, ſeu $4ga^4\gamma = 2\theta\delta z^3 - 3k\delta zz$. Sit $k = \mu z$, denotabit μ numerum hominum, qui frictionem ergatae ſuperare valeant; ita vt nullus motus ipſi induci queat, niſi numerus hominum θ excedat numerum μ: erit ergo frictione hoc modo in computum ducta $v = \frac{(\theta - \mu) z}{4gaa\gamma + \frac{\theta\delta z^3}{aa}}$ ex qua pro maxima celeritate

tate

tate reperitur $2ga^4\gamma = \theta\delta z^3$; hincque oritur $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}} = \frac{b}{n}$. Ex hac ergo aequatione reperietur vel longitudo vectium b ergatae inſigendarum, ſi detur ratio inter celeritatem ergatae et rotae; vel ſi detur longitudo b reperietur numerus $n = \frac{b}{a}\sqrt[3]{\frac{\theta\delta}{2ga\gamma}}$, qui indicat, quoties rota circumagi debeat, dum ergata ſemel conuertitur.

§. 652. Ex hoc valore ipſius $z = \sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}$ oritur ergo celeritas nauis maxima, cuius altitudo debita erit $v = \frac{(\theta-\mu)\sqrt[3]{\frac{2ga^4\gamma}{\theta\delta}}}{6gaa\gamma} = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{4g^2a^2\gamma^2\theta\delta}}$. Quoniam fere eſt $\gamma = 0,89565 \cdot \frac{ff}{2ga}$, erit $4g^2a^2\gamma^2$ quantitas conſtans nempe $= (0,89565)^2 f^4$, eo quod ff repraeſentat reſiſtentiam nauis abſolutam non ab arbitrio noſtro pendentem. Vnde intelligitur celeritatem inſuper per valorem ipſius δ augeri poſſe, ipſum minuendo quantum fieri poteſt. Hoc autem fit augendo valorem ga ita vt celeritas nauis videatur quousque libuerit augeri poſſe. At vero, primum augeretur frictio, ob machinam ponderoſiorem factam, qua celeritati multum decederet. Tum vero, quam primum valor $\frac{ff}{2ga}$ minor fit vnitate, valor pro γ aſſumtus ob aliquot neglectos terminos non amplius valet, totaque concluſio concidit.

§. 653. Cum igitur tota disquiſitio iam a valore $\frac{ff}{ga}$ pendeat, ponamus $\frac{ff}{ga} = m$, erit $v = \frac{\theta-\mu}{3\sqrt[3]{\frac{4\theta f^4}{mm}}}\gamma^2\delta$ et $z = \frac{b}{n} = a\sqrt[3]{\frac{2ff\gamma}{m\theta\delta}}$. Atque loco m ſucceſſiue ponamus numeros 1, 2, 3, 4, etc. indeque valores conuenientes pro γ et δ inueſti-

inueſtigemus, qui in formulis ſubſtituti efficient vt quantitates z et v per ſolas quantitates θ, μ et f determinentur. Loco m vero numeros vnitate minores non ſubſtituo, quia valor ga ob grauiſſimas cauſas maior ipſo ff accipi non poteſt. Si enim nauis ſit exigua, tum ea tantam machinam, qualem valor ipſius ga ipſum ff ſuperans requireret, ſuſtinere non poſſet, et in nauibus grandioribus, ob ff iam ſatis magnum, valor ipſius ga neceſſario minor capi debet.

§. 654. En igitur ſequentem tabellam:

$m = 1$;	$\gamma = 0,48805$;	$\delta = 3,74241$
$m = 2$;	$\gamma = 0,95372$;	$\delta = 5,20125$
$m = 3$;	$\gamma = 1,41508$;	$\delta = 6,46672$
$m = 4$;	$\gamma = 1,87425$;	$\delta = 7,63469$
$m = 5$;	$\gamma = 2,33205$;	$\delta = 8,74102$
$m = 6$;	$\gamma = 2,78887$;	$\delta = 9,80386$
$m = 7$;	$\gamma = 3,24497$;	$\delta = 10,83392$
$m = 8$;	$\gamma = 3,70048$;	$\delta = 11,83797$
$m = 9$;	$\gamma = 4,15552$;	$\delta = 12,82095$
$m = 10$;	$\gamma = 4,61016$;	$\delta = 13,78624$

§. 655. Subſtituantur hi valores ſucceſſiue in formulis $\frac{na}{\delta} = \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff} \cdot \frac{m\delta}{2\gamma}}$ et $v = \frac{(\theta-\mu)}{3} \sqrt[3]{\frac{mm}{4\theta f^4 \gamma^2 \delta}} = \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{mm}{108 \gamma^2 \delta}}$ ſeu $v = \frac{\theta-\mu}{6\sqrt[3]{\theta f^4}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2mm}{\gamma^2 \delta}}$; prodibitque haec tabula:

$m =$

$m = \frac{ff}{ga} = 1$	$\frac{na}{b} = 1,56514 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,21819 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 2$	$\frac{na}{b} = 1,76019 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,19856 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 3$	$\frac{na}{b} = 1,89961 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,18600 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 4$	$\frac{na}{b} = 2,01217 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,17677 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 5$	$\frac{na}{b} = 2,10824 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16950 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 6$	$\frac{na}{b} = 2,19298 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,16352 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 7$	$\frac{na}{b} = 2,26924 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15844 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 8$	$\frac{na}{b} = 2,33898 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15405 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 9$	$\frac{na}{b} = 2,40345 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,15019 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$
$m = \frac{ff}{ga} = 10$	$\frac{na}{b} = 2,46358 . \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$	$v = 0,14675 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$

§. 656. Ex hac tabula intelligitur celeritatem nauis eo fore maiorem, quo minor fuerit valor $\frac{ff}{ga}$, hoc eſt quo maior ſit cum radius rotae a, tum latitudo palarum g. Neque vero valor ipſius v admodum decreſcit, creſcente valore fractionis $\frac{ff}{ga}$; hic enim ſi decuplo maior capiatur, altitudo v nequidem ſui triente diminuitur, ideoque ipſa celeritas vix ſexta ſui parte debilitatur. Ceterum ſi $\frac{ff}{ga}$ vnitate minor capiatur, altitudo v creſcit vsque ad certum terminum, poſt quem iterum decreſcit, quoad fiat $\frac{ff}{ga} = \frac{0,05116}{0,65971}$, quo caſu fit circiter $v = 0,07 . \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Sin-

autem ponamus $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{2}$; fit $\gamma = 0,25113$, $\delta = 2,83021$ et $\frac{na}{b} = 1,41239 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$; $v = 0,23494 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$ ſi fiat $m = \frac{ff}{ga} = \frac{1}{10}$ oritur $\gamma = 0,04808$; $\delta = 1,62762$ et $\frac{na}{b} = 1,19175 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ atque $v = 0,29090 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$.

§. 657. Operae igitur vtique pretium eſſet hoc maximum inueſtigare, ſi inde vſus in praxi expectari poſſet: ſed praeterquam, quod ob auctam rotae molem frictio μ augeatur, hincque valor v diminuatur, conditionem praecipuam nondum in calculum vocauimus, qua ſupra (643) vidimus neceſſario eſſe debere $\frac{O\delta}{OD} > \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}}$, alioquin enim rota non ſui parte antica in aquam impingeret. Quoniam igitur ſumſimus $O\delta = \frac{1}{2} OD$ debet eſſe $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} < \frac{1}{2}$ et $\frac{u}{v} > 4$. at eſt $\frac{u}{v} = \delta$; quamobrem neceſſe eſt vt ſit $\delta > 4$. Hinc perſpicitur caſum primum quo $m = \frac{ff}{ga} = 1$ ſine detrimento celeritatis adhiberi non poſſe, quia eſt $\delta < 4$ ideoque aqua in partem rotae poſticam quodammodo irruit, et effectum diminuit. Sequentes vero caſus omnes, quia in ipſis eſt $\delta > 4$, vtiliter ad praxin transferri poſſint neque experientia ſenſibiliter a theoria diſſentire deprehendetur.

§. 658. Celerrime ergo nauis propelletur, ſi ipſi $\frac{ff}{ga}$ eiuſmodi tribuatur valor, cui reſpondeat $\delta = 4$, tum enim tota rota, qua aquae immergitur, aquam percutiet nauemque propellet. Reperitur autem tum $\frac{ff}{ga} = 1,16240$ et $\gamma = 0,55745$, atque porro $\frac{na}{b} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$ et $v = 0,21590 \cdot \frac{\theta - \mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Rota ergo primo ita inſtitui debet, vt

ſit

ſit $ga = \frac{ff}{1,1624} = \frac{6}{7} ff$ proxime: ſicque tam latitudo palarum g, quam longitudo radiorum a habita reliquarum circumſtantium ratione determinabitur. Deinde ſi detur numerus operariorum θ, definietur commodiſſima ratio $\frac{aa}{b}$, ſimulque altitudo debita celeritati nauis v, ex qua ſpatium, quod nauis dato tempore percurret, aſſignari poterit; datur enim altitudo illa v in pedibus rhenanis.

§. 659. Quo praerogatiua huius remigandi modi prae conſueto perſpici queat, ex antecedentibus repetamus, quae de celeritate nauis a 6ψ remigibus propulſae ſunt allata. Inuenimus autem fore altitudinem celeritati debitam $v = \frac{2\delta\delta}{3\sqrt[3]{2}(\gamma+\delta)^2} = \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2gb}}+\sqrt{\frac{\psi}{ff}}\right)^2}$ (623, 625) denotante gb amplitudinem remi vnius. In motu ergo remorum ordinario ſemper eſt $v < \frac{2\psi}{3ff\sqrt[3]{\frac{2\psi}{ff}}}$, eoque magis v ab iſto limite diſtabit, quo minor fuerit fractio $\frac{\psi}{ff}$. Ponatur iam numerus remigum $6\psi = \theta$, vt ſit $2\psi = \frac{1}{3}\theta$, fiet $v < \frac{\theta}{9\sqrt[3]{\frac{1}{3}\theta f^4}}$ ſeu in fractionibus decimalibus erit $v < 0,16025\ \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. quae quantitas multo minor eſt, ea, quae, ſi remi in rota diſponantur, eſt inuenta, erat enim $v = 0,21590.\ \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, ſi omnia ad celerrimum motum naui vtroque modo imprimendum diſponantur.

§. 660. Quoniam celeritas nauis maxima ope rotae propulſa debita eſt altitudini $0,21590.\ \frac{\theta-\mu}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, erit haec altitudo minor quam $0,21590.\ \frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$. Quare cum altitudo

debita celeritati nauis ope remorum propulſae ſit minor quam $0,16025.\frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}}$, a veritate non multum aberrabimus, ſi hos defectus ipſis quantitatibus proportionales ſtatuamus. Quod ſi ergo vtroque caſu idem hominum operantium numerus adhibeatur, erit celeritas nauis ope remorum propulſae ad celeritatem nauis ope rotae propulſae vt $\sqrt{16025}$ ad $\sqrt{21590}$ hoc eſt vt 1 ad 1,16072 ſeu vt 6 : 7 proxime. Sexta igitur parte eadem nauis ab eodem hominum numero ope rotae celerius promoueri poterit, quam ope remorum, conſueto more adhibitorum, quod ſane eſt lucrum minime ſpernendum.

§. 661. Quia idem hominum numerus eandem nauem ope rotae celerius promouere poteſt quam ope remorum, patet ſi celeritas nauis ſit propoſita, pro rota pauciores homines requiri quam pro remis. Sit numerus hominum nauem remis promouentium $= \eta$, ac numerus hominum, qui ope rotarum eandem nauem eadem celeritate propellere valent $= \theta$, erit $0,21590.\frac{\theta}{\sqrt[3]{\theta f^4}} = 0,16025.\frac{\eta}{\sqrt[3]{\eta f^4}}$ ſeu $21590\sqrt[3]{\theta^2} = 16025\sqrt[3]{\eta^2}$: hincque $\theta:\eta = 16025^{3:2}: 21590^{3:2} = 1 : 1,5638$; erit ergo $\theta : \eta = 2 : 3$ ſeu propius vt $16 : 25$, ſi igitur loco remorum rotae adhibeantur, tum tertia operariorum parte ſuperſederi poterit: ſcilicet ſi nauis remis inſtructa poſtulet 25 remiges, nauis rotis inſtructa tantum 16 hominibus opus habebit, vt aequali celeritate propellatur.

§. 662. Ex tabula autem computata ſimul intelligitur quanta circumſpectione ad rotam aſtruendam opus ſit, vt tantum lucrum obtineatur. Primo enim in machina

ea

Digitized by Google

ea ipſa proportio inter *na* et *b* obſeruari debet, quam inuenimus; a qua ſi nimium recedatur, celeritas nauis ſenſibiliter diminuetur. Deinde vero praecipue ratio inter *ff* et *ga* cum ea, quam aſſignauimus, ſatis prope congruere debet: minor enim ſtatui nequit, quin ſimul portio vis aquae ad nauem repellendam impendatur. Quod ſi autem $\frac{ff}{ga}$ maior capiatur, quam 1, 1624 tum celeritas nauis continuo fiet minor, ita vt facta $\frac{ff}{ga} = 6$ celeritas nauis vix ſuperatura ſit celeritatem, quae ipſi a remis imprimi poteſt. Quamobrem ſi quis forte hanc remigandi modum ad praxin deducere velit, probe ad praecepta tradita attendere debet, ne loco lucri detrimentum patiatur.

§. 663. Quamuis autem iſte naues propellendi modus prae ſolito remigandi modo inſigni gaudeat praerogatiua, tamen tantis coniunctus eſt incommodis, ſi ad praxin reſpiciamus, vt haec incommoda lucrum longe ſuperent. Primum enim huiusmodi ergata, quae ope rotae dentatae remos in gyrum diſpoſitos circumagat, in nauibus non nimis magnis non ſolum ſpatium requireret ſatis magnum ſed etiam pondus nauis totum tantopere augeret, vt hinc non exigua retardatio oriatur. Deinde etiamſi ſpatium eſſet idoneum ad eiusmodi machinam collocandam, tamen tot operarii, quod requiruntur, locum non inuenirent vires ſuas machinae applicandi. In triremi ordinaria certe, ad quam propellendam plures quam 100 homines adhiberi debent, ergata tot hominibus circumagenda nullo modo effici poterit. In minoris vero moduli nauigiis de ergata ipſis imponenda nequidem cogitari poteſt.

§. 664. Miſſa itaque ergata de machina ſimpliciori

cogitare debemus, cuius ope rotae remis inſtructae circumagi, ſimulque ſufficiens hominum numerus operi admoueri queat. In hunc finem machina videtur commodiſſima, ſi axis OO, cui vtrinque extra nauem Rota D*d* eſt affirmata, intra nauem incuruetur in figuram RS SR: tum enim plures homines in naui ſedentes pro nauis latitudine prehendentes partem SS partim trahendo partim trudendo rotas D*d* circumagent hocque nauem propellent. Atque cum hoc modo nulla ergata adhibeatur, fiet $n = 1$, atque b denotabit longitudinem radii RS; exiſtente $OD = Od = a$. Non ſolum igitur iſta machina mole illa ingenti, quam commemorauimus, caret, ſed etiam homines ſedendo opus adminiſtrabunt, neque diſcurſando incommodum afferent; ita vt hinc plus non naſcatur incommodi, quam a remigum labore ordinario.

Tab. XIX. fig. 1.

§. 665. Si igitur duabus rotis nauis inſtruatur, vti hactenus poſſuimus, ac reſiſtentia nauis aequalis ſit reſiſtentiae plani ff, primum eſſe debet proxime $ga = \frac{6}{7} ff$. Scilicet ſi vtraque rota ex duodecim remis ſit compoſita atque ad medietatem radiis DK aquae immergatur, rectangulum ex longitudine vnius radii a in latitudinem g debet eſſe $= \frac{6}{7} ff$. Quoniam vero f proxime profunditatem, ad quam nauis ſubmergitur denotat, radius $OD = a$ duplum ipſius f excedere nequit, ne rota profundius quam ipſa nauis ſubmergatur. Si igitur capiatur $a = 2f$, remanebit pro $g = \frac{3}{7} f$. Deinde ſi numerus remigum ſit $= \theta$ capi debet $\frac{na}{b}$ hoc eſt $\frac{OD}{RS} = 1,60963 \sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$, ſuperficie ff in pedibus quadratis expreſſa. His vero ita inſtructis celeritas nauis debita erit altitudini $v = 0,21590 \cdot \frac{\theta\ [illegible]}{\sqrt[3]{ff}}$ ped.

ped. ſeu nauis vno minuto abſoluet ſpatium $15\sqrt{1000v}$ pedum, atque vna hora ſpatium $13224,182\sqrt[3]{\frac{\theta-\mu}{ff}}$ ped.

§. 666. Vt nauis vna hora milliare germanicum ſeu 23627 pedes abſoluat, debet eſſe $\theta > ff$, et cum frictio μ ſit valde parua, ea prae θ negligi poterit, quippe quam operarii ſuperabunt, ſi ſinguli tantillum vires magis intendant quam ipſis tribuimus. Neglecto ergo μ erit ſpatium vna hora percurrendum $= 13224,182\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$: quare vt vnum milliare conficiatur debet eſſe $\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}} = \frac{23627000}{13224182}$, vnde fit $\frac{\theta}{ff} = 5,703$. Si igitur ob frictionem fiat $\theta = 6ff$, tot operarii nauem vna hora per milliare germanicum promouebunt; ope remorum autem ad idem ſpatium abſoluendum requiruntur remiges $13ff$, ita vt hoc modo nequidem ſemiſſe operariorum opus ſit. Ex quo multo maius lucrum exiſtit, quam ante indicauimus, cuius rei ratio eſt, quod ſupra in denominatore terminum $\frac{1}{\sqrt{2gb}}$ reiecimus (659.)

§. 667. Quoniam igitur ad nauem vna hora per milliare germanicum propellendam debet eſſe $\frac{\theta}{ff} = 6$, patet, niſi ſit ff valde paruum, omnes operarios non vni axi SS admoueri poſſe ob defectum ſpatii. Operariorum numerus enim, qui ad vnum axem vertendum applicari poſſunt, determinatur latitudine nauis, cuius bini pedes vni homini ſpatium ſedendi concedent. Quia vero manibus in manubrio SS non tantum ſpatium requirunt, ad vtramque partem axis SS totidem operarii conſtitui poterunt.

runt. Atque hinc quot pedes contineat latitudo nauis OO, [illegible] operarii vires [illegible] in axe SS conuertendo exerere [illegible]unt. In nauigiis remis propulſis fere ſolet eſſe latitudo $= 4f$; vnde ſi fuerit $\theta = 6ff > 4f$ ſeu $f > \frac{2}{3}$ tum vnus axis non ſufficit tot operariis, quot requi[illegible] ad nauem per milliare germanicum vna hora promouendam.

§. 668. His igitur caſibus oportebit duas pluresue eiusmodi axes vtrinque rotis inſtructas in naui conſtitui. In hypotheſi ſcilicet aſſumta, qua latitudinem nauis $= 4f$ po[illegible], numerus eiusmodi machinarum debet eſſe $\frac{3}{2}f$, longitudine f in pedibus expreſſa. Quoniam vero calculum [illegible] ad duas rotas accommodauimus, ſi plures adhi[illegible], quaedam mutatio in expreſſionibus inuentis fieri [illegible]t. Sit ergo numerus axium $= \sigma$ ſeu numerus ro[illegible] $= 2\sigma$, ita vt ſit proxime $\sigma = \frac{3}{2}f$, alia mutatio [illegible] non orietur, niſi vt vbique loco ga ſcribamus σga. [illegible]ergo debebit $\frac{ff}{\sigma ga} = 1,1624$ ſeu proxime $ga = \frac{6}{7}\frac{ff}{\sigma}$. [illegible] igitur fuerit $\sigma = \frac{3}{2}f$ fiet $ga = \frac{4}{7}f$; ſumto ergo ra[illegible]otae $OD = 2f$. fiet latitudo palarum $g = \frac{2}{7}$ ped. quae [illegible] ſatis commode ad praxin deduci poterit.

[illegible] Numerus autem rotarum hoc modo in naui [illegible] neque rationem inter a et b neque celerita[illegible] afficit: manebit enim $\frac{OD}{RS} = 1,60963.\sqrt[3]{\frac{\theta}{ff}}$. [illegible] nauis [illegible] adſtruatur, vt ſingulis horis mil[illegible] [illegible]at eſſe $\theta = 6ff$ fiet hoc [illegible] 5, ideoque $RS:OD =$ [illegible] SS ab hominibus cum [illegible]odius verſari poſſit radius RS

vnum

vnum pedem ſuperare nequit ſumto erg[illegible] $RS = 1$ ped. fiet $OD = 2,925$ ped. Determinato autem hoc modo radio $OD = a$, fiet $\frac{ff}{ag} = 3$, [illegible] palarum $g = \frac{\sigma ff}{170}$ ped. Atque ſi $\sigma = \frac{1}{8} f$ erit [illegible] $g = \frac{1}{8} f$. Probe autem notandum eſt axem [illegible] poſſi[illegible] altitudinem ſuper aquam eſſe conſtituendum, vt temu[illegible] ticalium OD aquae immergatur.

§. 670. Accommodemus haec ad exemplum triremis ſupra iam tractatum, in qua erat $ff = 16$ ped. ob rationem enim (633) allatam videtur iſte valor commode i[illegible] ff tribui poſſe, quo certiores de effectu eſſe queam[illegible] igitur iſta nauis tempore vnius horae per vnum m[illegible] germanicum propellatur, opus erit 96 hominum, cum ſolito remigandi modo plures quam 200 requirantur. [illegible] hoc ergo ſex axes ſeu 12 rotae in naui diſponi debe[illegible], et quiuis axis a 16 hominibus verſabitur. Si igitur ſit $RS = 1$ pedis, fiet $OD = a = 2,925$ ped. et rotae in aqua ad 1, 46 ped. immergentur; latitudo vero palarum erit $= \frac{8 \cdot 16}{8 \cdot 17}$ ped. ob $\sigma = 6$. hoc eſt proxime $\frac{4}{5}$ ped. Quodſi autem videatur RS tantum ſtatuere $\frac{3}{4}$ ped. fiet $OD = a = 2,194$ ped. et latitudo palarum $g = 1,04$ ped.

§. 671. Triremis ergo hoc modo inſtructa a 96 operariis vna hora per milliare germanicum promoueri poterit; neque hic modus tantis difficultatibus obnoxius eſſe videtur, quam primo intuitu apparebat. Lucrum enim plus centum hominum facile compenſat ſumt[illegible] qui ad eiusmodi rotas fabricandas impenduntur, et, ſi quae difficultates praeterea occurrerent [illegible] operae pretium erit de [illegible] iis tollendis diligentius cogitare. Sumtus quidem ad [illegible] ope-

ra ſufficientis roboris efficienda parui momenti eſſe videntur, cum ſi ſemel ſint facti longo tempori ſufficiant: Contra autem centum hominum victus et ſuſtentatio perpetuo duret. Vt [illegible] merum hominum operi admouendorum non [illegible] io noſtro pendere; et quamuis fortaſſe ſatis adſint [illegible] amen plerumque ad opera longe vtiliora adhiberi [illegible] int. Denique iſte labor rotas verſandi, quia eſt vniformis, et motus iam impreſſus laborem adiuuat, non tantopere homines defatigabit, quam remorum agitatio.

CAP. VIII.

Cap. VIII.

DE CONSTRVCTIONE NAVIVM REMIS PROPELLENDARVM.

§. 672.

Quoniam in praecedente capite non ſolum vim, quam remiges exercent, ſed etiam celeritatem abſolutam, quae datae naui inducitur, determinauimus: cuncta principia iam habemus expoſita, ex quibus maxime idonea earum nauium, quae remis ad motum ſollicitari ſolent, ſtructura deriuari ac definiri debet. Quanquam enim eiusmodi naues, quoties opportunitas euenit, praeter remos etiam velis vti ſolent; tamen ad hunc finem in conſtructione triremium non admodum attendi conuenit; eo quod vento locus non conceditur, niſi quatenus reliquae circumſtantiae id permittunt. Neque vnquam triremes vela adhibent, ſi aduerſus ventum curſus inſtitui debeat; in hoc vero maximum diſcrimen poſitum eſt inter naues, quae ſolo vento agitantur, et quae remis ſunt inſtructae.

§. 673. Proprietates, quibus naues remis propulſandas praeditas eſſe oportet, vt in ſuo genere perfectiſſimae cenſeri queant, ſunt vel communes, vel propriae. Illae in omni nauium genere, quae mari committuntur, vndecunque vis propellens petatur, aeque requiruntur; hae vero ad vim propellentem maxime accommodatae eſſe debent, vt inde nauis motum ſatis celerem et tutum conſequatur. Perpetuo autem neceſſe eſt, vt vtriusque generis proprietates coniunctim perpendantur, ne dum vni ſatisfacere conabimur, reliquis quicquam detrahamus, vnde

Digitized by Google

nauis periclitari queat. Saepenumero enim ſtructurae, quas diuerſae proprietates poſtulant, inter ſe pugnant; hocque caſu maxime eſt cauendum ne vni nimium tribuentes alteri damnum afferamus.

§. 674. Proprietates communes ſupra iam ſatis euoluimus, vbi determinauimus, quemadmodum nauis comparata eſſe debeat, vt aquae commiſſa tam in ſtatu quietis quam motus incolumis perſeueret. Primo ſcilicet cum figurae nauis tum onerationis ratio debet eſſe eiusmodi, vt ſitus erectus ſimul ſit ſitus aequilibrii, quod euenit, ſi in hoc ſtatu ambo grauitatis centra ipſius nauis nimirum et voluminis ſubmerſi in eandem rectam verticalem incidant. Proprietatem hanc quidem nauis iam dum eſt vacua fere habere debet, ne onera nimis inaequaliter ad hunc ſitum obtinendum imponi oporteat; interim tamen etiamſi nauis vacua aliquantum aberret, niſi error ſit admodum magnus, per onerationem compenſari poterit. Ad hoc primum nauem vtrinque ſimiliter fabricari conuenit, ne ratio adſit, cur in vnum latus potius inclinet quam in alterum: deinde quamuis prora puppi diſſimilis conſtituatur, tamen in hac ipſa diſſimilitudine efficiendum eſt, vt ambo illa centra grauitatis in vnam rectam verticalem cadant.

§. 675. Cum igitur poſitio ſectionum nauis tam horizontalium quam verticalium a priori ſit data, inde volumen carinae ſeu partis aquae immerſae cognoſcitur abſcindendo per ſectionem horizontalem inferiora verſus partem, cuius volumen molem aquae capiat ponderi nauis aequalem. Quoniam ergo pondus nauis a ligno et ferro quibus latera clauduntur et contignatione interna oritur, manifeſtum eſt poſitionem amborum centrorum grauitatis

requi-

Digitized by Google

requiſitam obtineri, ſi diuiſa naui per ſectiones verticales transuerſas in plurima ſegmenta, pondus vniuscuiusque ſegmenti proportionale ſit volumini partis eiusdem ſegmenti quae ſub aqua verſatur. Sienim haec regula in fabricandis ſingulis ſegmentis obſeruetur, neceſſe eſt, vt commune centrum grauitatis tam materiae, ex qua ſegmenta ſunt confecta, quam voluminum aquae ſubmerſorum in eodem ſegmento reperiatur.

§. 676 Data magnitudine et figura nauis, copia lignorum et reliquae materiae ad conſtructionem neceſſariae a practico facile aeſtimabitur: vnde pondus nauis vacuae ex hocque volumen carinae congoſcetur. Hinc ad ſingula ſegmenta (quae gallice Gabaris vocantur) conſtruenda regula naſcitur iſta; vt pondus materiae ad quoduis ſegmentum impendendae proportionale ſit volumini eiusdem ſegmenti infra aquae ſuperficiem deſtinato, ſiue regula aurea adhiberi poteſt, qua inferatur, vti ſe habet volumen totius nauis aquae immerſum ad ſimile volumen cuiusque ſegmenti, ita pondus totius nauis ad pondus eiusdem ſegmenti. Quodſi autem aliae conditiones prohibeant, quominus iſta regula in fabricandis ſingulis ſegmentis obſeruetur: tum quantum in prora ab hac regula fuerit receſſum, tantumdem in puppi ad aequalem a centro grauitatis diſtantiam ab eadem regula erit recedendum.

§. 677. Si hanc regulam perpetuo obſeruare liceret, conſeruationi nauium non parum conſuleretur, quae ſaepe numero ob defectum huius regulae damnum patitur. Quod, vt clarius perſpiciatur, concipiatur nauis *a*ADB*b*, cuius conſtructio ab hac regula aberrat, plano transuerſo verticali *c*D per centrum grauitatis ducto in duas partes *a*A Tab. XIX. fig. 2.

 D*c*,

D*c*, et *b*BD*c* diuiſa, quarum illa proram haec puppim repraeſentet. Sit prorae *a*AD*c* centrum grauitatis in P, ipſius autem partis aquae ſubmerſae ADC centrum magnitudinis M cadat propius ad medium *c*D. Simili modo puppis *b*BD*c* centrum grauitatis ſit in Q, eiusque partis ſubmerſae BDC centrum magnitudinis in N propius ſitum ſit ad medium *c*D: qui caſus locum habet, ſi naues circa extremitates prorae et puppis ponderoſiores redduntur, quam regula memorata requirit.

§. 678. Huius modi ſtatus in plerisque nauibus deprehenditur, propterea quod naues circa proram et puppim fortiſſimas conſtrui oportet, cum tamen his locis volumen aquae ſubmerſum ſit minimum. Sic itaque erunt centra illa quatuor P, Q, M et N diſpoſita in omni fere naui vacua, et niſi maxima onerum pars in medio *c*D collocetur, idem ſitus manebit in naui onuſta. Iam a grauitate prora deorſum in directione P*p* vrgebitur vi ipſius ponderi aequali; et puppis in directione Q*q* deorſum a vi ipſius ponderi pariter aequali. Porro ob actionem aquae, qua latera nauis vndique premuntur, prora ſurſum ſollicitabitur a pondere aquae, quam volumen ADC capit, hocque in directione M*m* per centrum magnitudinis M partis prorae aquae ſubmerſae ducta. Similique modo preſſiones aquae puppim in directione N*n* ſurſum pellunt vi ſimilis voluminis aquae.

§. 679. Omnino igitur nauis ſollicitabitur a quatuor viribus, a duabus ſcilicet deorſum P*p*, Q*q*; et a duabus ſurſum M*m* et N*n*; quae quatuor vires ſeſe in aequilibrio continent. Ab iis ergo, ſi nauis eſſet corpus maxime rigidum omnisque inflexionis expers, nullus prorſus effectus

effectus ſenſibilis produceretur; at vero manifeſtum eſt, ſi nauis tanto rigore careat, neceſſario nauem incuruatum iri, ita vt eius ſpina circa medium D ſurſum inflectatur. Atque hoc ipſum vitium ab iſta cauſa oriundum in plurimis nauibus annoſis ſaepiſſime obſeruatur, quae ideo ad vlteriores curſus ineptae redduntur. Euitaretur ergo hoc vitium, ſi naues ſecundum regulam datam conſtruerentur, tum enim ambo centra P et M in eandem rectam verticalem inciderent pariter ac centra Q et N, hocque caſu nulla incuruatio eſſet metuenda.

§. 680. Verum, vti iam monuimus, ob alias rationes grauiſſimas naues circa proram ac puppim vehementer fortes et robuſtae conſtrui debent, quia hic amborum laterum extat iunctura, ſimulque hae partes maximis impetibus ſunt expoſitae. Contra vero in his locis amplitudo carinae fit minima, cum non ſolum ſecundum latitudinem ſed etiam ſecundum altitudinem coarctetur. Hanc ob cauſam, cum minime expediat corpus nauis in medio praeter neceſſitatem ligno onerare, iſtud incommodum per onerum impoſitionem tolli debet, iis ad nauis medium admouendis. Atque ſi aliae rationes iſtam onerationem diſſuadeant, in id tamen maxime erit incumbendum, vt diſtantia inter ambo puncta tam in prora P et M quam puppi Q et N quam minima reddatur. Deinde vero architectos in id magis attentos eſſe oportebit, vt ſpinam et contignationem nauis robuſtiorem efficiant, nauique ſufficientem vim incuruationi reſiſtendi concilient.

§. 681. Ex hoc principio ratio praecipua intelligitur, cur praelonga nauium roſtra improbentur, etiamſi alias ad reſiſtentiam minuendam vtiliſſimae videri queant. Namque quo

Digitized by Google

quo longius protenditur prora, eo maiore vi ruptioni reſiſtere debet, cum impetuum contra illam factorum momenta augeantur. Hinc eiusmodi roſtra perquam robuſta, ideoque ponderoſa effici oportet; volumine, quo aquae ſubmerguntur valde paruo exiſtente. Niſi igitur ſimul puppis vel magis producatur, vel oneribus maxime grauetur, nauis ſitum aequilibrii tenere non poterit. Poſterius remidium fere prorſus ad ſcopum nauium eſt ineptum, ſi enim nauis vacua puppim iam onuſtam requirit, oneratio nauis tota non mediocriter impeditur. Vt vero alia incommoda iam ſupra expoſita taceam, vtrumuis remedium adhibeatur, centra grauitatis P et M itemque Q et N nimium a ſe inuicem remouentur, ita vt nauis quantumuis circa medium robuſta incuruationi reſiſtere nequeat.

§. 682. Haec ratione ſitus aequilibrii oberuanda ſunt in omni nauium genere, ſiue propulſio fiat remis ſiue velis: atque ſimili modo alterum requiſitum, quo ſitus aequilibrii ſufficientem ſtabilitatem habere debet, vtrique nauium claſſi commune eſt. Supra quidem iam docuimus, quemadmodum ſtabilitas obtineatur ac pro inſtituto augeatur, vt nauis a viribus ſollicitantibus non vltra datum terminum inclinetur. Interim tamen hic circa naues remis propellendas ratione virium, quibus ſunt expoſitae, quaedam ſingulatim ſunt monenda. Sicuti enim in nauibus, quae velis promouentur ſtabilitas ideo praegrandis eſſe debet, quod momenta virium venti ad nauem inclinandam ſint vehementer magna; ita, dum naues remis motae his tantis viribus non ſunt ſubiectae, tam inſigni ſtabilitatis gradu, ſaluo ipſarum ſtatu, tuto carere poſſunt. Quoniam enim vis, quam nauis ab agitatione remorum ſuffert, fere

in

in aquae ſuperficie non procul a centri grauitatis libella applicatur, eius momentum ad nauem inclinandum vix attentione eſt dignum.

§. 683. Duplex autem in quaque naui requiritur ſtabilitas, altera reſpectu axis longitudinalis, circa quem nauis ad latera inclinatur, altera reſpectu axis latitudinalis, circa quem modo prora modo puppis deprimitur, et eleuatur. Quod ad priorem ſtabilitatem attinet, remorum vires eam prorſus non afficiunt; ex quo tantum ad vndarum a latere venientium impetus erit attendendum, quibus, niſi latera nauis in ſuperficie aquae vel diuergant vel conuergant, ſuſtinendis exigua vis par eſſe poteſt. Interim tamen non ſolum ob reliquos tempeſtatum inſultus ſtabilitas ad latera notabilis eſſe debet, ſed etiam ob vela, quae in triremibus fere ſecundum longitudinem extendi ſolent. Dum enim velorum ſitus eſt obliquus, tantundem ſtabilitatis reſpectu axis longitudinalis requiritur, quantum in nauibus, ſolis velis propulſis.

§. 684. Ratione axis latitudinalis, ſi ad ſolam vim remorum attendamus, quoque perexigua ſtabilitas requiritur, ſi enim centrum grauitatis nauis in ipſa ſuperficie aquae ſit poſitum, tum vis remorum nullam prorſus inclinationem intendit; ſin autem centrum grauitatis vel ſupra vel infra aquae ſuperficiem cadat, nauis a remis vel in puppi vel in prora deprimetur, perpetuo autem haec vis erit valde parua. Quodſi vero nauis inſuper velis ſit inſtructa, tum ad horum vim ſuſtinendam vtique maior ſtabilitas requiretur, quae aucta nauis longitudine obtinetur. Cum autem celeritas nauis figuram ſatis oblongam poſtulet, eo ipſo ſtabilitas reſpectu axis latitudinalis multo

maior efficitur, quam vllarum virium ſuſtentatio requirit. Praecipue igitur ad eam vim inclinantem attendi opportebit, quae in curſu nauis a reſiſtentia prorae oritur, quippe quae ſi prora oblique ſuperiora verſus clauditur, eo maior eſt, quo celerius nauis promouetur. Hanc autem poſtea perpendemus, cum ſtructuram nauium remis propulſarum ex profeſſo ſumus inueſtigaturi.

§. 685. Tertia proprietas nauium aquae innatantium conſiſtit in oſcillationum tranquillitate. Celeritas quidem motus oſcillatorii pendet partim a ſtabilitate, partim a momento inertiae nauis reſpectu axis circa quem oſcillationes fiunt, tranquillitas vero maxime tum cum motu oſcillatorio coniungitur, quando centrum grauitatis ſectionis aquae in eandem rectam verticalem incidit, in qua ſita ſunt cum centrum grauitatis totius nauis tum centrum magnitudinis partis ſubmerſae. Ad hunc autem motum oſcillatorium in nauibus, quae remis promouentur, non admodum eſt ſpectandum, cum in continua remorum vibratione vehementer turbetur, neque vnquam ad vniformitatem peruenire queat. Vndarum quidem impulſiones nauem ſuccutiunt, at hinc non eiusmodi oritur motus, cuius moderatio in noſtra eſt poteſtate.

§. 686. Tertium requiſitum ad naues in ſuo genere perfectiſſimas reddendas verſatur in diminutione reſiſtentiae, qua celeritas nauis augetur. Ad hoc nobis hic potiſſimum eſt attendendum, vbi naues remis promouendas tractamus. Cum enim nauis ab eadem vi eo celerius promoueatur, quo minor fuerit reſiſtentia aquae, triremes procul dubio erunt perfectiſſimae, quae a minima vi celerrime promoueri poterunt. Quae perfectio etſi ad omnes naues

pa-

patet, tamen in iis, quae ope remorum propelluntur, maxime requiri ſolet. Cum enim in nauibus a vento propulſis defectus a nimia reſiſtentia oriundus multiplicatione velorum reparari queat, in triremibus non ſine ingentibus ſumtibus numerus remigum multiplicatur. Quocirca in hoc praecipue erit elaborandum, vt vel a dato remigium numero naui maxima celeritas induci, vel eadem celeritas a minimo remigum numero obtineri queat.

§. 687. Quo autem nexus, qui inter vim propellentem, reſiſtentia aquae, et nauis celeritatem intercedit, clarius ob oculos ponatur, ponamus vim propellentem aequivalere ponderi P, reſiſtentiam nauis abſolutam aequalem eſſe reſiſtentiae, quam ſuperficies plana ff contra aquam directe mota ea ipſa celeritate, qua nauis progreditur, ſuffert. Tum vero ſit celeritas nauis debita altitudini v. His poſitis erit vti iam ſaepius videmus, vis propellens P aequalis ponderi maſſae aquae, cuius volumen eſt $= ffv$. Quodſi ergo vis P pariter per volumen aquae aequiponderans exprimatur erit $P = ffv$, hincque nauis celeritas $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{P}}{f}$. Manente ergo eadem vi propellente P, celeritas nauis augebitur minuta reſiſtentia. Atque in qua ratione ſuperficies ff reſiſtentiam abſolutam metiens diminuitur, in huius ratione ſubduplicata celeritas nauis augebitur.

§. 688. Hic littera P denotat vim quae ad nauem propellendam immediate impenditur, eiusque adeo loco vim, quam remiges ad remos agitandos adhibent, ſubſtituere non licet: quoniam haec vis nauem eo debilius promouet, quo celerius iam promoueatur, etiamſi remiges eadem opera vtantur. Vidimus autem in praecedente ca-

Digitized by Google

pite, ſi numerus et vis remigum non mutentur, atque ad maximum effectum producendum accommodentur, fore v non vti $\frac{1}{f^2}$ ſed vti $\frac{1}{\sqrt[3]{f^4}}$, ex quo ipſa nauis celeritas $\sqrt{v}$ erit vt $\frac{1}{\sqrt[3]{ff}}$. Celeritates igitur, quae a dato remigum numero naui induci poſſunt ſunt in ratione reciproca ſubtriplicata ſuperficiei ff, qua reſiſtentia nauis exprimitur. Aucto autem remigum numero, ſi reſiſtentia maneat eadem, celeritas nauis in ratione ſubtriplicata tantum augetur. Ex quibus intelligitur aptiſſimum remedium ad naues accelerandas in diminutione reſiſtentiae eſſe quaerendum.

§. 689. Quoniam naues remis motae curſum obliquum inſtituere non coguntur, hic ea tantum reſiſtentia in computum venit, quam nauis in curſu directo patitur. Pendet autem haec reſiſtentia potiſſimum a figura inferioris prorae partis, quae in aqua verſatur, de qua in ſuperiori libro fuſius eſt tractatum. At praeter iſtam prorae figuram non parum confert ad reſiſtentiam cum augendam tum diminuendam ipſa externae ſuperficiei indoles; quae ſi fuerit aſpera, motum nauis haud mediocriter impedit, contra autem quo magis eſt polita, quod fit dum pice oblinitur et laeuigatur, eo minus alliſio aquae motui reluctatur. Hoc vero caſu demum nauis eam ſentiet reſiſtentiam, quam calculus oſtendit; ita vt, niſi ſuperficies ſit perfecte polita, prouti in calculo aſſumi ſolet, nauis multo maiorem paſſura ſit reſiſtentiam, quam calculus declarat. Ex quo ſumma vtilitas huius praecepti circa externam nauis ſuperficiem diſtincte perſpicitur.

§. 690. Figura prorae, quae in calculum reſiſtentiae ingreditur, a nauis ſectione verticali transuerſa ampliſſima incipit;

incipit; quam primum enim figura nauis anteriora verſus contrahi incipit, alliſionem aquae ſentit. In hoc igitur negotio primum conſiderari debet ſectio carinae ampliſſima, a qua contractio laterum nauis initium ſumit; ac tum ipſa haec contractio et attenuatio prorae ad cuſpidem vsque, ſit ſectio carinae ampliſſima $= bb$, quae cum a magnitudine nauis, tum a ſcopo cui deſtinatur, pendet; atque manifeſtum eſt, ſi nauis plano verticali hic ſubito clauderetur, ſeu eadem amplitudine ad extremitatem vsque produceretur, hanc ipſam ſectionem ampliſſimam bb futuram eſſe eam ſuperficiem, quam ante ad reſiſtentiam abſolutam metiendam adhibuimus, hoc eſt fore $ff = bb$. Hoc autem caſu nauis omnium maximam patietur reſiſtentiam, quae obliquitate quacunque diminuitur.

§. 691. Cum igitur $ff = bb$ indicet maximam reſiſtentiam quam nauis, cuius ſectio ampliſſima eſt $= bb$, ſufferre poteſt, hanc ipſam quam minimam conſtitui conveniet; quo minor enim reddetur maxima reſiſtentia, quae in nauem cadere poteſt, eo magis ea deinceps per obliquam laterum nauis anteriora verſus contractionem diminui poterit, vt nauis reipſa minimam ſentiat reſiſtentiam. Cum autem ex pondere nauis, quod datum aſſumimus, volumen carinae determinetur, manifeſtum eſt eo minorem prodituram eſſe ſectionem nauis ampliſſimam bb, quo longior ſtatuatur nauis. Oportebit itaque longitudinem nauis maxime augeri diminuta eius latitudine: at vero in hac allongatione nauis probe cauendum eſt, ne ob latitudinem nimis diminutam ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis detrimentum patiatur. Ad hoc euitandum neceſſe eſt, vt ſimul profunditas carinae ita diminuatur, vt latitudo

ad eam retineat rationem dupla non minorem, vti in capite de ſtabilitate nauium oſtendimus.

§. 692. Si figuram carinae ponamus parallelepipedum rectangulum, cuius longitudo ſit $= a$, profunditas $= c$, et latitudo $= 2c$, vti ſtabilitas reſpectu axis longitudinalis requirit, erit volumen carinae ſeu partis nauis aquae ſubmerſae $= 2acc$. Pondus porro nauis vacuae pendet a craſſitie fundi et parietum, quam ſi ponamus $= e$, nauisque tantum ſuper aqua emineat, quantum immergitur, erit quantitas materiae nauis $= 8ace$, cui cum pondus ſit proportionale fiet $8ace$ ipſi $2ace$ et hinc profunditas c craſſitiei e proportionalis. Determinatur ergo profunditas c, longitudo autem a pro lubitu accipi poſſe videtur. At cum aucta longitudine momenta virium, quae nauem rumpere conantur, creſcant, pro maiori longitudine naues fortiores conſtrui deberent, ex quo earum pondus augeretur. Quae cum ita ſint, ratio longitudinis ad latitudinem et profunditatem non vltra datum terminum extendi poterit; qui ab experientia eſt petendus.

§. 693. Hanc igitur nacti ſumus regulam, vt naues, quae remis propelli debent, tam fiant longae, quam earum robur ad conſeruationem requiſitum admittit. Quodſi autem experientiam conſulamus, patebit nauibus ſufficiens robur adhuc conciliari poſſe, ſi longitudo ad latitudinem teneat rationem ſextuplam ſiue ſeptuplam, ac fortaſſe hanc rationem ad decuplam vsque, ſi neceſſitas exigat, extendere licet. Pendet hoc praecipue a robore ligni quod ad conſtructionem nauium adhibetur eiusque pondere, quae, cum ad calculum reuocari nequeant, omnino per experientiam determinari debebunt. Quod vero ad profunditatem attinet, ea

Digitized by Google

ea ſemiſſem latitudinis ſuperare haud poteſt; quinimo expediret profunditatem adhuc minorem accipi, quo nauis facilius omnibus tempeſtatum impetibus reſiſtere poſſit. Maxime autem haec cautela erit obſeruanda, ſi centrum grauitatis nauis non ſolum ſupra centrum magnitudinis carinae, ſed etiam ſupra aquae ſuperficiem cadat; qua de re ea conſuli debebunt, quae ſupra de ſtabilitate nauium fuſius ſunt tradita.

§. 694. Poſtquam, quantum fieri poteſt, elongata naui eius ſectio ampliſſima bb ad minimum valorem eſt perducta, reſiſtentia vlterius vehementer diminui poteſt, dum latera nauis in prora oblique coeunt, atque in aciem vel cuſpidem conformantur. Videmus enim in ſuperiori libro reſiſtentiam eo reddi minorem, quo acutior efficiatur prora. Triplici vero modo coarctatio prorae anteriora verſus fieri poteſt; primo ſcilicet ſeruata carinae vbique eadem profunditate latitudo continuo magis diminuitur, quoad, latera in aciem verticalem coeant. Secundo latitudo carinae eadem manere poteſt, dum fundus nauis paulatim eleuatur, donec ſuperficiem aquae attingat. Tertia contractio, quae plerumque in nauibus adhibetur, ex vtraque praecedentium eſt compoſita, atque fit tam latitudinem carinae quam eius profunditatem diminuendo, donec in ſuprema aquae ſuperficie tam latitudo quam profunditas carinae ſimul euaneſcat.

§ 695. In qualibet coarctatione infinita varietas locum habere poteſt; primum ſcilicet longitudo prorae inter ſectionem ampliſſimam et extremitatem in ſuperficie aquae magnum diſcrimen affert; quo lentius enim prora clauditur, eo minor fit eius reſiſtentia ceteris paribus. Deinde

Digitized by Google

inde maxime ſpectanda eſt linea, ſecundum quam tam latera nauis coeunt, quam ſpina ſurſum inflectitur, vtrum ſit recta an curua, hincque innumerabiles diuerſae figurae prorae naſcuntur, vti in primo capite huius libri expoſuimus. Denique ex his omnibus figuris ea inueſtigari poſſet, quae minimam creet reſiſtentiam, ſub datis conditionibus, quemadmodum in praecedente libro plura huius generis problemata extant ſoluta. Quoniam vero in praxi ſumma geometrica accuratio ad effectum deduci non poteſt, ſufficiet praecipuas prorae ſpecies generatim perpendiſſe, et quantum fructum ex ſingulis ſperare liceat, definiuiſſe.

Tab. XIX. fig. 3 §. 696. Species itaque ſimpliciſſimas trium memoratorum generum prorae contemplabimur, quae non niſi lineis rectis contineantur, cum ex his indoles diminutae reſiſtentiae non ſolum facillime perſpiciatur, ſed etiam ſi curvae lineae ingrediantur, ſatis prope aeſtimari queat, praecipue, ſi in ſubſidium vocentur ea, quae in ſuperioris libri capite ſexto integro hac de re fuſius expoſuimus. Sit igitur ſectio ampliſſima $EFfe$ parallelogrammum rectangulum, a qua prora claudatur in rectam verticalem Aa, ita vt figura prorae ſit priſma baſin habens triangularem aef. Sit latitudo carinae maxima $EF = 2b$, profunditas $Cc = c$, erit area ſectionis ampliſſimae carinae $= 2bc$, quam ſupra poſuimus $= bb$. Et cum ff nobis conſtanter denotet planum, quod directe contra aquam motum eandem patitur reſiſtentiam, quam nauis eadem celeritate mota, foret vtique $ff = bb = 2bc$, ſi longitudo prorae AC euaneſceret; tum enim nauis ipſa ſuperficie $EFfe$ in aquam incurreret.

§. 697

§. 697. Ponamus iam longitudinem prorae $AC = a$, erit $CAE = CAF$ angulus, ſub quo aqua vtrinque in latera prorae impingit, hinc erit reſiſtentia vnius ſemiſſis $AEea = AE.Aa. \frac{CE^2}{AE^2} = \frac{Aa CE^2}{AE}$, quae cum ſit normalis ad ſuperficiem $AEea$, dabit vim motui nauis directe contrariam $= \frac{Aa.CE^3}{AE^3} = \frac{b^3c}{aa+bb}$; cui cum reſiſtentia ex altera parte orta ſit aequalis, erit reſiſtentia tota $= \frac{2b^3c}{aa+bb}$; ſiue habebitur ſuperficies reſiſtentiam repraeſentans $ff = \frac{2b^3c}{aa+bb}$. Hinc cum ſit $bb = 2bc$ erit $ff = \frac{bb}{aa+bb}.bb$; ex quo reſiſtentia huius prorae erit ad reſiſtentiam ſectionis ampliſſimae, vti bb ad $aa+bb$, hoc eſt vt CE^2 ad AE^2. Quo longior itaque ſtatuitur prora AC eo magis reſiſtentia nauis diminuitur, hocque in ratione duplicata laterum AE, manente ſectione carinae ampliſſima $EFfe$ eadem.

§. 698. Si igitur longitudo AC capiatur aequalis ſemiſſi latitudinis CE, tum reſiſtentia nauis iam ſit duplo minor; quam ſi nauis nuda ſuperficie $EFfe$ in aquam irrueret: ſin autem AC capiatur aequalis toti latitudini EF reſiſtentia naſcitur quintuplo minor; decuplo autem minor erit reſiſtentia, ſi ſit $AC = 3\,CE$. Quodſi autem vt fere conſuetudo praecipit, ſtatuatur $AC = 4\,CE = 2\,EF$, fiet reſiſtentia decem et ſeptem vicibus minor. Interim tamen tanta reſiſtentiae diminutio in praxi non eſt expectanda, cum quia latera nauis non poſſunt fieri politiſſima, vti hic aſſumuntur, tum vero propter aquae tenacitatem, quae implicat reſiſtentiae ſpeciem, quae aucta prorae ſuperficie augetur potius, quam diminuitur. Denique ſi prorae nauis eiusmodi tribuatur forma, vti deſcripſimus tum

Digitized by Google

aqua nullam vim naui inferet ſurſum vrgentem; ideoque a reſiſtentia aquae nauis non inclinabitur circa axem latitudinalem, quod commodum in nauibus remorum ope propellendis maximi momenti videri queat.

§. 699. Cum enim in hoc nauium genere nulla adſit vis reluctans vi aquae proram nauis eleuanti, iſta prorae ſtructura huic ſcopo aptiſſima videtur; neque vllum dubium ſuper eſſet, ſi modo nauis perpetuo ita progrederetur vt baſes AEF et *aef* horizontalem ſitum conſeruarent. Quoniam autem hoc minime ſperari poteſt, commodum memoratum ingenti incommodo coniungitur: ſtatim enim ac nauis tantillum inclinatur, prora vi non contemnenda eleuabitur, cum ante nulla adeſſet, hincque cum vis contranitens nulla adſit, nauis ſubito inclinabitur, atque adeo, dum prora eleuatur, vis illa eleuans augebitur; ex quo cum ſitus nauis obliquus, tum ſuccuſſiones et reciprocationes violentae naſcentur, vnde nauis in mari turbido praeſertim periculo pereundi obnoxia futura eſſet; cuiusmodi incommodum nullo modo ab hoc genere nauium removeri poteſt.

§. 700. Huiusmodi ergo prorae figura admitti nequit, niſi aqua ſit admodum tranquilla, ita vt nauis et raro et parum de ſitu erecto deturbetur. In mari vero et aqua minus quieta iſta ſpecies adhiberi non poteſt, ſed eiusmodi figura requiritur; quae mutato ſitu non tantam reſiſtentiae alterationem patiatur. Contemplemur itaque ſecundam ſpeciem, in qua prora ſurſum tantum contrahitur. Scilicet exiſtente carinae ſectione ampliſſima EF*fe* parallelogrammo rectangulo, conuergat prora in aciem horizontalem BD, ita vt prora ſit priſma triangulare baſes habens

Tab. XIX. fig. 4.

habens verticales BEe et DFf. Quodſi iam haec nauis directe ſecundum CA in aqua progrediatur, ſola facies BDfe reſiſtentiam patietur; quae adverſus aquam incurrit ſub angulo CAc, cuius ſinus eſt $= \frac{Cc}{Ac} = \frac{Ee}{Be}$. Reſiſtentia ergo huius prorae ſe habebit ad reſiſtentiam ſectionis ampliſſimae EFfe, quam ponimus $= bb$, vti Ee^2, ad Be^2. Quare ſi planum, quod parem reſiſtentiam patitur, ponatur $= ff$ erit $ff = \frac{Ee^2}{Be^2}\, bb$.

§. 701. Ponamus vt ante latitudinem nauis $EF = 2b$, ſiue eius ſemiſſem $CE = b$; profunditatem ſectionis ampliſſimae $Ee = c$, erit $bb = 2bc$. Sit porro prorae longitudo $AC = a$, erit $Be^2 = aa + cc$, hincque reſiſtentia huius prorae erit $= \frac{cc}{aa+cc}.\, bb$, quae ergo aequalis erit reſiſtentiae prorae primo loco conſideratae, ſi fuerit $c = b$, ſeu ſi profunditas carinae aequetur ſemiſſi ipſius latitudinis. Quae ratio inter latitudinem ac profunditatem, cum fere in omnibus nauibus ob ſeruetur, ſiue prora contrahatur priori modo ſiue hoc poſteriori, pro eadem longitudine eadem oritur reſiſtentiae diminutio. Videmus autem ſupra profunditatem c ſemiſſem latitudinis b ſuperare non poſſe, atque adeo ſtabilitati nauium maxime conſuli, ſi profunditas c adhuc minor ſtatuatur. His igitur caſibus pro eadem prorae elongatione magis reſiſtentia diminuetur, ſi prora ſurſum contrahatur, quam ſi tantum ſecundum latera coarctetur, in qua contractione prima ſpecies verſabatur.

§. 702. Praecipuum autem diſcrimen, quod inter proram huius ſpeciei ac praecedentis intercedit, conſiſtit in vi, qua prora ſurſum vrgetur, quae in priori ſpecie erat nulla,

in hac autem ad reſiſtentiam eo maiorem habet rationem, quo longior ſtatuatur prora. Cum enim vis aquae incurrentis in planum BD*fe* ſit vt BD . B*e* . $\frac{Ee^2}{Be^2} = \frac{2bcc}{\sqrt{(aa+cc)}}$, huiusque directio ſit normalis ad planum BD*fe*, ac per eius centrum grauitatis R tranſeat, exiſtente AR $= \frac{2}{3}$ AC. Ex hac vi, praeter reſiſtentiam horizontalem naſcitur vis proram verticaliter eleuans $= \frac{2abcc}{aa+cc}$, in directione RS exiſtente AS $= \frac{2}{3}$ AC $= \frac{2}{3} a$. Quoniam igitur horizontalis vis, qua motus nauis directe impeditur, eſt $= \frac{2bc^3}{aa+cc}$, erit conſtanter vis proram eleuans, ad vim motui nauis reluctantem in ratione $a:c$, ſeu vti longitudo prorae BE ad profunditatem E*e*. Haec autem vis nauem eleuans aequatur ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= \frac{2abccv}{aa+cc}$, exiſtente v altitudine debita celeritati, qua nauis progreditur.

§. 703. Quia vis nauem eleuans $\frac{2abccv}{aa+cc}$ a celeritate nauis: haec vero a vi propellente pendet, ponamus vim nauem propellentem eſſe $=$ P; eritque $\frac{2bc^3v}{aa+cc} =$ P; vnde vis nauem eleuans erit $= \frac{aP}{c}$. Quamobrem vis navem propellens eſt ad vim, qua prora ab aqua ſurſum vrgetur, vti profunditas E*e* ad longitudinem prorae AC. Ab hac ergo vi nauis primo quaſi leuior redditur, ac volumen aquae ſubmerſum diminuitur. Deinde vero, ad quem effectum maxime ſpectari oportet, ab hac vi navis circa axem latitudinalem inclinatur aſcendente prora; huiusque momentum, quo magis augetur prorae longitudo, duplicem ob cauſam creſcit, primo ſcilicet ob auctam ipſam vim eleuantem $\frac{aP}{c}$, tum vero etiam ob eius maiorem remotionem a centro grauitatis nauis.

§. 704.

§. 704. Si duo expoſita prorae genera in vnum coaleſcant, naſcitur genus tertium, quo prora tum ſecundum latitudinem quam profunditatem ſimul coarctatur et in cuſpidem A terminatur: vbi quidem notandum eſt, hic non de tota prora, ſed tantum de eius parte in aqua verſante eſſe ſermonem, ita vt ſuperficies aquae ſupremum terminum AEF prorae conſtituat. Quanquam ad hoc genus innumerabiles ſpecies pertinent, tamen caſum vnicum ſimpliciſſimum hic contemplabimur, quo ſectio ampliſſima eſt triangulum iſoſceles EcF, e quo prora in mucronem A contrahatur, ita vt eius figura ſit pyramis triangularis $AEFc$. Ponamus longitudinem $AC = a$. Semiſſem latitudinis $CE = CF = b$, et profunditatem $Cc = c$; erit propter aream baſis $EcF = bc$ ſoliditas totius prorae $= \frac{1}{3}abc$. Atque dum haec prora directe in aqua mouetur, reſiſtentiam patientur binae facies laterales AEc et AFc inter ſe ſimiles et aequales, ex quo reſiſtentia vtrinque erit eadem.

§. 705. Haec igitur prora ab alliſione aquae duplicem ſuſtinebit vim, quarum altera eſt horizontalis motuique reſiſtens, altera verticalis. Prior vis aequiualet ponderi maſſae aqueae, cuius volumen eſt $= \frac{b^3c^3v}{aabb + aacc + bbcc}$; vnde nauis tantam patietur reſiſtentiam, quantam pateretur ſuperficies plana $ff = \frac{b^3c^3}{aabb + aacc + bbcc}$, directe et eadem celeritate contra aquam mota. Cum igitur ſit ſectio ampliſſima $bb = bc$, erit $ff = \frac{bbcc}{aabb + aacc + bbcc} \cdot bb$. Quodſi ſumatur vti fere fert conſuetudo, $c = b$, erit $ff = \frac{bb}{2aa + bb} bb$; cum igitur poſito $c = b$ ſit in vtroque praecedente prorae genere $ff = \frac{bb}{aa + bb} bb$, manifeſtum eſt proram

ad hoc tertium genus relatam minorem pati reſiſtentiam: et quidem ſi ſit $a = 4b$, erit pro hoc genere tertio $ff = \frac{1}{33}bb$, cum pro vtroque praecedentium ſit $ff = \frac{1}{17}bb$, ita vt reſiſtentia praeſenti caſu fere duplo ſit minor quam in praecedentibus.

§. 706. Altera vis nauem ſurſum ſollicitans in libro ſuperiori (630) reperta eſt valere pondus voluminis aquae $= \frac{ab^3 cc v}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$; huiusque vis directio verticalis RS tranſit per rectae AC punctum S ita vt ſit $AS = \frac{2aa + cc}{3a}$ et $CS = \frac{aa - cc}{3a}$, qua vi nauis cum leuior redditur, tum prora eleuatur puppi magis ſubmerſa. Ceterum haec vis nauem ſurſum vrgens ſe habet ad reſiſtentiam vti a ad c ſeu vti AC ad Cc. Quare ſi P fuerit vis nauem propellens, erit $P = \frac{b^3c^3v}{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$, hincque fiet vis nauem in directione RS ſurſum vrgens $= \frac{aP}{c}$; quae eſt eadem ratio inter vim propellentem et vim eleuantem quam caſu praecedente inuenimus.

§. 707. Ex his trium prorae generum caſibus ſimpliſſimis, quos hic euoluimus, ſatis prope colligere poterimus, quomodo pro quauis prorae figura propoſita tam reſiſtentia quam vis nauem eleuans ſit comparata. Quamvis enim figurae curuilineae, quae cum ſectioni ampliſſimae tum contractioni prorae tribuuntur, calculum maxime varient, ac ſaepenumero vix ſuperabilem reddant, tamen determinationes inde manantes a coniecturis, quas ex conſideratione caſuum tractatorum elicere licet, tantopere non abhorrebunt, vt iis in noſtro inſtituto acquieſcere nequeamus. Colligemus autem ex tribus caſibus allatis regulas quasdam generales, quarum ope vtrumque reſiſten-

tiae

tiae effectum pro quacunque prorae figura propoſita, tam exacte exiſtimare poterimus, quantum ad praxin, ad quam hic ſolum attendimus, ſufficit.

§. 708 In omni igitur prora ante omnia ratio contractionis, qua latera a ſectione ampliſſima ad extremitatem vsque conuergunt nauemque claudunt, ſpectari debet; quae duplex eſt. Vel enim prora vtique eandem ſeruat profunditatem, et ſecundum latitudinem tantum contrahitur, quemadmodum fit in caſu primum tractato, vel prora vbique eandem conſeruat latitudinem, et ſecundum profunditatem tantum contrahitur, quemadmodum fit in caſu ſecundo Hucque referimus omnes caſus, ſiue contractiones iſtae fiant ſecundum lineas rectas, vti aſſumſimus, ſiue ſecundum lineas curuas quaſcunque. In priori contractione prorae omnes ſectiones horizontales inter ſe ſint aequales et ſimiles; in poſteriori autem ſectiones verticales ſecundum longitudinem factae aequalitatem inter ſe ſeruant: vtroque vero caſu ſectiones verticales ſecundum latitudinem factae continuo decreſcunt, quoad tandem in extremitate prorae penitus euaneſcant.

§. 709. Si ſectiones horizontales omnes a ſuperficie aquae deſcendendo ſint inter ſe aequales vti fit in ſpecie prima ab alliſione prorae aduerſus aquam nulla omnino naſcitur vis verticalis, qua nauis ſurſum vrgeretur. Sed tota vis ab aqua excepta directionem habebit horizontalem, quae tota ad motum nauis retardandum impenditur. In huiusmodi igitur prorae figura ſectiones verticales ſecundum longitudinem nauis factae a medio AC ad latera recedendo continuo decreſcunt, quoad tandem in extremitatibus E et F euaneſcant. Eo minor autem erit reſiſtentia, quo vehementius iſtae ſectiones decreſcunt; hoc eſt

quo

quo maior fuerit ſectio diametralis A C *c a* pro eadem nauis latitudine: ex quo intelligitur eo magis reſiſtentiam diminui, quo longior ſtatuatur prora pro eadem ſectione ampliſſima.

§. 710. Si ſectiones verticales ſecundum longitudinem factae omnes ſint inter ſe aequales, ſectiones autem horizontales a ſuperficie aquae deſcendendo continuo decreſcant reſiſtentia aquae propemodum vti in praecedenti caſu eo magis diminuitur, quo maior capiatur prorae longitudo. Verum inſuper ex alliſione aquae reſultat vis verticalis nauem cum ſubleuans, tum circa axem latitudinalem inclinans. Atque vis iſta eo maior euadit, quo magis per elongationem prorae reſiſtentia diminuitur: tenet enim iſta vis ad vim totam, qua nauis propellitur, rationem fere vti longitudo prorae ad ipſius profunditatem, niſi quatenus iſta ratio ab incuruatione prorae variatur. Momentum ergo, quod ex hac vi oritur ad nauem inclinandam erit fere in duplicata ratione longitudinis prorae, quemadmodum ſupra iam innuimus.

§. 711. Omnis igitur prorae figura, quae quidem concipi poteſt, vel ad alterutram formam expoſitam eſt comparata, vel vtraque contractionis ratio ſimul in ea deprehenditur; prorae autem, in quibus alterutra contractio ſola in eſt, hoc laborant incommodo, quod ſubitanea mutatio in effectu ex alliſione aquae nato oriatur, quam primum ſiue directio nauis ſiue fluctuum vel tantillum mutetur. Si enim prora ad primum genus pertinens pauxillum eleuetur, naſcitur vis ab aqua in fundum incurrente ſurſum vrgens, cum ante nullá eiusmodi vis adeſſet; prora autem ad alterum genus relata, ſi parumper a curſu directo

Digitized by Google

directo declinet, vel fluctus a latere impingant, ſubito naſcetur vis lateralis. Quare cum iſtiusmodi mutationes per ſaltum factae motum nauis vehementer turbent, in iis tollendis opera maxime erit collocanda. Hincque in praxi iſta regula maximi eſt momenti, quae in ſuperficie nauium omnes angulos vetat, et aequabilem curuaturam vbique requirit.

§. 712. In huiusmodi autem prorae figura, angulis ac ſubitaneis incuruationibus carente, vtriusque generis coarctatio ſimul ineat, atque tam ſectiones horizontales a ſuperficie aquae deorſum deſcendendo, quam verticales ſecundum longitudinem nauis factae a medio ad latera recedendo continuo decreſcent. Aqua igitur in huiusmodi proram incurrens duplicem exeret effectum, reſiſtentiam et vim verticalem: ex allatis autem facile colligitur, reſiſtentiam eo magis diminui, quo longius prora producatur; reſiſtentia vero hoc modo diminuta alteram vim ſurſum vrgentem augeri, eamque fere ad vim nauem propellentem ſequi rationem, quam habeat longitudo prorae ad ipſius profunditatem. Vtrumque autem effectum in libro ſuperiore accurate definiuimus, vnde ſi neceſſitas exigat, depromere licebit; ad praeſens vero inſtitutum hae generaliores obſeruationes ſufficient.

§. 713. Cum igitur in nauibus, quae remis propelluntur iure requiri ſoleat, vt vel a data vi celerrime promoueantur, vel data celeritas ipſi a minima vi inducatur, manifeſtum eſt huic requiſito maxime ſatisfieri, ſi prora fiat quam longiſſima. Supra vero iam quaedam incommoda commemorauimus, quibus prorae nimis longae ſint obnoxiae: vidimus enim §. 681. quo longior ſtatu-

atur prora, puppim quoque ſimul produci oportere, tum vero vt nauis ruptioni ſufficienter reſiſtat et proram et puppim ligno nimium onerari ac ponderoſam reddi debere: quo fit vt nauis minorem onerum copiam capiat, eorumque idoneae diſpoſitioni refragetur. Hinc porro profunditas carinae augebitur, ad quam cum latitudo nauis datam tenere debeat rationem, nauis ſimul latior effici deberet; hocque adeo pacto nauis non ſolum elongaretur, ſed auctis ſingulis dimenſionibus, maior omnino nauis reſultaret, ad quam propellendam eo ipſo maior vis requireretur.

§. 714. His igitur rationibus pro data nauis profunditate ſub aqua, a qua eius latitudo iam determinatur, terminus ſeu limes praeſtituitur, quem nauis longitudo ſuperare nequeat. Qui terminus pro variis nauium generibus multum variare poteſt, quippe qui pendet partim ex robore, quod nauis habere debet, partim a figura carinae, partim a ſcopo, cui nauis deſtinatur, quae res ita ſunt comparatae, vt non niſi per experientiam determinari posſint. Praeter has autem rationes nunc perpendi debet vis illa, qua nauis ab alliſione aquae ſurſum vrgetur, quae vis eo maior euadit, quo longior prora ſtatuitur. In nauibus enim, quae ſolis remis propelluntur, nulla adeſt vis, quae illi actioni aquae reluctetur, eiusque effectum impediat: etenim, quoniam remi in ſuperficie aquae vibrantur, a qua centrum grauitatis non admodum diſtat, a vi remorum vix ſenſibile naſcetur momentum, quo prora deorſum deprimatur, atque actioni illi aquae occurratur.

§. 715. In triremibus ergo omnibusque nauibus, quae remis ad motum incitantur, vi illi verticali aquae proram eleuanti libera relinquitur agendi poteſtas. Effectum ita-

itaque iſta vis exeret duplicem: primo ſcilicet totam nauem reddet leuiorem, tantam partem ab ipſius pondere adimendo, quanto ponderi ipſa illa vis aequatur: qui effectus vtique non eſt eiusmodi, vt naui damnum afferre queat, quin potius frequenter non ſpernendam vtilitatem addit, dum ob minutam carinam ipſam reſiſtentiam diminuit. Neque igitur opus eſt, vt iſtum effectum deſtruere annitamur. At vero alter effectus huius vis conſiſtit in inclinatione nauis circa axem latitudinalem, circa quem nauis, nulla vi externa obluctante, tantum inclinabitur, quantum ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis permittit; atque omnino neceſſe eſt vt huius effectus ratio habeatur, cum ex nimia inclinatione nauis certum damnum patiatur.

§. 716. Quo igitur angulum cognoſcamus, ad quem vis aquae verticalis nauem de ſitu recto actu inclinabit, momentum iſtius vis reſpectu axis latitudinalis vna cum ſtabilitate reſpectu eiusdem axis contemplari oportet; momentum enim illius vis diuiſum per ſtabilitatem dabit angulum inclinationis ſeu potius ipſius ſinum poſito ſinu toto $= 1$. Namque hunc angulum tam paruum accipio, vt cum ſinu facile confundi poſſit; id quod in omnibus angulis, quos nauis ſine periculo ſuſtinere poteſt, ſine ſenſibili errore aſſumere licet. Quodſi enim angulus inclinationis tantus prodiret, vt enormiter a ſuo ſinu diſcreparet, tum eo ipſo ſtructura nauis tantae inclinationi obnoxia eſſet reiicienda. Quamobrem ſi momentum vis aquae verticalis reſpectu axis latitudinalis ponatur $= Q$, atque ſtabilitas nauis reſpectu eiusdem axis $= F$, dabit $\frac{Q}{F}$ ſinum ſeu ipſum angulum inclinationis, ad quem nauis e ſitu directo inclinabitur.

Digitized by Google

§. 717. Ad hanc formulam euoluendam ponamus vim qua nauis propellitur $= P$; ſit porro longitudo prorae $= a$ eiusque profunditas ſub aqua $= c$, erit vti ſupra vidimus vis aquae verticalis $= \frac{aP}{c}$; quae expreſſio etſi tantum in caſibus ſimpliciſſimis ante expoſitis locum habet, tamen ea in praeſenti inſtituo vti poterimus, quoniam non ipſam hanc vim abſolutam, ſed tantum quantitatem ipſi proportionalem ſpectamus; hinc autem tuto aſſumere licet, quo magis prora elongetur, in eadem ratione vim illam aquae verticalem augeri. Quodſi iam aſſumamus centrum grauitatis nauis in ſectionem ampliſſimam incidere, erit diſtantia huius vis a centro grauitatis proxime longitudini prorae a proportionalis, ex quo momentum iſtius vis ad nauem inclinandam Q erit vti aaP, ſiue quadrato longitudinis prorae erit proportionale proxime.

§. 718. Si igitur ſectio nauis ampliſſima maneat eademque vis nauem propellens P ſtatuatur, erit pro diuerſis prorae longitudinibus momentum vis aquae inclinationem nauis producens in ratione duplicata longitudinis prorae a, proxime: ſi quidem figura prorae externa, aucta minutaue longitudine eiusdem maneat ſpeciei. Praeterea autem quo iſta ratio minus a veritate diſſentiat, longitudinem prorae iam ſatis magnam prae eius profunditate poni oportet. Cum enim in caſu §. 706. tractato ſit diſtantia vis aquae verticalis a ſectione ampliſſima $= \frac{a}{3} - \frac{cc}{3a}$, quae in ipſam vim ducta praebet eius momentum exiſtente a longitudine et c profunditate prorae: manifeſtum eſt niſi a multum excedat c hanc diſtantiam longitudini prorae proportionalem cenſeri omnino non poſſe. Quoniam igitur hic proras diuerſae longitudinis inter ſe comparare conſti-

tui-

tuimus, longitudo breuiſſimae multo maior exiſtat, quam profunditas carinae c, neceſſe eſt.

§. 719. Niſi igitur ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis pro aucta prorae longitudine creſcat in eadem ratione duplicata vel maiore; angulus inclinationis circa axem latitudinalem maior euaderet, quo magis elongaretur prora. Quodſi eueniret, duplex incommodum elongationem prorae vitiaret, ac damnoſam redderet; primo enim aucta inclinatio per ſe maxime eſt vitanda. Tum vero, etiam ſi inclinatio maneret eadem, tamen in prora longiori mox fieret periculoſa. Aucta enim longitudine prorae, in eadem ratione ſpatium, quo extremitas nauis vel eleuaretur vel deprimeretur, creſceret; hincque tandem puppis, niſi ſit altiſſima, penitus ſubmergeretur. Quamobrem ne elongatio prorae damnum afferat, neceſſe eſt vt ſtabilitas F in maiore quam duplicata longitudinis prorae ratione creſcat.

§. 720. Inquiramus igitur in rationem illam, in qua ſtabilitas nauis aucta longitudine creſcit. Sit pondus totius nauis $= M$, volumen aquae ſubmerſum $= V$, eleuatio centri grauitatis nauis ſupra centrum magnitudinis carinae $= g$ atque momentum ſectionis aquae reſpectu axis horizontalis ſecundum latitudinem nauis per ipſius ſectionis aquae centrum grauitatis ducti ſit $= K$; his poſitis ſupra vidimus fore ſtabilitatem nauis reſpectu axis latitudinalis $= M(\frac{K}{V} - g)$. Quodſi ergo aſſumamus ambo illa centra grauitatis nauis et magnitudinis carinae in ſe inuicem incidere, vel minime inter ſe diſtare, quae hypotheſis a veritate non multum abhorrebit, quantitas g, reſpectu valoris $\frac{K}{V}$ facile reiici poterit: atque cum ſit M ipſi V proportiona-

tionale, erit ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis vti K, momentum ſectionis aquae.

Tab. XX. fig. 1. §. 721. Conſideremus ergo duas aquae ſectiones AEBF et $aEbF$, quae communem habeant latitudinem EF; quae ſimul per centrum grauitatis vtriusque ſectionis aquae C tranſeat, vicemque axis latitudinalis ſuſtineat, cuius reſpectu momentum ſectionis aquae vtriusque eſt inueſtigandum: quem in finem ponamus in vtraque ſectione aquae medietates anteriores AEF, aEF ſimiles et aequales poſterioribus BEF, bEF. Iam quia momentum ſectionis aquae K inuenitur, ſi ſingula ipſius elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe EF multiplicentur haecque producta omnia in vnam ſummam coniiciantur. Sumamus in ſectione aquae AEBF elementum MNNM, rectis infinite propinquis MM et NN, et axi EF parallelis abſciſſum: cuius cum ſingulae particulae ab axe EF aequaliter diſtent, ex hoc elemento naſcetur totius momenti quaeſiti differentiale $= MM.PQ.CP^2$; ex quo momentum ſectionis aquae AEBF erit $= \int MM.PQ.CP^2$.

§. 722. Sit iam relatio inter ſectionem aquae longiorem $aEbF$ et breuiorem AEBF ita comparata, vt longior per elongationem ex breuiori naſcatur. Scilicet ductis ordinatis ad axem EF normalibus RMm, SNn, ſit ratio inter $RM : Rm$ et $SN : Sn$ vbique eadem, et aequalis rationi $CA : Ca$. Quodſi ergo in ſectione longiore capiatur elementum $mnnm$ reſpondens elemento MNNM breuioris, ita vt ſit $mm = MM$ et $nn = NN$, erit $Cp : CP = Ca : CA$; et $pq : PQ = Ca : CA$; ideoque $Cp = \frac{Ca}{CA} . CP$ et $pq = \frac{Ca}{CA} . PQ$. Cum igitur momentum huius ſectionis longioris reſpectu axis EF ob rationes ſimi-

les

les ſit $= \int mm . pq . Cp^2$ erit hoc momentum $= \frac{Ca^3}{CA^3} \int MM . PQ . CP^2$. Ex hisque erit momentum ſectionis aquae longioris $aEbF$ ad momentum ſectionis breuioris AEBF in ratione Ca^3 ad CA^3; ſcilicet haec momenta erunt in ratione triplicata longitudinum prorae.

§. 723. Cum igitur ſtabilitas nauis F ceteris paribus ſit vt cubus a^3 longitudinis prorae, momentum autem nauem inclinans Q ſit tantum vt quadratum a^2, erit angulus inclinationis nauis $\frac{Q}{F}$ vt $\frac{1}{a}$ hoc eſt reciproce vt longitudo prorae. In nauibus ergo diuerſae longitudinis extremitates prorae ac puppis per aequalia ſpatia ſiue eleuabuntur ſiue deprimentur. Neque igitur ex hoc capite opus eſt, vt in nauibus longioribus prora ac puppis altiores extruantur quam in breuioribus, ſed eadem altitudo pro quauis longitudine tuto retineri poteſt. Cum ergo haec ratio proras quantumuis longas non prohibeat, vtique conueniet in nauibus remis propellendis proram tam longam efficere, quantum rationes ſupra allegatae id permittunt; hocque modo reſiſtentia nauis maxime diminuetur.

§. 724 Per praxin ergo maxima prorae longitudine, quam quidem nauis ſuſtinere queat, determinata contractio prorae antrorſum idonea atque ad praxin accommodata eſt eligenda, quae cum inaequalitatibus ſubitaneis careat tum etiam minimam reſiſtentiam patiatur. Atque in hac indagatione in ſubſidium vocari poſſunt, quae ſuperiori libro de figuris, quae ſub datis conditionibus minimam reſiſtentiam recipiunt, ſunt eruta. Imprimis autem e re erit figuram prorae eiusmodi ſeligere, quae minimam ab aqua recipiat vim verticalem, quo nauis minorem inclinationem ſubeat. Quamuis enim in aqua tranquilla inclinatio

natio ſine vllo periculo eſſe videatur, tamen in aqua fluctibus turbata, dum aqua mox ſeſe prorae ſubducit, mox multo maiori copia irruit, a minima inclinatione vehementes perturbationes in ſtatu nauis erecto proficiſcuntur, quae eo maiores erunt, quo ſenſibilior fuerit inclinatio naturalis in aqua tranquilla orta.

§. 725. Quoniam prora, cuius ſingulae ſectiones horizontales ſunt inter ſe aequales, ab aqua nullam excipit vim verticalem; etſi praxis hanc figuram reſpicit, tamen manifeſtum eſt, vim verticalem eo magis diminutum iri, quo propius prorae figura ad hanc ſpeciem accedat. Cum igitur in iſta ſpecie ſectio ampliſſima ſit rectangulum, conuenit ſectionibus verticalibus vbique deorſum eandem fere latitudinem relinqui, easque ſatis repente incuruari et cum ſpina coaptari, ita vt fundus nauis non multum a ſuperficie plana diſcrepet. Deinde eundem ſcopum eo magis aſſequemur, ſi ſpina non pedetentim, ſed ſatis ſubito in extremitate prorae demum aſcendat, et ſupra ſuperficiem aquae promineat. His autem regulis non obſtantibus latitudo antrorſum ita ſenſim diminui poteſt, vt reſiſtentiae aquae maxima vis adimatur.

§. 726. Quae igitur hactenus circa conſtructionem nauium remorum ope propellendarum ſunt praecepta, ea praeter regulas generales in conſtructione nauium obſeruandas huc redeunt vt primo maxima longitudo, quam nauis ſuſtinere queat, ipſi tribuatur, ac puppis prorae ratione longitudinis non nimis diſſimilis ſtatuatur, quo axis nauis verticalis per centrum grauitatis ductus ſimul per centrum
Tab. XX. fig. 1. grauitatis ſectionis aquae proxime tranſeat. Tum ſectioni aquae *a*E*b*F eiusmodi detur forma, quae antrorſum ſatis lento

lente conuergat, ita vt reſiſtentia, quam ipſa haec ſuperficies in directione C*a* mota pateretur, tam fiat parua, quam aequabili curuatura fieri poteſt. Huic ergo requiſito ſatisfiet, ſi curuae lineae *a*E et *a*F quam minime a chordis rectis *a*E et *a*F diſtent; hoc enim modo obliquitas aquae incurrentis vbique propemodum erit eadem, atque alliſio directa ſeu ad directam accedens maxime euitatur. Quo magis autem ſectio aquae ad reſiſtentiam minuendam fuerit accommodata, tum ipſa prora tota eo minori reſiſtentiae erit obnoxia, eo quod ſectiones horizontales deorſum captae vix ſenſibiliter coarctari debent.

§. 727. Sectio igitur verticalis ſecundum longitudinem nauis facta vsque ad extremitates fere A et B eandem profunditatem retinebit, tum vero ex A in *a* ſatis ſubito inflectetur vt a ſitu verticali tam parum diſcrepet, quantum curuedo aequabilis permittit. Denique ſectionem ampliſſimam *f*FCE*e* minime a figura rectangulari differre oportebit; ita vt tantum anguli in E et F obtundantur, atque in aequabilem figuram reducantur. Quodſi autem hoc modo tres ſectiones nauis principales fuerint determinatae, tota figura definietur vel ſtatuendo omnes ſectiones horizontales ſectioni aquae affines, vel iſtam affinitatem in omnes ſectiones verticales ſectioni ampliſſimae parallelas introducendo. Vtroque modo figura fere eadem reſultabit, quae in aqua mota cum reſiſtentiam minimam patietur, tum vero ſimul ab aqua minimam vim verticalem excipiet; quae ſunt duo requiſita nauibus remorum ope propellendis maxime propria. Fig. 2. Fig. 3.

Cap. IX.

DE VI, QVAM VENTVS IN VELA EXERIT.

§. 728.

Quae hactenus de vi aquae in nauis ſuperficiem incurrentis ſunt expoſita, eadem ad vim venti contra datam ſuperficiem irruentis transferri poſſunt, obſeruata ratione grauitatis ſpecificae inter aquam et aerem. Quemadmodum enim vis aquae in datam ſuperficiem impingentis reducta eſt ad pondus determinati cuiusdam voluminis aquae; ita ſimili modo vis venti reducetur ad pondus paris voluminis aeris. Cum igitur aer ſit fere octingenties leuior quam aqua, eadem determinatio vis, quae ab allapſu aquae proficiſcitur, pro vento valebit, ſi in ratione 800 ad 1 diminuatur: ſiquidem et celeritas et obliquitas incidentiae vtroque caſu fuerit eadem. Aſſumemus ſcilicet vim venti pariter ac aquae, proportionalem primo ſuperficiei in quam incurrit, ſecundo quadrato celeritatis, qua irruit, ac tertio quadrato ſinus anguli incidentiae, quippe quas rationes proxime ad veritatem accedere experientia teſtatur.

§. 729. Has ob rationes facile foret eodem modo, quo vim aquae determinauimus, vim venti, quam in vela exerit, definire ſi modo figura velorum, a qua vis potiſſimum pendet, eſſet cognita. Quoniam vero hanc figuram ipſam ante inueſtigari oportet, quam ad vis cognitionem peruenire liceat, haec tractatio aliquanto plus operis requirit, atque nonnulla principia ſtaticae ſingularia poſtulat, ex quibus figurae corporum flexibilium a viribus qui-

Digitized by Google

quibuscunque ſollicitatorum determinari queant. Quo autem ad hanc evolutionem via facilius ſternatur, conueniet primum animum a flexibilitate velorum abſtrahere, eaque tanquam perfecte rigida contemplari. Hancobrem viſum eſt primo loco tabulas rigidas in velorum locum ſubſtituere, quae non obſtante vi venti eandem figuram conſeruent. Atque haec tractatio maxime ſimilis erit ei, qua vim aquae in ſuperficiem quamcunque irruentis definiuimus.

§. 730. Tribuamus primum tabulae rigidae vicem veli ſuſtinentis figuram planam, ſitque haec tabula in ſitu quem tenet firmiter alligata, ita vt de ſuo ſitu a vi venti deturbari nequeat. Repraeſentet recta VC directionem venti per centrum grauitatis tabulae C ductam ſitque celeritas venti debita altitudini v ipſa tabula quieſcente. Concipiatur per directionem venti VC ad planum tabulae duci planum normale, VACB, erit ACV angulus incidentiae ſub quo ventus, quaſi fluuius aereus in tabulam impingit. Sit huius anguli ACV ſinus $= m$, coſinus $= n$ poſito ſinu toto, $= 1$. Porro ponatur planum tabulae $= bb$, atque ex ante expoſitis primo conſtat, mediam directionem vis venti eſſe normalem ad planum tabulae, ac per eius centrum grauitatis B tranſire; quae itaque repraeſentetur recta CW ad planum tabulae in eius centro grauitatis C normali. Huius ergo vis directio CW cum directione venti producta CX conſtituit angulum WCX cuius ſinus $= n$. Tab. XX. fig. 4.

§. 731. Ad quantitatem huius vis venti CW definiendam, primum notandum eſt, ſi directio venti ad planum tabulae eſſet normalis, tum vim venti aequivalituram eſſe ponderi cylindri aerei, cuius baſis ſit ſuperficies

Digitized by Google

tabulae bb, et altitudo aequalis altitudini, celeritati venti debitae v. Ex quo vis venti CW aequalis foret ponderi maſſae aeris, cuius volumen eſt $= bbv$. Iam propter obliquitatem ACV iſta vis diminui debet in ratione duplicata ſinus totius 1 ad ſinum anguli ACV qui eſt $= m$, vnde in propoſito caſu vis venti CW aequabitur ponderi maſſae aereae, cuius volumen $m^2 bbv$. Quodſi ergo pondus voluminis aquei V fuerit $=$ M, pondus voluminis aerei V erit circiter $= \frac{1}{800}$ M. Quo circa vis quam ventus VC in tabulam AB exerit, in directione CW erit $= \frac{m^2 bbv}{800 V}$. M; ita vt haec vis per cognitas virium menſuras poſſit exhiberi. Cenſetur quidem ratio grauitatum ſpecificarum inter aquam ad aerem tantum vt 750 ad 1. At cum hic intelligatur aqua dulcis, pro aqua marina aſſumta ratio 800 ad 1 veritati ſatis erit conſentanea.

§. 732. Quando aduerſus plagam venti curſus eſt inſtituendus, maxime reſpiciendum eſt ad quantitatem anguli WCX; quo maior enim hic angulus exiſtit, eo propius directio vis CW ad plagam venti CV accedit. Nauis autem, ſequi debet curſum in directione CW, ſi vndique eandem reſiſtentiam in motu ſuo offenderet. Verum ob multo maiorem reſiſtentiam laterum quam prorae, directio curſus multo propius ad CV adduci poteſt, quam CW. Videmus autem in caſu praeſente angulum WCX fieri maximum, ſi euadat rectus, quippe quo caſu fit eius ſinus $n = 1$; et directio venti VC radet tabulam ACB velum repraeſentantem. At quoniam hic fit $m = 0$, manifeſtum eſt vim venti ſimul euaneſcere. Erit ergo angulus rectus quaſi aſymtotos anguli WCX, ad quam quantumuis prope accedere, ipſam vero nunquam attingere poterit

poterit. Multo minus autem directio vis CW ad CV propius accedere poteſt, ſi figura veli non ſit plana, vti mox videbimus.

§. 733. Iſta vis venti determinatio autem locum non habet, niſi ſuperficies tabulae fuerit perfecte plana, hoc eſt quaſi politiſſima. Quodſi enim fuerit ſcabra et inaequalitatibus inquinata, vti in *m*, manifeſtum eſt, tam ipſam vim venti CW quam eius mediam directionem maxime turbatum iri, eo quod in qualibet prominentia ventus ſub alio angulo incidit, ex quo eius vis ſimul ac directio magnopere mutatur. Cuiusmodi igitur effectum habiturus ſit ventus in talem ſuperficiem aſperam incidens ex ſequente caſu poterimus colligere. Incidat ventus in directione VC in ſuperficiem quaſi fractam ACB, ita vt in duas ſuperficies planas AC et BC ad C angulum inter ſe conſtituentes impingat, et ad vtramque diuerſam habeat inclinationem. Exhibebunt ſcilicet A et B in ſuperficie imaginaria, plana A*c*B duas eminentias, et angulus ad C ſinum; ideoque hic caſus aptus erit ad vim venti in ſuperficiem aſperam irruentis aeſtimandam etiamſi binas ſuperficies AC et BC planas aſſumamus, quae figuras quascunque habere poſſunt Tab. XX. fig. 5.

§. 734. Sit anguli A*c*V, qui foret angulus incidentiae, ſi figura eſſet plana A*c*B et ſinuoſitate careret, ſinus $= m$, coſinus $= n$: linea recta AB $= c$, quae ſimul latitudinem habeat k, ita vt nunc ſit $= ck$ quod ante erat $= bb$. Porro ſit AC $= a$; et BC $= b$; ſinus anguli CAB $= \alpha$, ſinus anguli CBA $= \beta$; illius anguli coſinus $=$ A et huius $=$ B, erit anguli ACB ſinus $= \alpha B + \beta A$ et coſinus $= \alpha\beta - AB$, hinc erit per trigonometriam $a : b : c = \beta : \alpha : \alpha B + \beta A$, et $cc = aa + bb - 2ab\ (\alpha\beta - AB)$.

 Iam

Iam ventus in partem AC impingit ſub angulo $VCA = VcA - CAc$, cuius ſinus propterea erit $= mA - n\alpha$. Deinde in ſuperficiem alteram BC ventus irruit ſub angulo $VCB = VcB - ABC$, cuius ſinus eſt $= mB + n\beta$. Quodſi ergo ponantur EM et FN mediae directiones harum virium a vento exceptarum, erunt eae primum ad AC et BC normales, tum vero per harum linearum AC et BC puncta media E et F tranſibunt.

§. 735. Si altitudo debita celeritati venti ponatur $= v$, erit vis $EM = (mA - n\alpha)^2 akv$, atque vis $FN = (mB + n\beta)^2 bkv$, vti ante inuenimus; neglecta ratione, qua ad menſuram abſolutam harum virium inueniendam opus eſt. Erit ergo vis EM ad vim $FN = \Box$ ſin. $ACc . AC : \Box$ ſin. $BCc . BC = Ac$. ſin. $ACc : Bc$. ſin. $BCc = \frac{Ac^2}{AC} : \frac{Bc^2}{BC}$, quoniam eſt ſin. ACc : ſin. $BCc = \frac{Ac}{AC} : \frac{Bc}{BC}$. Producantur vires EM et FN donec rectae AB occurrant in e et f erit $Ae = \frac{a}{2A}$ et $Bf = \frac{b}{2B}$; ſitque harum virium media directio gGW et ipſa vis aequiualens GW; quae effectum venti quaeſitum exhibebit. Quamobrem ex natura aequilibrii primum habetur $\frac{eg . Ac^2}{AC} . \frac{AE}{Ae} = \frac{g . Bc^2}{BC} . \frac{BF}{Bf}$ ideoque $eg : fg = \frac{B . Bc^2}{BC} : \frac{A . Ac^2}{AC} = B . BC (mB + n\beta)^2 : A . AC (mA - n\alpha)^2$; et cum ſit $BC : AC = b : a = \alpha : \beta$ erit $eg : fg = \alpha B (mB + n\beta)^2 : A\beta (mA - n\alpha)^2$. Ex hac analogia determinatur punctum g, in quo media directio vis venti in rectam AB incidit. Cum ſit $AE = \frac{1}{2} AC$; et $BF = \frac{1}{2} BC$, erit quoque $eg . \frac{Ac^2}{Ae} = fg . \frac{Bc^2}{Bf}$ vnde facilis conſtructio puncti g reperitur.

§. 736. Quodſi ducatur recta EF, erit ea parallela ipſi AB, ſecetur ea a directione media gGW in puncto

θ erit.

Digitized by Google

o eritque $EO:FO = eg:fg = \frac{Bc^2}{Bf}:\frac{Ac^2}{Ae}$. At ſi directio venti VC ſecet rectam EF in γ erit $Bc:Ac = F\gamma:E\gamma$. Tum vero ſi ex C in EF demittatur perpendiculum Cp erit ob triangula ſimilia $Ae:AE = CE:Ep$, ideoque $Ae = \frac{CE^2}{Ep}$, et propter $Bf:BF = CF:Fp$, erit $Bf = \frac{CF^2}{p\gamma}$. Ex his itaque ſequitur fore $Eo:Fo = \frac{F\gamma^2.Fp}{CF^2}:\frac{E\gamma^2.Ep}{CE^2}$. Poſtea ad angulum FoW definiendam vires CM et FN reſoluendae ſunt in normales ad EF et in ipſam EF incidentes. Sufficiet vero quantitates his viribus proportionales aſſumſiſſe, ex quo cum ſit $EM:FN = \frac{E\gamma^2}{CE}:\frac{F\gamma^2}{CF}$ erit vis normalis ex EM orta $= \frac{E\gamma^2.Ep}{CE^2}$ et ex FN orta $= \frac{F\gamma^2.Fp}{CF^2}$. Deinde ex vi EM naſcitur vis in directione $FE = \frac{E\gamma^2 Cp}{CE^2}$, et ex vi FN naſcitur vis in directione $EF = \frac{F\gamma^2.Cp}{CF^2}$; quae duae vires inter ſe ſunt contrariae, binae priores vero conſpirant.

§. 737. Si igitur vis aequiualens GW pariter in eiusmodi vires laterales reſoluatur, debebit vis ad EF normalis eſſe $= \frac{E\gamma^2 Ep}{CE^2} + \frac{F\gamma^2.Fp}{CF^2}$; altera vero vis in directione oF erit $= \frac{F\gamma^2.Cp}{CF^2} - \frac{E\gamma^2.Cp}{CE^2}$, vnde anguli FoW tangens erit $= \frac{CF^2 E\gamma^2 Ep + CE^2.F\gamma^2 Fp}{CE^2.F\gamma^2.Cp - CF^2.E\gamma^2.Cp}$. Quo appareat quantum haec directio a directione venti VC deflectat, ducatur GX ipſi VC parallela erit angulus deflexionis $WGX = FoW - F\gamma C$. Cum igitur anguli $F\gamma C$ tangens ſit $= \frac{Cp}{p\gamma}$ prodibit anguli WGX tangens $= \frac{CF^2 E\gamma^2(p\gamma.Ep + Cp^2) + CE^2.F\gamma^2(p\gamma.Fp - Cp^2)}{CE^2.F\gamma^2.Cp + CF^2 E\gamma^2.Cp}$, quae expreſſio in plurimas alias formas transmutari poteſt, ope relationis quae inter lineas figurae intercedit. Ceterum ſi latera AC et BC fuerint aequalia, fiet anguli WGX tangens $= \frac{p\gamma(Ep^2 - 2Cp^2 + p\gamma^2)}{Cp(Ep^2 + 3p\gamma^2)}$.

§. 738.

§. 738. Apparet autem hoc caſu angulum deflexionis WGX, quo media directio vis venti GW ab ipſa venti directione VC declinat, nunquam tantum fieri poſſe, quam ſi tabula ventum excipiens eſt perfecte plana AB; ſi enim ventus in directione AC impingit, tum ſolam partem BC percutiet, quae cum minus ſit obliqua ad venti directionem, quam ſuperficies plana AB, directio vis venti quoque propius ad ipſius venti directionem accedet. Quodſi autem angulus VCB maior fiat angulo ACB, tum ventus non ſolum totam ſuperficiem AC non ſtringet, ſed etiam in partem tantum ſuperficiei BC incidet, quo fiet vt eius effectus non ſolum fiat multo minor ſed etiam non tantopere a directione venti diſcrepabit, quam ſi figura tabulae eſſet perfecte plana. Hinc igitur perſpicuum eſt, inaequalitatem ſuperficiei ventum excipientis magnopere effectum tum ratione quantitatis quam directionis turbare, ita vt calculus ſupra datus pro Fig. 4. effectu venti in ſuperficiem planam incurrentis determinando locum habere non poſſit, niſi iſta ſuperficies ſit perfecte polita, et omni inaequalitate deſtituta.

§. 739. Quae hic de figura plana ſunt tradita ſimul declarant in ſuperficie concaua, qualem vela induere ſolent, effectum venti vehementer differre debere, prouti ſuperficies velorum fuerit magis minusue laeuigata. Quamobrem ſi vela vento oblique opponantur, vti fit, ſi curſus aduerſus ventum inſtitui debet, ratio ſuperficiei velorum maxime eſt ſpectanda; quippe quae, quo minus fuerit polita, eo magis a ſcopo deflectet. Hinc igitur colligitur, quo memorato incommodo obuiam eamus, maxime expedire, vt ſuperficies velorum interna; quae per-

per ſe ob filamenta contexta eſt inaequabilis, maxime laevigetur et quaſi polita reddatur; quod commodiſſime praeſtabitur, ſi vela pice vel colore craſſiore illinantur. Nautae incommodum hoc animadvertentes vela madeficere ſolent; quo primum quidem impetrant vt vela magis tendantur atque in ſuperficiem planam magis explanentur, tum vero etiam vento omnem tranſitum per poros velorum adimunt. Quantumuis autem hae duae res ad propoſitum facere videantur, tamen equidem effectum a humectatione velorum ortum maxime huic cauſae tribui debere arbitror, quod cauitates inter filamenta interceptae humido repleantur, ſicque ſuperficiem magis laeuem mentiantur.

§. 740. Inuenta vi, quam vela a vento impulſa ſuſtinent definiri poterunt vires, quae ad vela in eodem ſitu continenda requiruntur; ad hoc enim neceſſe eſt, vt vires velum continentes cum media vi venti, quam determinauimus, in aequilibrio conſiſtant, niſi ipſum velum ſit graue, quo caſu in ſtatu aequilibrii ſimul ponderis ipſius veli ratio eſt habenda. Teneat, vti primo poſuimus, veli vicem tabula plana A B grauitatis quidem expers, in quam ventus ſub directione quacunque allidat, tranſibit media directio vis venti C M per ſuperficiei tabulae centrum grauitatis C, eritque ad ipſum planum normalis, quantitatem autem huius vis ita determinauimus cum ex celeritate venti, eiusque obliquitate, tum ex ſuperficie tabulae, vt pondus huic vi aequale aſſignari poſſit. Sit P pondus huic vi aequale, atque vis venti tabulam vrgentis eo eſt perducta, vt tabula in directione CM ſollicitetur vi, quae aequalis ſit ponderi P. Quare, ſi haec tabula naui ſit fir- Tab. XXI. fig. 1.

miter affixa vel alligata, ipſa nauis ſollicitabitur in directione CM a vi, quae aequalis eſt ponderi P.

§. 741. Cum autem vela ope funium ſeu cordarum ad malos alligari ſoleant, conueniet vim determinari, quam hae cordae ſuſtinent. Ponamus tabulam AB ope duarum cordarum A*a* et B*b* malo vel naui eſſe alligatam, ita vt cordae ſecundum longitudinem a vi P in directione CM pellente extendantur. Quo igitur vires in directionibus A*a* et B*b* agentes cum vi P in aequilibrio conſiſtant, primum oportet directiones A*a* et B*b* cum directione CM in eodem plano eſſe poſitas. Deinde requiritur, vt directiones A*a* et B*b*, ſi producantur, ſeſe in eodem rectae CM puncto interſecent. Tertio denique aequilibrii ſtatus poſtulat, vt ipſae vires A*a* et B*b* ſint inter ſe in ratione reciproca ſinuum angulorum, quos ipſarum directiones productae cum directione CM conſtituunt; ſimul vero vna harum virium puta Aα ſe habeat ad vim P, vt ſinus inclinationis alterius directionis B*b* ad CM, ad ſinum anguli, quem ambae directiones *a*A et *b*B inter ſe conſtituunt. Atque ex his conditionibus tam directiones cordarum, quam vires, quibus tenduntur definientur.

§. 742. Cum ergo, ſi tabula AB vicem veli ſuſtinens fuerit plana directio CM ſit ad AB normalis; ſumtis interuallis CA et CB aequalibus, directiones A*a* et B*b* aequaliter inclinatae eſſe debent ad AB; ſimulque ambae cordae A*a* et B*b* aequalibus viribus tendentur. Sit anguli *a*AC ſeu *b*BC ſinus $= \mu$ coſinus $= \nu$; et *p* denotet vim, qua vtraque corda tendetur. His poſitis erit anguli, quo A*a* vel B*b* ad CM inclinatur, ſinus $= -\nu$: et coſinus $= \mu$; vnde anguli, quo directiones *a*A et *b*B ad

ad ſe mutuo inclinantur, ſinus erit $= -2\mu\nu$. Hinc conditio tertia iſtam praebebit analogiam $p : P = -\nu : -2\mu\nu = 1 : 2\mu$; erit ergo $p = \frac{P}{2\mu}$. Quamobrem erit ſinus anguli *a*AB ſeu *b*BA ad ſinum totum, vti ſemiſſis vis P ad vim *p*, qua corda A*a* vel B*b* tenditur. Vnde perſpicuum eſt, cordas a minima vi tendi, ſi earum directio fuerit perpendicularis ad planitiem veli AB, ſiquidem velum concipiatur grauitatis expers.

§. 743. Maneant directiones cordarum A*a* et B*b* ad planitiem veli normales, atque adeo parallelae directioni vis a vento exceptae CM, ſint autem interualla CA et CB inaequalia. Ex natura vectis conſtat, ad aequilibrium conſtituendum ſummam virium A*a* et B*b* aequalem eſſe debere vi P; tum vero vires A*a* et B*b* reciproce proportionales eſſe oportere diſtantiis AC et BC. Quodſi ergo vis A*a* ponatur $= p$; vis B*b* $= q$ erit primo $p + q = P$ tum vero $p.\,AC = q.\,BC$, ideoque ob $p.\,AC = P.\,BC - p.\,BC$ erit $p = \frac{P.BC}{AB}$ et $q = \frac{P.AC}{AB}$. Velum igitur planum a vento inflatum a duabus viribus, quarum directiones ſint normales ad planum veli, atque cum directione media vis venti CM in eodem plano ſitae, in aequilibrio contineri poteſt. Scilicet recta AB per puncta A et B quibus cordae velo ſunt alligatae per centrum grauitatis ſuperficiei veli tranſire debet. Fig. 2.

§. 744. Habeat velum planum figuram triangularem ABD, erit directio vis venti media normalis ad hoc planum in ipſius centro grauitatis C; ſitque vis venti $= P$. Alligatum iam ſit velum hoc in tribus angulis A, B, D, ita vt cordae ad planum trianguli ſint normales; atque oporteat vim determinare, quam vnaquaeque corda patitur. Fig. 3.

tur. Sit vis cordae in A alligatae $= p$, vis cordae B $= q$ et vis cordae $D = r$. Quaeratur vis aequiualens binis viribus q et r, quae erit $= q + r$ atque in rectae puncto E applicata erit, ita vt ſit $BE : DE = r : q$. Quare haec vis $q + r$ in E applicata vna cum vi p in aequilibrio tenere debet vim venti P: ex quo recta AE per centrum grauitatis C tranſeat neceſſe eſt. Quoniam vero AE per centrum grauitatis trianguli tranſit, erit $BE = DE$, vnde erit $r = q$. Tum vero eſſe debet haec vis in E applicata $q + r$ ad vim in A, nempe p, vti AC ad CE hoc eſt vt 2 ad 1; atque inſuper habetur $p + q + r = P$. Cum ergo ſit $q = r$, et $2p = q + r$ fiet $p = q = r = \frac{1}{3}P$; vires igitur cordarum in ſingulis angulis applicatarum erunt inter ſe aequales, et vnaquaeque aequabitur trienti vis aequilibratae P.

Fig. 4. §. 745. Ponamus iam velum planum habere figuram quadrilateram ABDE, atque cordis quatuor in ſingulis angulis A, B, D, et E normaliter ad planum applicatis in aequilibrio contineri debere. Sit vis quam corda A ſuſtinet $= p$; vis cordae $B = q$; vis cordae in $D = r$, et vis cordae in $E = s$; vis autem venti a velo exceptae ſit $= P$, quae pariter erit normalis ad planum veli, atque per eius centrum grauitatis C tranſibit. Ad vires igitur p, q, r et s determinandas primum oportet centri grauitatis C poſitionem definire. Ducantur diagonales AD et BE ſe mutuo in O decuſſantes: tum vtraque biſecetur in H et I: capiantur porro $Hb = \frac{1}{3}HO$ et $Ii = \frac{1}{3}IO$; ac ex b ducatur diagonali BE parallela bC ſimilique modo ex i diagonali AD parallela iC; erit harum linea

nearum ductarum interſectio C centrum grauitatis quadrilateri, quod quaerebatur.

§. 746. Conferantur iam inter ſe binae vires ſibi diagonaliter oppoſitae nempe p, r et q, s: ac primo quaeratur vis binis p et r ſimul ſumtis aequiualens, quae erit $= p + r$, et applicanda erit in puncto n, ita vt ſit $p.An = r.Dn$: vnde fiet $An = \frac{r.AD}{p+r}$ et $Dn = \frac{p.AD}{p+r}$. Simili modo vis binis q et s aequiualens erit $= q + s$, atque applicanda in puncto m, vt ſit $Bm = \frac{s.BE}{q+s}$ et $Em = \frac{q\,BE}{q+s}$. Quoniam itaque velum ab his duabus viribus $p + c$ et $q + s$ in n et m applicatis in aequilibrio teneri debet, recta mn per punctum C tranſibit; vnde erit $mi : Ob = mO : On$; tum vero erit $p + q + r + s = P$ atque $p + r : q + s = mC : nC = mi : Oi$; ſeu $p + r = \frac{mi.P}{mO}$ et $q + s = \frac{Oi.P}{mO}$. Ex his aequationibus tandem elicientur tres ſequentes: I. $\frac{1}{2}(r-p)AD + (r+p)OH = \frac{2}{3}P.OH$ II. $\frac{1}{2}(s-q)BE + (s+q)OI = \frac{2}{3}P.OI$ atque III. $\frac{1}{2}(s-q)BE + \frac{1}{3}(s+q)OI : \frac{2}{3}(s+q)OI = \frac{2}{3}(r+p)OH : \frac{1}{2}(r-p)AD + \frac{1}{3}(r+p)OH$, vel $p + r + q + s = P$.

§. 747. Per has tres aequationes quatuor vires non omnes determinantur: vnde patet quaeſtionem hanc eſſe indeterminatam, vnamque cordae tenſionem pro lubitu aſſumi poſſe, ex qua deinceps reliquae definiantur. Commodiſſime ſolutionem generalem autem adornabimus, ſi ſumta vi quacunque noua u ponamus $r + p = \frac{1}{2}P + u$ et $s + q = \frac{1}{2}P - u$, atque binae priores aequationes dabunt $r - p = (\frac{1}{3}P - 2u)\frac{OH}{AD}$ et $s - q = (\frac{1}{3}P + 2u)\frac{OI}{BE}$. Hinc aſſumta pro lubitu vi u quatuor vires cordas tendentes ita determinabuntur, vt ſit $p = \frac{1}{2}P.\frac{Ab}{AD} + u.\frac{DO}{AD}$; $q = \frac{1}{2}P.\frac{Bt}{BE}$

 $-u$

$-u \cdot \frac{EO}{BE}$, $r = \frac{1}{2}P \cdot \frac{Db}{AD} + u \cdot \frac{AO}{AD}$; $s = \frac{1}{2}P \cdot \frac{Ei}{BE} - u \cdot \frac{BO}{BE}$. Hinc intelligitur, ſi velum in pluribus quam 4 angulis alligetur, determinationem virium, quibus ſingulae cordae tenduntur, eo magis fore indeterminatam.

Fig. 5. §. 748. Si velum non ſit planum, ſed vel ex aliquot ſuperficiebus planis compoſitum, vel etiam incuruatum, atque id in duobus punctis A et B alligetur, fieri poteſt, vt media directio vis venti CM in rectae AB punctum quodcunque C incidat et ad eam ſub angulo quocunque ACM inclinetur. Sint igitur primo directiones cordarum Aa et Bb in eodem plano cum CM ac poſita vi a vento excepta $= P$, ſit vis cordam Aa tendens $= p$, et vis cordam Bb tendens $= q$. Porro quia directiones aA et bB productae in eodem puncto rectae CM concurrere debent, ſit anguli AMB ſinus $= \alpha$, anguli ACM ſinus $= \sigma$ et coſinus $= \eta$: eritque $p : P =$ ſin. CMB : α; et $q : P =$ ſin. AMC : α ergo $p = \frac{\text{ſin.}\, CMB}{\alpha}$ et $q = \frac{P \cdot \text{ſin.}\, AMC}{\alpha}$. Cum autem ſit α (ſin. AMB) : ſin. CMB $= AB \cdot CM : BC \cdot AM = AB$ ſin. CAM : BC . σ et α (ſin. AMB) : ſin. AMC $= AB \cdot CM : AC \cdot BM = AB$. ſin. CBM : AC . σ erit $p = \frac{\sigma P \cdot BC}{AB \cdot \text{ſin}\, CAM}$ et $q = \frac{\sigma P \cdot AC}{AB \cdot \text{ſin}\, CBM}$. Anguli autem CAM et CBM ita inter ſe erunt affecti vt ſit $\frac{AC \cdot \text{tang}\, CAM}{\sigma + \eta\, \text{tang}\, CAM} = \frac{BC \cdot \text{tang}\, CBM}{\sigma - \eta\, \text{tang}\, CBM}$ ſeu $\frac{\sigma \cot CAM}{AC} + \frac{\eta}{AC} = \frac{\sigma \cot CBM}{BC} - \frac{\eta}{BC}$ vel AB. cot. ACM $=$ AC cot. CBM $-$ BC. cot. CAM.

§. 749. Ratio huius vltimae aequationis, quae relationem continet inter angulos CAM et CBM, ad id vt rectae aA et bB productae ſe mutuo in ipſa recta CM interſecent, facile hoc modo perſpicietur. Ex M in AB demittatur perpendiculum MP quod inſtar ſinus totius conſideretur;

Digitized by Google

ſideretur; eritque CP $=$ cot. BCM $=$ − cot. ACM $= -\frac{n}{m}$. Tum vero babebitur BP $=$ cot. CBM, et AP $=$ cot. CAM: qui valores ſi loco cotangentium in vltima aequatione ſubſtituantur, prodibit − AB . CP $=$ AC . BP − BC . AP $=$ − AC . CP − BC . CP. Hinc ergo fiet AC (BP + CP) $=$ BC (AP − CP) ſeu AC . BC $=$ BC . AC quae eſt aequatio identica. Sumtis ergo ad hanc normam angulis aAB et bBA ipſae vires, quibus cordae tendentur, ex ſuperioribus aequationibus definientur.

§. 750. His de velorum planorum vi, quam a vento excipiunt, expoſitis, pergamus ad vela incuruata, quae figuram habeant quamcunquae immutabilem, ita vt eandem figuram retineant, quantumuis ventus ea ſollici- Tab. XXII.
tet; cuiusmodi forent vela, ſi ex metallo, aliaue mate- fig. 1.
ria rigida conficerentur. Sit AMB eiusmodi velum cuius figura data ſit per aequationem inter abſciſſam AP $= x$ et applicatam PM $= y$. Irruat in hoc velum ventus celeritate debita altitudini v in directione VQM, quae cum axe AB conſtituat angulum VQN, cuius ſinus ſit $= m$ coſinus $= n$. Ducatur applicata proxima pm, vt ſit Pp $= dx$; $mm = dy$ et elementum curuae N$m = V(dx^2 + dy^2)$ $= ds$; in quod ventus impinget ſub angulo VMm, vel VMA $=$ NmM − PMQ, cuius ſinus propterea erit $= \frac{mdx - ndy}{ds}$. Vis igitur, quam elementum Mm a vento ſuſtinet erit vt $\frac{v(mdx - ndy)^2}{ds}$, cuius menſura abſoluta, ſi latitudo veli in hoc loco ponatur $= u$, et voluminis aquei V pondus ſit $=$ M, erit pondus $\frac{1}{105} \frac{M}{V} \cdot \frac{uv(mdx - ndy)^2}{ds}$, ponamus autem breuitatis gratia α pro quantitate conſtante $\frac{1}{105} \frac{M}{V}$, ita, vt vis quam elementam Mm latitudinem habens u ſuſtinet ſit $= \frac{\alpha uv(mdx - ndy)^2}{ds}$.

§. 751.

§. 751. Vis huius directio autem eſt normalis ad velum in M, quare ſi ducatur normalis KMN, vt ſit PN $= \frac{ydy}{dx}$, velum vrgebitur in directione NM, vel ſi vis referatur ad axem AB in directione TN, vi $= \frac{\alpha uv(mdx-ndy)^2}{ds}$. Reſoluatur haec vis in duas laterales RN et SN, quarum illa ad AB ſit normalis, haec in ipſam AB incidat, erit ob triangula TNR et *mMn* ſimilia, vis NR $= \frac{\alpha uvdx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et vis NS $= \frac{\alpha uvdy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. Summa ergo omnium virium elementarium N *S* erit $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et ſumma omnium RN $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$. At momentum vis R N reſpectu puncti A eſt $\frac{\alpha uv(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, vnde ſumma omnium momentorum $= \alpha v \int \frac{v(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}$, quae diuiſa per $\alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ dabit punctum C in axe AB, per quod media directio vis venti CW tranſibit, erit ſcilicet AC $= \frac{\int \frac{u(xdx+ydy)(mdx-ndy)^2}{ds^2}}{\int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}}$. Atque vis tota venti reducetur ad duas vires C E et C F, quarum illa eſt C E $= \alpha v \int \frac{udx(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ et CF $= \alpha v \int \frac{udy(mdx-ndy)^2}{ds^2}$ ex quarum compoſitione oritur vis CG vi venti, quam velum AMB ſuſtinet, aequiualens.

§. 752. Quodſi ad angulum attendamus, quo media directio vis venti CW ab ipſa directione venti V Q declinat, facile colligemus, eum angulo recto fore eo minorem, quo magis figura veli A M B fuerit incuruata ſiquidem ventus totam internam veli ſuperficiem feriat. Si enim ventus directe in velum impingat, tum quidem media directio C M ab ipſa venti directione V Q non diſcrepabit

bit, ex quo intelligitur diſcrepantiam cum obliquitate anguli AQV creſcere. At vero haec obliquitas vltra certum terminum creſcere non poteſt, quin portio veli quaedam prorſus non a vento impellatur, atque adeo inutilis euadat. Sin autem ventus maxima obliquitate, quam memorata conditio permittit, in velum illabatur, tum portionem quidem aliquam veli vehementer oblique ſtringet, hincque directio vis venti fere ad angulum rectum diſcedet a directione venti, ſimul vero ventus ob curuaturam veli in reliquam portionem magis directe incurret, vnde directio vis venti multo magis ad directionem venti reducetur, propterea quod vis venti directe impingentis multo maior eſt, quam vbi oblique venit. Ex quibus efficitur, vela plana eſſe aptiſſima non ſolum ad maximam vim venti excipiendam, ſed etiam ad curſum aduerſus ventum inſtituendum.

§. 753. Quanquam haec per ſe ſatis ſunt plana, tamen eo magis illuſtrabuntur, ſi vim venti, quam in vela flexibila exerit, determinabimus, quo in negotio imprimis neceſſe eſt, vt curuatura, quam ventus velo inducit, definiatur, hac enim cognita per ſolutionem praecedentis problematis, ſi curuatura inuenta loco figurae A M B ſubſtituatur, vis venti eiusque media directio cognoſcetur. Quae operatio primo intuitu admodum moleſta videtur, cum curua veli prodeat tranſcendens: at vero huius curuae inuentio ipſa ſimul monſtrabit vim venti in velum exercitam, eiusque mediam directionem; ita vt ſubſtitutione non ſit opus. Cum enim curuae etiam ſimpliciſſimae in calculo ſuperiori ſubſtitutae ad aequationes maxime intricatas deducant, ea curua, quae a natura for-

matur, dum ventus velum perfecte flexile inflat, ad ſimpliciſſimum caſum perducit; etiamſi ipſa ſit tranſcendens. Eiusmodi ſcilicet commoda natura ſemper ſuppeditat, vt quo ſtrictius eam ſequamur ſolutiones quidem ſubinde intricatas attamen ita comparatas obtineamus, vt quaeſito commodiſſime ſatisfaciant.

Fig. 2. §. 754. Sit igitur filum perfecte flexile BMA, quod loco veli conſidero, in B fixum, in A autem retineatur ſufficienti vi AG, ita vt a vento VM inflatum et in figuram BMA incuruatum, in hoc ſtatu perſeueret. Ad hanc curuam BMA, quam filo ventus inducit inueniendam ex A ducatur ad venti directionem recta normalis AP, quae inſtar axis conſideretur, in quo ponatur abſciſſa $AP = x$, reſpondens applicata $PM = y$; et longitudo fili $AM = s$. Quoniam iam filum perfecte flexile ponitur, neceſſe eſt, vt omnes vires, quae filum in M inflectere conantur, ſe mutuo deſtruant, niſi enim hoc eueniret, filum actu in M magis minusue inflecteretur, ideoque ſtatus, quem iam permanentem pono, turbaretur. Quia hic tantum ad flexibilitatem, quam filum in puncto M habet, attendo, in reliquis locis id tanquam rigidum contemplor; eritque pars BM omnino immobilis, pars AM vero circa M quaſi polum rotari poſſet, ſi vis hunc effectum intendens adeſſet. Patet autem a vi AG ſi ea ſola adeſſet, filum vtique circa A motum iri; ab impulſionibus venti autem in partem AM factis filum in partem contrariam replicaretur, quamobrem neceſſe eſt, vt hi duo effectus ſe mutuo deſtruant.

§ 755. Vires autem, quibus corpus quodcunque circa polum ſeu axem fixum conuertitur, definiuntur per momen-

momenta, quae ex viribus reſpectu illius poli ſeu axis fixi naſcuntur. Sic ad momentum ex vi AG, quae ſit $= G$, cognoſcendum, reſoluatur haec vis in duas laterales AE et AF, axi AP cum cogruentes tum normales, ac ſit vis $AE = E$ et vis $AF = F$; ita vt ſit $G = \sqrt{(E^2 + F^2)}$. Hoc facto ex vi $AE = E$ naſcitur momentum filum AM circa M dextrorſum rotans $= Ey$; at ex vi $AF = F$, oritur momentum ſiniſtrorſum rotans $= Fx$, ita vt momentum ex vi G ortum et ſimiſtrorſum vrgens ſit $= Fx - Ey$. Tantum ergo eſſe debebit momentum, quo filum circa M a vento dextrorſum ſollicitatur: ad quod inueniendum capiatur quaecunque particula fili $Yy = d\omega$, et ordinatae ipſi reſpondentes ponantur $AX = \xi$, $XY = \Phi$ et ponatur breuitatis gratia vis venti elementum Yy vrgens $= pd\omega$; quae cum ſit normalis puta YZ, reſoluatur in laterales YR et YS coordinatis parallelas, erit vis $YR = pd\Phi$ at $YS = pd\xi$.

§. 756. Iam a vi $YR = pd\Phi$ oritur momentum dextrorſum vrgens $= pd\Phi(y - \Phi)$, et a vi $YS = pd\xi$ momentum pariter dextrorſum tendens $= pd\xi(x - \xi)$. Illorum igitur momentorum omnium ſumma erit $= y\int pd\Phi - \int p\Phi d\Phi$, ſi poſt integrationem ita peractam, vt integrale euaneſcat poſito ξ et $\Phi = 0$, ponatur $\xi = x$ et $\Phi = y$; eadem ergo momentorum ſumma erit $= y\int pdy - \int pydy = \int dy \int pdy$, ſi pds denotet vim venti, quam elementum curuae Mm patitur. Simili modo ſumma alterorum momentorum ab A ad M vsque erit $= x\int pd\xi - \int p\xi d\xi$, ſi poſt integrationem debito modo peractam ponatur $\xi = x$: ex quo eadem momentorum ſumma erit $= x\int pdx - \int pxdx = \int dx \int pdx$. A vento ergo filum

lum AM dextrorſum circa M vrgebitur momento virium $= \int dy \int p\,dy + \int dx \int p\,dx$, cui aequale eſſe debet momentum $Fx - Ey$, quo idem filum ſiniſtrorſum pellitur. Hinc itaque obtinebitur iſta aequatio $Fx - Ey = \int dy \int p\,dy + \int dx \int p\,dx$ ſeu $F\,dx - E\,dy = dy \int p\,dy + dx \int p\,dx$, qua natura curuae continetur.

§. 757. Quoniam pds denotat vim, qua elementum $Mm = ds$ a vento normaliter vrgetur, erit $pds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, ſi quidem v denotet altitudinem celeritati venti debitam, et α eſt quantitas conſtans ſupra (§. 750) deſcripta. Quo autem haec ad menſuras finitas reducantur, neceſſe eſt filo latitudinem tribuere ſeu quaſi infinita eiusmodi fila ſibi parallela et contigua concipere, quo ipſo figura veli quadrangularis rectangularis reſultat, cuius longitudo cum ſit AMB, ponatur latitudo $= c$ eritque $pds = \frac{\alpha v dx^2}{ds}$, et nunc α eſt $\frac{c}{100} \cdot \frac{M}{V}$, vbi M deſignat pondus maſſae aqueae, cuius volumen eſt V. Cum igitur ſit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$, erit $\int p\,dx = \alpha v \int \frac{dx^3}{ds^2}$ et $\int p\,dy = \alpha v \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$, quia celeritas venti $\sqrt{v}$ eſt conſtans. Subſtituantur hi valores in aequatione ſupra inuenta, ac prodibit pro curua quaeſita haec aequatio $\frac{Fx - Ey}{\alpha v} = \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2}$: quae autem ter differentiari deberet, antequam a ſignis integralibus penitus liberetur.

§. 758. Expediet autem aequationem generalem ad formam ſimpliciorem, et a ſignis integralibus liberam perducere. Cum igitur ſit $F\,dx - E\,dy = dy \int p\,dy + dx \int p\,dx$, erit ſumto dx conſtante $-E\,ddy = ddy \int p\,dy + pds^2$, et $-E = \int p\,dy + \frac{pds^2}{ddy}$; quae denuo differentiata dat $0 = 3p\,dy + \frac{dpds^2}{ddy} - \frac{pds^2 d^3y}{ddy^2}$, ob $dsdds = dyddy$. Hinc ergo erit $\frac{dp}{p} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3dyddy}{ds^2} = \frac{d^3y}{ddy} - \frac{3dds}{ds}$ quae integrata dat $p = \frac{C\,dx\,ddy}{ds^3}$.

$\frac{Cdxddy}{ds^3}$. Quocirca erit $\int p\,dx = C\int\frac{dx^2ddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{Cdy}{ds} + M$; et $\int p\,dy = C\int\frac{dxdyddy}{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-Cdx}{ds} + N$. Quibus valoribus in prima aequatione ſubſtitutis erit $F\,dx - E\,dy = \frac{-Cdxdy}{ds} + N\,dy + \frac{Cdxdy}{ds} + M\,dx$, vnde habetur $M = F$ et $N = -E$. Sumta ergo conſtante C, quae eſt arbitraria negatiua fiet $p = -\frac{Cdxddy}{ds^3}$; et $\int p\,dx = F - \frac{Cdy}{ds}$, atque $\int p\,dy = \frac{Cdx}{ds} - E$. Cum igitur puncto M in A translato tam $\int p\,dx$ quam $\int p\,dy$ euaneſcant, erit in A $\frac{dy}{ds} = \frac{F}{C}$ et $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{C}$; vnde fit $C = G = \sqrt{(EE+FF)}$.

§. 759. Cum iam noſtro caſu ſit $p = \frac{\alpha v dx^2}{ds^2}$; habebimus pro curua AMB hanc aequationem $\alpha v\,dx\,ds = -G\,ddy$, quae integrata dat $\alpha v s\,dx = -G\,dy + C\,dx$; vbi ad conſtantem C determinandam notaſſe oportet, facto $s = \alpha$, fieri $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, vnde erit $\frac{dy}{dx} = \frac{C}{G} = \frac{F}{E}$; ideoque $C = \frac{FG}{E}$. Conſequenter iſta emerget aequatio $\alpha v s\,dx = \frac{G}{E}(F\,dx - E\,dy)$. Quo autem aequatio inter coordinatas, eliminato arcu s, obtineatur, reſumatur aequatio $\alpha v\,dx\,ds = -G\,ddy$, quae per $\frac{dy}{ds}$ multiplicata fit $\alpha v\,dx\,dy = -\frac{Gdyddy}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$, cuius integrale eſt $\alpha v y\,dx = C\,dx - G\,ds$; et translato M in A, quia fit $\frac{dx}{ds} = \frac{E}{G}$, erit $\frac{G}{C} = \frac{E}{G}$ et $C = \frac{G^2}{E}$; ideoque $\alpha v y\,dx = \frac{G^2dx}{E} - G\,ds$. Ergo $EG\,ds = G^2dx - \alpha v E y\,dx$; et $EG\,dy = dx\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$ ſiue $dx = \frac{EGdy}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha v E y)}{\sqrt{(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}}$.

§. 760. Hinc primum patet directionem vis G velum retinentis cum tangente curuae in A congruere; translato enim M in A fit $dx:ds = AE:AG$. Deinde intelligi-

telligitur curuam AM vbique concauitatatem axi AP obvertere: ex aequatione generali enim $p = \frac{-Gdxddy}{ds^3}$, ſequitur ddy vbique habere valorem negatiuum, quod eſt ſignum concauitatis. Hancobrem curua alicubi habebit tangentem axi AP parallelam, quod eueniet, vbi fit $dy = 0$, ſeu $ds = dx$. Cum igitur ſit $EGds = G^2dx - \alpha v Eydx$ facto $ds = dx$ fiet $y = \frac{G^2 - EG}{\alpha v E}$; haec eſt ergo applicata maxima in curuatura veli AMB; et curua vltra hunc locum iterum ad axem AP accedet, donec ipſi occurrat. Denique ex aequationibus inuentis aſſignari poteſt longitudo arcus $AM = s$, per applicatam $PM = y$; erit enim per vltimam aequationem integratam $s = \frac{FG - \surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}{\alpha v E}$ et radius osculi curuae in M, qui eſt $= -\frac{ds^3}{dxddy}$, fiet $= \frac{G}{p} = \frac{Gds^2}{\alpha v dx^2} = \frac{(G^2 - \alpha v E y)^2}{E^2 G}$.

Fig. 3. §. 761. Ponamus iam AMHB eſſe curuam veli a vento in directione VDH incurrente formatam, et quoniam poſitis $AP = x$; $PM = y$, et $AM = s$, eſt $dx = \frac{EGdy}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$ et $ds = \frac{dy(G^2 - \alpha v E y)}{\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2)}$, ducatur ordinata maxima DH, quae nunc inſtar axis conſideretur; ad quam ex M ducto perpendiculo MQ, ponatur $HQ = t$ et $MQ = z$; erit ob $HD = \frac{G^2 - EG}{\alpha v E}$; $PM = y = \frac{G^2 - FG}{\alpha v E} - t$; et $dx = -dz$; vnde fit $dy = -dt$ et $\surd(F^2G^2 - 2\alpha v EG^2 y + \alpha^2 v^2 E^2 y^2) = E\surd(2\alpha v G t + \alpha^2 v^2 tt)$. Quare erit $dz = \frac{Gdt}{\surd(2\alpha v G t + \alpha^2 v^2 tt)}$. Ponatur $\frac{G}{\alpha v} = a$, eritque $dz = \frac{adt}{\surd(2at + tt)}$; et quantitas a erit radius oſculi curuae in puncto H, quod eſt quaſi vertex curuae. Nam quia ob ſignum radicale eidem valori t reſpondet applicata z tam affirmatiua quam negatiua, erit axis HD ſimul curuae diameter orthogonalis.

§. 762.

§. 762. Ex data ergo curuatura veli AHB, quae inter coordinatas $HQ = t$ et $QM = z$ iſta aequatione exprimitur $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$, innoteſcit vis, quae ad velum in dato loco A retinendum requiritur. Erit namque haec vis $G = \alpha a v$, ideoque conſtans: vnde ad velum in quocunque loco retinendum eadem requiritur vis, cuius directio cum tangente curuae in eo loco congruere debet. Scilicet ſi veli latitudo ponatur $= c$; atque maſſae aqueae, cuius volumen ſit $= V$, pondus ſit $= M$, quia eſt $\alpha = \frac{c}{100} \frac{M}{V}$; erit vis ad velum in quolibet loco detinendum requiſita $= \frac{acv}{100} \cdot \frac{M}{V}$, ſeu iſta vis aequabitur ponderi maſſae aereae cuius volumen eſt $= acv$; erit ergo hoc volumen parallelepipedon rectangulum, cuius tres dimenſiones ſunt, radius osculi curuaturae veli in vertice H; latitudo veli c, et altitudo debita celeritati venti v. Haec eadem vis autem ſimul praebet tenſionem veli in ſingulis locis, qua ſuperficies veli diruptioni reſiſtit, quae ergo erit in duplicata ratione celeritatis venti, ſi velum eandem curvaturam conſeruet.

§. 763. Quoniam eſt $dz = \frac{adt}{\sqrt{(2at+tt)}}$ erit integrando $z = a\,l\frac{a+t+\sqrt{(2at+tt)}}{a}$. Quodſi ergo ponatur $HD = f$ et $AD = b$ erit $b = a\,l\frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}$; et ſi in A ducatur tangens AK axi occurrens in K, erit anguli AKH tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}}$; ideoque ſinus $= \frac{a}{a+f}$; et coſinus $= \frac{\sqrt{(2af+ff)}}{a+f}$. Si igitur in axe capiatur $HI = a$ erit $DI = a+f$; ideoque habebitur $AK : AD = DI : HI$. Poſito porro arcu $HM = s$, erit $ds = \frac{dt(a+t)}{\sqrt{(2at+tt)}}$; atque ipſe arcus $HM = s = \sqrt{(2at+tt)}$; vnde erit arcus $AH = \sqrt{(2af+ff)}$. Denique radius osculi in M erit $= \frac{ds^3}{-dtddz} =$

$= \frac{(a+f)^2}{a}$; vnde in puncto A erit radius oſculi $= \frac{(a+f)^2}{a} = \frac{DI^2}{HI}$; quae ſunt praecipue curuae velariae proprietates.

§. 764. Conſideremus nunc velum AHB quod vento directe ita exponatur, vt directio venti VH ſit ad rectam AB normalis; quae recta AB per veli extremitates A et B, quibus eſt fixum, tranſeat. Sit diſtantia extremitatum $AB = 2b$ et longitudo veli ſeu curua AHB $= 2g$, quae duae res in praxi ſolent eſſe datae; vento ergo in directione VH incurrente velum in curuam ante deſcriptam incuruabitur, eritque eius vertex in H exiſtente HD diametro curuae. Ponatur radius oſculi in H, $= a$; et interuallum $HD = f$; habebimus ad has quantitates a et f determinandas iſtas duas aequationes $b = a\, l \frac{a+f+\sqrt{(2af+ff)}}{a}$ et $g = \sqrt{(2af+ff)}$; vnde erit $f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. et $b = a\, l \frac{g+\sqrt{(aa+gg)}}{a}$, ex qua aequatione valor ipſius a erui debet. Quod quo facilius praeſtari poſſit expediet logarithmum per ſeriem exprimere, eritque $b = g - \frac{1 \cdot g^3}{2 \cdot 3 a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot g^5}{2 \cdot 4 \cdot 5 a^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot g^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 a^6} +$ etc. vnde ſi cognitus eſſet valor ipſius a, reperiri poſſet facile valor ipſius b.

§. 765. Ex hac aequatione primum apparet ſi fuerit $b = g$ ſeu diſtantia AB ipſi veli longitudini AHB aequalis, fore $a = \infty$, quod quidem per ſe eſt manifeſtum, quia hoc caſu velum in lineam rectam erit extenſum, cuius radius curuedinis vbique eſt infinitus. Quodſi ergo b nonmulto fuerit minor quam g, qui caſus ſolet eſſe frequentiſſimus, erit proxime $b = g - \frac{g^3}{6aa}$, ideoque $\frac{g^3}{6aa} = g - b$, vnde prodit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}}$; hicque erit valor ipſius a, ſi velum vehementer extendatur, vt longitudo AHB non multum ſuperet rectam AB. Sin autem accurratius

rem

rem definire velimus, ſumatur $b = g - \frac{g^3}{6aa} + \frac{3g^5}{40a^4}$, ſeu o $= (g-b)a^4 - \frac{g^3aa}{6} + \frac{3}{40}g^5$; et ponatur $a^2 = \frac{g^3}{6(g-b)} + k$, et orietur o $= \frac{g^6}{36(g-b)} + \frac{g^3k}{3} - \frac{g^6}{36(g-b)} - \frac{g^3k}{6} + \frac{3}{40}g^5$ ſeu o $= k + \frac{9}{20}gg$; vnde erit $aa = \frac{g^3}{6(g-k)} - \frac{9gg}{20}$ atque $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{6g(g-b)}$, qui valor pro praxi ordinaria ſatis tuto ſemper vſurpari poterit.

§. 766. Quodſi ergo velum AH vento ita directe opponatur, vt directio venti VH ad rectam AB ſit normalis, ex datis $AB = 2b$ et longitudine veli AHB $= 2g$ definietur radius oſculi in vertice curuae A, quem poſuimus $= a$, hincque ſinus veli $DH = f = \sqrt{(aa+gg)} - a$. His cognitis ſi ducantur in A et B tangentes curvae AK et BK, erit anguli AKD ſeu BKD tangens $= \frac{a}{\sqrt{(2af+ff)}} = \frac{a}{g}$; et vires, quae requiruntur ad velum in hoc ſtatu ſuo continendum, in directionibus Aa et Bb agentes erunt $= \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$, cum his igitur binis viribus in aequilibrio erit vis venti a velo excepta. Sit haec vis $= P$, erit ex natura aequilibrii $\frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V}$; $P =$ ſin. AKD : ſin. AKB $= 1 : 2$ coſ. AKD, hoc eſt vt $1 : \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Erit ergo vis venti $P = \frac{acv}{800} \cdot \frac{M}{V} \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$. Cum autem ſit $a = \frac{g\sqrt{g}}{\sqrt{6(g-b)}} - \frac{9}{40}\sqrt{69(g-b)}$, erit $\frac{a}{\sqrt{(aa+gg)}} = 1 - \frac{3(g-b)}{g}$ erit $P = \frac{cv(3b-2g)}{400} \frac{M}{V}$.

§. 767. Manentibus ergo celeritate venti et latitudine veli c iisdem, vis venti in velum exerta erit vt $3b - 2g$. Sit primum $b = g$, quo caſu velum in planum extenditur et ob a infinitum vires requiruntur infinitae magnae ad velum in ſtatu hoc continendum; interim tamen vis a vento excepta erit vt g, qua nauis propelletur. Sit

iam $b = \frac{n-1}{n} g$, fiet vis venti vt $\frac{n-3}{n} g$; quae ergo erit ad vim eiuſdem veli plani vt $n-3$ ad n. Quamobrem ſi $n = 6$, hoc eſt ſi fuerit longitudo AB ad longitudinem veli AHB vt 5 ad 6, tum vis a vento orta duplo erit minor, quam ſi velum eſſet in planum extenſum; minores valores pro n aſſumere non licet quia approximatio inſtituta hoc non permittit. Si velum planum longitudinis $AB = 2b$ concipiatur, foret eius vis a vento accepta vt b hoc eſt vt $\frac{n-1}{n} g$. Quare vires, quas ventus idem exerit I in velum AHB, II in velum planum AB, et III in velum AHB in planum expanſum, erunt vt I, $n-3$; II $n-1$; III, n: ſicque duplici modo vis venti in velum incurvatum diminuitur.

§. 768. Per obſeruationes autem praeter interuallum AB et longitudinem veli AHB commode innoteſcit ſinuamen veli ſeu diſtantia $HD = f$; qua cognita ſine valore radii oſculi a vis venti in velum exercita definiri poteſt. Cum enim ſit $g = \sqrt{(2af + ff)}$, fiet $a = \frac{gg-ff}{2f}$ et $\sqrt{(aa+gg)} = \frac{gg+ff}{2f}$. Quare cum vis a vento excepta ſit $P = \frac{acv}{100} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{2g}{\sqrt{(aa+gg)}}$ fiet factis ſubſtitutionibus $P = \frac{2gcvM}{100V} \cdot \frac{gg-ff}{gg+ff}$, vbi eſt g ſemiſſis longitudinis veli AHB. Hinc ſequitur fore vim venti in velum AHB, ſi eſſet in planum expanſum, ad vim venti in idem velum incurvatum AHB vti eſt 1 ad $\frac{gg-ff}{gg+ff}$ ſeu vt $gg+ff$ ad $gg-ff$. Si igitur eſſet ſinuamen HD pars decima totius veli longitudinis AHB, ita vt ſit $f = \frac{1}{5} g$, erit vis huius veli in planum expanſi ad vim eiuſdem incuruati vt 1 ad $\frac{24}{26}$, ſeu vt 13 ad 12, ita vt per hanc incuruationem pars decima tertia vis pereat.

§. 769.

§. 769. Multo difficilior autem eſt quaeſtio, ſi recta A B extremitates A et B veli iungens cum directione venti VH obliquum faciat angulum BFH; atque longitudo veli AHB data ſit: tum enim primo axis ſeu diameter curuae velariae et ipſi curuae, quam velum induet, poſitio determinari debet, qua cognita praeter quantitatem vis, quam ventus in velum exerit, eius directio erit definienda, quae aliquantum a venti directione VH diſcrepabit. Manifeſtum quidem eſt, ſi velum eſſet planum, hoc eſt, ſi longitudo AHB non excederet interuallum A B, tum directionem vis venti normalem futuram eſſe ad rectam AB; incuruatio autem non ſolum hanc venti vim diminuet, ſed etiam directionem eius propius ad venti directionem VH adducet. Atque ob hanc rationem laxitas velorum plurimum curſui adverſus ventum inſtituendo obeſt, quippe ad quem curſum requiritur, vt directio vis a vento exceptae plurimum diſcrepet ab ipſa venti directione; plus autem, quam ad angulum rectum diſcrepare nequit. Tab. XXII. fig. 4.

§. 770. Sit igitur interuallum $AB = b$, et longitudo veli $AHB = g$, ita vt ſit $g > b$; ponatur anguli BFH quem directio venti cum poſitione rectae AB facit, ſinus $= m$ coſinus $= n$, quae ſunt cognita. Tum ex incognitis ſit VH axis curuae, quam velum induit, a eius radius oſculi in vertice H, atque ad hunc axem ex punctis A et B demiſſis perpendiculis AD et BE, ponatur $HD = t$; $AD = u$; et $HE = x$; $BF = y$; erit ex natura curuae $u = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{(2at+tt)}}$ et $y = \int \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax+xx)}}$; atque arcus $AH = \sqrt{(2at+tt)}$ et arcus $BH = \sqrt{(2ax+xx)}$. Tum vero erit $BE + AD = mb$ et $HD - HE = nb$,

 ex

ex quibus reſultabunt tres ſequentes aequationes $u+y=mb$; $t-x=nb$ et $g=\sqrt{(2at+tt)}+\sqrt{(2ax+xx)}$ ita vt habeantur quinque aequationes, ex quibus has quinque incognitas t, u, x, y, et a definiri oportebit, quod opus niſi ſubſidium adſit, eſſet maxime laborioſum et prolixum.

§. 771. Quoniam autem in praxi longitudo veli g non multum excedere ſolet interuallum AB, velum non admodum incuruabitur, eritque id circo radius curuedinis a quantitas praegrandis, ita vt futurum ſit proxime $\sqrt{(2at+tt)}=\sqrt{2at}+\frac{tt}{2\sqrt{2at}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2at+tt)}}=\frac{a}{\sqrt{2at}}-\frac{t}{4\sqrt{2at}}$; et $\sqrt{(2ax+xx)}=\sqrt{2ax}+\frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$; $\frac{a}{\sqrt{(2ax+xx)}}=\frac{a}{\sqrt{2ax}}-\frac{x}{4\sqrt{2ax}}$. Vnde erit $u=\sqrt{2at}-\frac{tt}{6\sqrt{2at}}$ et $y=\sqrt{2ax}-\frac{xx}{6\sqrt{2ax}}$. Ex his definitis fit $\sqrt{2at}+\sqrt{2ax}-\frac{tt}{6\sqrt{2at}}-\frac{xx}{6\sqrt{2ax}}=mb$; $t-x=nb$; et $g=\sqrt{2at}+\sqrt{2ax}+\frac{tt}{2\sqrt{2at}}+\frac{xx}{2\sqrt{2ax}}$. Ergo $g-mb=\frac{2tt}{3\sqrt{2at}}+\frac{2xx}{3\sqrt{2ax}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{3(g-mb)}{2t\sqrt{t}+2x\sqrt{x}}$; ideoque $\sqrt{2a}=\frac{2t\sqrt{t}+2x\sqrt{x}}{3(g-mb)}$. Subſtituatur hic valor pro a inuentus in altera aequatione, prodibitque $g=\frac{2tt+2xx+2t\sqrt{tx}+2x\sqrt{tx}}{3(g-mb)}+\frac{3}{4}(g-mb)$; ideoque erit $(t^{1:2}+x^{1:2})(t^{3:2}+x^{3:2})=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{8}$.

§. 772. Ad has aequationes reſoluendas pono $\sqrt{t}+\sqrt{x}=q$, $\sqrt{t}-\sqrt{x}=r$; erit $\sqrt{t}=\frac{q+r}{2}$, $\sqrt{x}=\frac{q-r}{2}$; et $t-x=qr$; atque $t^{3:2}+x^{3:2}=\frac{q^3+3qrr}{4}$, vnde erit $\sqrt{2a}=\frac{q(qq+3rr)}{6(g-mb)}$ et reliquae aequationes fient $qr=nb$ et $\frac{qq(qq+3rr)}{4}=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{8}$ ſeu $qq(qq+3rr)=\frac{3}{2}(g+3mb)(g-mb)$, per priorem vero eſt $qqrr=nnbb$, ergo illa per hanc diuiſa $\frac{qq+3rr}{rr}=\frac{3(g+3mb)(g-mb)}{2nnbb}$; vnde eſt $\frac{qq}{rr}=\frac{3(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}{2nnbb}$, et $\frac{q}{r}=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}}{nb}$ vnde denique fit $q=\sqrt[4]{\frac{3}{2}(gg+2mgb-3mmbb-2nnbb)}$

et

et $r = \frac{nh}{\sqrt[4]{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$. Ex his fit

$$\sqrt{t} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}+nh}{2\sqrt[4]{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$$ atque

$$\sqrt{x} = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}-nh}{2\sqrt[4]{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}.$$

§. 773. Cum deinde ſit $\sqrt{2a} = \frac{q(qq+rr)}{6(g-mh)}$; erit $\sqrt{2a} = \frac{g+3mh}{4q} = \frac{g+3mh}{4\sqrt[4]{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$; atque $a = \frac{(g+3mh)^2}{16\sqrt{\frac{1}{3}(gg+2mgh-3mmhh-2nnhh)}}$; vnde cognoſcetur vis, qua velum in A et B ſecundum tangentes trahi debet, quo in aequilibrio retineatur, erit ſcilicet vtraque vis $= \frac{acv}{800}\frac{M}{V}$. Ducantur ergo ex A et B tangentes AK et BL, quae ſe mutuo ſecent in O, et quia vires ambae ſunt aequales, media directio vis venti GO angulum AOB biſecabit; erit autem angulus AOB = AKH + BLH; ideoque A OG = ½ AKH + ½ BLH, et angulus OGL = ½ BLH − ½ AKH. Quodſi autem vis ipſa venti ponatur = P fiet P: $\frac{acv}{800}\cdot\frac{M}{V}$ = ſin. AOB: ſin. ½ AOB = 2 coſ. ½ (AKH + BLH): 1. ideoque erit vis $P = \frac{acv\,\text{coſ.}\,\frac{1}{2}(AKH+BLH)}{400}\cdot\frac{M}{V}$.

§. 774. Eſt vero anguli AKH coſinus $= \frac{\sqrt{(2at+tt)}}{a+t} = \frac{\sqrt{2at}}{a} - \frac{3tt}{2a\sqrt{2at}}$, et anguli BLH coſinus $= \frac{\sqrt{(2ax+xx)}}{a+x} = \frac{\sqrt{2ax}}{a} - \frac{3xx}{2a\sqrt{2ax}}$; vnde erit ſin. ½ AKH $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2at}}{2a}+\frac{3tt}{4a\sqrt{2at}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2t}}{2a}}$; et coſ ½ AKH $= \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{at}}{2a}}$; ſimilique mo-

do ſin. $\frac{1}{2}$BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{ax}}{2a}$, et coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{ax}}{2a}$. Ex his fit coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{x}{\sqrt{2ax}} + \frac{t}{\sqrt{2at}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}(\sqrt{t} + \sqrt{x}) = \frac{q}{\sqrt{2a}} = \frac{6(g-mb)}{qq+3rr}$ et a coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) $= \frac{q\sqrt{a}}{\sqrt{2}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} = \frac{qq(qq+3rr)}{12(g-mb)}$; et eſt $qq(qq+3rr) = \frac{4}{3}(g+3mb)(g-mb)$ ergo a coſ. $\frac{1}{2}$ (AKH + BLH) $= \frac{1}{9}(g+3mb)$; vnde prodit vis a vento excepta $P = \frac{cv(g+3mb)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; hacque vi velum a vento in directione GO propelletur.

§. 775. Haec expreſſio tantum prope eſt vera, et quoniam ſinus et coſinus angulorum $\frac{1}{2}$ AKH et $\frac{1}{2}$ BLH tantum ad duos terminos expreſſimus neglectis ſequentibus omnibus, dum in praecedentibus vlterius proceſſimus, nimium concluſio a veritate aberrabit. Quocirca eosdem ſinus et coſinus accuratius exhiberi conueniet; extractione radicis autem vlterius producta reperietur:

ſin. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} + \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$

coſ. $\frac{1}{2}$ AKH $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{at}}{2a} - \frac{t}{4a\sqrt{2}} - \frac{t\sqrt{t}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7tt}{32aa\sqrt{2}}$

ſin $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} + \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}$

coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{ax}}{2a} - \frac{x}{4a\sqrt{2}} - \frac{x\sqrt{x}}{4a\sqrt{a}} + \frac{7xx}{32aa\sqrt{2}}$.

Ex quibus debito modo combinatis colligitur: coſ. $\frac{1}{2}$ (BLH − AKH) $= 1 - \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2}{4a} + \frac{(\sqrt{t}-\sqrt{x})^2(7t+6\sqrt{tx}+7x)}{32aa}$ et coſ. $\frac{1}{2}$(BLH + AKH) $= \frac{\sqrt{t}+\sqrt{x}}{\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{t}-x\sqrt{x}}{2a\sqrt{2a}} - \frac{t\sqrt{x}-x\sqrt{t}}{4a\sqrt{2a}}$.

§. 776. Reſumamus ſuperiores ſubſtitutiones $\sqrt{t} + \sqrt{x} = q$ et $\sqrt{t} - \sqrt{x} = r$, vnde eſt $\sqrt{t} = \frac{q+r}{2}$ et $\sqrt{x} = \frac{q-r}{2}$; et fiet $7t + 6\sqrt{tx} + 7x = 5qq + 2rr$. Quibus ſubſtitutis prodibit coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) = coſ. OGL $= 1 - \frac{rr}{4a} + \frac{rr(5qq+2rr)}{32aa}$. At ex ſuperioribus eſt $q = \frac{g+3mb}{4\sqrt{2a}}$ et $r = \frac{4nb\sqrt{2a}}{g+3mb}$ et $a = \frac{(g+3mb)^2}{16\sqrt{6}(gg+2mgb-3mmbb-[illegible]nb)}$.

Atque

Digitized by Google

Atque ex his obtinebitur coſ. $OGL = 1 - \frac{8nnbb}{(g+3mb)^2} + \frac{240nnbb(g-mb)}{(g+3mb)^3} - \frac{416n^4b^4}{(g+3mb)^4}$. Ad vim ipſam venti P autem inueniendam erit: a coſ. $\frac{1}{2}(AKH + BLH) = \frac{q\sqrt{a}}{2} - \frac{q(7t-\sqrt{tx}+2x)}{4\sqrt{2a}} = \frac{q\sqrt{2a}}{2} - \frac{q(qq+3rr)}{8\sqrt{2a}}$ ideoque oritur a coſ. $\frac{1}{2}AOB = \frac{g+3mb}{8} - \frac{3}{4}(g-mb) = \frac{9mb-5g}{8}$. Ex quo inuenitur vis velum in directione GO vrgens $= P = \frac{cv(9mb-5g)}{3200} \cdot \frac{M}{V}$; quae multo propius ad veritatem accedit.

§. 777. Interim tamen patet, hanc approximationem vſurpari non poſſe, ſi vel b multo minor ſit quam g, vel etiam angulus BFH ſenſibiliter a recto diſcrepet. Quamobrem relicta approximatione praecedente, quae ex hypotheſi quod a ſit quantitas vehementer magna; quippe quae ſatis exigua imo nulla eſſe poteſt, ſi obliquitas anguli BFH ſit permagna, et iſte angulus penitus euaneſcat, etiamſi b non multo minor ſit quam g. Reſumamus igitur ſine vlla approximatione ſuperiores aequationes, quae erant: $g = \sqrt{(2at+tt)} + \sqrt{(2ax+xx)}$; $nb = t-x$; et applicatis u et y per logarithmos integratis fiet $e^{\frac{mb}{a}} aa = (a+t+\sqrt{(2at+tt)})(a+x+\sqrt{(2ax+xx)})$, denotante e numerum, cuius logarithmus $= 1$. Quodſi iam ponatur $t+x=p$, ob $t-x=nb$, prima aequatio reducta dabit $p = -2a + g\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb}+1)}$.

§. 778. Cum igitur ſit $t = \frac{p+nb}{2}$ et $x = \frac{p-nb}{2}$ erit $t = -a + \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb}+1)}$ atque $x = -a - \frac{nb}{2} + \frac{g}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb}+1)}$. Tum vero erit $\sqrt{(2at+tt)} = \frac{g}{2} + \frac{nb}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb}+1)}$ et $\sqrt{(2ax+xx} = \frac{g}{2} - \frac{nb}{2}\sqrt{(\frac{4aa}{gg-nnbb}+1)}$. Qui valores ſi in tertia aequatione

ſubſti-

ſubſtituantur, extracta radice quadrata erit $\frac{2a}{\surd(gg-nnbb)} e^{\frac{mb}{2a}} = 1 + \surd(\frac{4aa}{gg-nnbb} + 1)$, ex qua aequatione valorem ipſius a erui oportet. Ad hoc ponatur breuitatis ergo $\surd(gg-nnbb) = b$; et fiet $2ae^{\frac{mb}{2a}} = b + \surd(4aa+bb)$ ſeu $\frac{mb}{2a} = l\frac{b+\surd(4aa+bb)}{2a}$, logarithmo autem in ſeriem conuerſo fiet $\frac{mb}{2a} = \frac{b}{2a} - \frac{1\, b^3}{2\cdot 3\cdot 8\, a^3} + \frac{1\cdot 3\, b^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 32\, a^5} -$ etc. ſeu $mb = b - \frac{b^3}{6\cdot 4aa} + \frac{3\, b^5}{40\cdot 16\, a^4} - \frac{5\, b^7}{112\cdot 64\, a^6} +$ etc.

§. 779. Haec ſeries, ſi b non multo minor fuerit quam g, ſemper vehementer conuergit, nam angulus BFH propemodum fuerit rectus, erit radius oſculi a vehementer magnus. Sin autem angulus BFH fiat vehementer paruus, tum ob n proxime $= 1$, fiet b quantitas minima; vnde et hoc caſu ſeries valde conuergit, etiamſi a non ſit quantitas tantopere magna. Ob has ergo rationes erit proxime $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b}$. Ponatur autem $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + r$ erit $\frac{b^4}{16a^4} = \frac{36(b-mb)^2}{bb}$, et $r = \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$; vnde fiet propius $\frac{bb}{4aa} = \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{81(b-mb)^2}{5bb}$, hincque $2a = \frac{b\surd b}{\surd 6(b-mb)} - \frac{9\surd 6b(b-mb)}{40}$, quo valore tanquam ſatis accurato tuto vti licebit.

§. 780. Cognito itaque valore ipſius a, erit: ſin. $\frac{1}{2}$ AKH $= \surd\frac{a+t-\surd(2at+tt)}{2(a+t)} = \surd\frac{(g-nb)(\surd(4aa+bb)-b)}{2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, coſ. $\frac{1}{2}$ AKH $= \surd\frac{a+t+\surd(2at+tt)}{2(a+t)} = \surd\frac{(g+nb)(\surd(4aa+bb)+b)}{2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $= \surd\frac{a+x-\surd(2ax+xx)}{2(a+x)} = \surd\frac{(g+nb)(\surd(4aa+bb)-b)}{-2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$, coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \surd\frac{a+x+\surd(2ax+xx)}{2(a+x)} = \surd\frac{(g-nb)(\surd(4aa+bb)+b)}{-2nbb+2g\surd(4aa+bb)}$. Ex his pro horum angulorum ſumma ac differentia reperitur coſ. $\frac{1}{2}$ AKH. coſ. $\frac{1}{2}$ BLH $= \frac{b(\surd(4aa+bb)+b)}{2\surd(b^4+4aagg)}$, atque ſin. $\frac{1}{2}$ AKH. ſin. $\frac{1}{2}$ BLH $=$

b√.

$\frac{b(\sqrt{(4aa+bb)}-b)}{2\sqrt{(b^4+4aagg)}}$; vnde erit coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) = coſ. $\frac{1}{2}$ AOB = $\frac{bb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ et coſ. $\frac{1}{2}$(BLH − AKH) = coſ. OGK = $\frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$.

§. 781. Cum igitur recta OG ſit directio media vis venti, quam velum AHB ſuſtinet, ea cognoſcetur ex angulo OGK, quem haec directio vis venti cum vera venti directione VH facit, cuius anguli cum ſit coſinus = $\frac{b\sqrt{(4aa+bb)}}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ erit eiusdem ſinus = $\frac{2nab}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$, et tangens = $\frac{2nab}{b\sqrt{(4aa+bb)}}$. Fit autem ſubſtituto valore ipſius a ante inuento: coſ. OGK = $\sqrt{\frac{116bb-192mbb+81mmbb}{116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb}}$ ſin: OGK = $\frac{n\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$; ergo tang. OGK = $\frac{nb\sqrt{5}}{\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb)}}$. Hinc primo patet ſi ſit $n=0$ et $m=1$, ſeu ſi directio venti VH ad AB ſit normalis, fore angulum OGK = 0; at ſi angulus VFA fere euaneſcat, vt ſit proxime $n=1$ et $m=0$ erit tang. OGK = $\frac{b\sqrt{5}}{\sqrt{116(gg-bb)}}$; qui ergo angulus ſit rectus ſi $b=g$, hoc eſt ſi velum in planum extendatur.

§. 782. Cum deinde poſita vis venti in velum exertae quantitate = P, ſit P = $\frac{cv}{400}\cdot\frac{M}{V}\cdot a$ coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH), erit a coſ. $\frac{1}{2}$(AKH + BLH) = $\frac{abb}{\sqrt{(4aagg+b^4)}}$ = $\frac{bb}{2nb}$ ſin. OGH = $\frac{b^2\sqrt{5}}{2\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$: atque his ſubſtitutis fiet P = $\frac{bbcv}{800nb}\cdot\frac{M}{V}$ ſin. OGH, vel etiam P = $\frac{bbcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116bb-192mbb+81mmbb+5nnbb)}}$ exiſtente $bb=gg-nnbb$. Si ponatur $m=1$ et $n=0$, quo caſu ſit recta AB normalis ad directionem venti, erit $b=g$; ſitque P = $\frac{ggcvM\sqrt{5}}{800V\sqrt{(116gg-192gb+81bb)}}$, et ſi inſuper fiat $b=g$, erit P = $\frac{gcvM}{800V}$; quae eſt ea ipſa expreſſio, quam ſupra pro vi venti in velum planum normaliter impingentis inuenimus.

§. 783. Quoniam b ad g proxime accedit ponamus $b = g - u$ eritque u quantitas valde parua. Hinc ſit $bb = mmgg + 2nngu - nnuu$ et $b = mg + \frac{nnu}{m} - \frac{nnuu}{2m^3g}$; quibus ſubſtitutis prodit $\sqrt{(116bb - 192mbb + 81mmbb + 5nnbb)} = \sqrt{(5gg + 30gu - 15uu + \frac{96uu}{mm})}$. Ergo habebitur $P = \frac{Mcv(mmgg + 2nngu - nnuu)}{800V\sqrt{(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})}}$. Cum vero ſit

$(gg + 6gu - 3uu + \frac{96uu}{5mm})^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{g} - \frac{3u}{gg} + \frac{15uu}{g^3} - \frac{48uu}{5mmg^3}$ erit $P = \frac{Mcv}{800V}(mmg - 3mmu + 2nnu + \frac{uu}{5g}(27mm - 83nn))$ et ſin. $OGH = n(1 - \frac{4u}{g} + \frac{18uu}{gg} - \frac{48uu}{5mmgg}$ Quae formulae pro quouis caſu ſatis expedite tam mediam directionem quam ipſam quantitatem vis venti in velum impenſae praebebunt.

§. 784. At praeter angulum OGH, quem directio vis venti cum ipſa venti directione facit, ad verum mediae directionis OG ſitum definiendum noſſe oportet punctum C, in quo media directio vis venti OG rectam AB ſecat. Eſt autem ob angulum AOB bifariam ſectum, $AC : BC = AO : BO =$ ſin. ABO : ſin. BAO; qui anguli ex iam cognitis ita definiuntur, vt ſit ſin ABO = ſin. (BFH + BLH) et ſin. BAO = ſin. (BFH − AKH); ad quos exprimendos eſt ſin. BFH $= m$; et coſ. BFH $= n$ ſin. BLH $= \frac{2ab}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; coſ. BLH $= \frac{bg - nb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ ſin. AKH $= \frac{2ab}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$; coſ. AKH $= \frac{bg + nb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$. Ex quibus per angulorum compoſitionem impetrabimus ſin. ABO = ſin. (BFH + BLH) $= \frac{mbg + 2nab - mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{-nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$ ſin. BAO = ſin. (BFH − AKH) $= \frac{mbg - 2nab + mnb\sqrt{(4aa + bb)}}{nbb + g\sqrt{(4aa + bb)}}$.

§. 785.

Digitized by Google

§. 785. His ſinuum expreſſionibus ad communem denominatorem redactis, reperietur ratio AC : BC $= 2nnabbb - 4mnaagb + b(mbb + 2nag)\sqrt{(4aa+bb)} : 2nnabbb + 4mnaagb + b(mbb - 2nag)\sqrt{(4aa+bb)}$; quae commodius per factores ita exhibetur AC : BC $= 2nab(nbb - 2mag) + b(mbb + 2nag)\sqrt{(4aa+bb)} : 2nab(nbb + 2mag) + b(mbb - 2nag)\sqrt{(4aa+bb)}$, vnde fit AB : AC − BC $= 2nnabbb + mb^3\sqrt{(4aa+bb)} : -4mnaagb + 2nabg\sqrt{(4aa+bb)}$. Cum ergo ſit AB $= b$ fiet AC − BC $= \frac{2nngb(b\sqrt{(4aa+bb)}-2mab)}{bb(mb\sqrt{(4aa+bb)}+2nnab)} = \frac{2nngb(4maagg+mb^4-2abb\sqrt{(4aa+bb)})}{b^5(4aabb-nnaagg+mmb^4)}$. At eſt $\frac{\sqrt{(4aa+bb)}}{2a} = \sqrt{(1 + \frac{6(b-mb)}{b} + \frac{21(b-mb)^2}{5bb})} = 1 + \frac{3(b-mb)}{b} + \frac{12(b-mb)^2}{5bb}$ ergo AC − BC $= \frac{4nagb(b-mb)(2 + \frac{9(b-mb)}{5b})}{bb(mb + nnb + 3m(b-mb) + \frac{12m(b-mb)^2}{5b})} = 2ng(\frac{1}{3} - (\frac{4m}{3b} + \frac{3}{20b})(b-mb))\sqrt{\frac{6(b-mb)}{b}}$. Punctum ergo C ſemper quam minime a rectae AB puncto medio diſtabit.

§. 786. Sit vt ante poſuimus $b = g - u$, atque u quantitas reſpectu g vehementer parva, erit $b^2 = mmgg + 2nngu$, neglectis terminis, in quibus u plures vna habet dimenſiones, et $b = mg + \frac{nnu}{m}$; vnde erit $b - mb = mu + \frac{nnu}{m} = \frac{u}{m}$, et $\sqrt{\frac{b-mb}{b}} = \sqrt{\frac{u}{mmg}}$; ideoque $2a = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{6(b-mb)}} = \frac{mmg\sqrt{g}}{\sqrt{6u}}$ proxime. Hinc autem fiet AC − BC $= \frac{2ng}{3m}\sqrt{\frac{6u}{g}} = \frac{2n}{m}\sqrt{\frac{2}{3}gu}$. Quoniam porro ipſi a proportionalis eſt vis, quae requiritur ad velum in ſtatu ſuo conſeruandum, erit vis, quam funes velo in punctis A et B alligati ſuſtinent, vt $\frac{mm}{\sqrt{u}}$, hoc eſt directe vt quadratum

ſinus anguli VFA, quem directio venti cum recta AB conſtituit et reciproce vt radix quadrata ex *u*. Vnde conſtat velum non niſi vi infinita in ſuperficiem planam extendi poſſe; et hanc ob cauſam fieri nequit, vt vela vento inflata non incuruentur.

§. 787. In his, quae hactenus ſunt tradita, vela inſtar ſingulorum filorum, quae omnis latitudinis ſint expertia, conſiderauimus: quanquam enim infinita eiusmodi filorum ſibi parallelorum multitudo velum conſtituere videtur, tamen ſingula fila velum conſtituentia non eodem modo a vento afficiuntur, ac ſi eſſent ſolitaria; atque ſic, quae de curuatura filorum a vento impulſorum eruimus, non omni rigore ad vela transferri poſſunt. Primo enim, ſi filum ſolitarium vento exponitur, particulae aeris, poſtquam impegerunt, liberrime ad latera defluere, ſicque effectum inſequentium turbare non poſſunt; id quod in velo latitudine praedito fieri non poteſt. Aer igitur in vela iam impulſus quodammodo ſtagnabit, donec ad latera defluat; ſicque particulae aeris ſequentes non immediate in ſuperficiem veli impingere poterunt, ſed aerem ſtagnantem compriment atque ad latera depellent. Hocque adeo caſu vela non per impulſionem, ſed per ſolam preſſionem aeris magis condenſati maximam partem ſollicitantur, quae vis non easdem ſequetur leges, quas ante vi venti tribuimus.

§. 788. Haec conſideratio ſola efficit vt effectum venti in vela incurrentis definire non valeamus, quoniam is pendebit a quantitate voluminis aeris in veli cauitate quaſi ſtagnantis et tum ad oras veli prorumpentis, atque a condenſatione, quam iſte aer a vento inſequente patitur; quae

quae res ex iam cognitis principiis ad calculum adhuc revocari non poſſunt. Filamenta autem, quibus velum conſtat, longe aliam induent curuaturam, quia iam vis, qua ſingulae particulae vrgentur, non eſt vt quadratum ſinus obliquitatis, ſub qua ad venti directionem ſunt poſitae, ſed haec vis, quia compreſſione aeris adiacentis oritur, vbique ſere erit eadem, neque ab obliquitate pendebit. Tum vero non ſolum fila ſecundum veli longitudinem diſpoſita incuruabuntur, ſed etiam quae ſecundum latitudinem ſunt extenſa, quo fit vt in ſuperficiem vndique concauam efformetur. Hoc modo incuruatio filorum latitudinalium perturbabit incuruationem filorum longitudinalium, ita vt determinatio figurae totius veli ſit maxime ardua, vireſque analyſeos longe ſuperet.

§. 789. Superficies autem plana in concauam, qualem vela inflata exhibent, transmutari non poteſt, niſi ea vel in margine plicas edat, vel fila, ex quibus eſt compoſita, extenſionem admittant. Quod ad vtrumque incommodum attinet, vela ſolent robuſto filo laxiore cingi, vt dum eius interior pars extenditur, tota ſuperficies in planam abeat, quo remedio nimia velorum cauitas quae alioquin a vento induceretur, diminuitur et maximam partem tollitur. Illa autem filamentorum indoles, qua non ſolum inflecti ſed etiam in maiorem longitudinem extendi ſe patiuntur, efficit vt velis a vento longe alia figura inducatur, quam fieret, ſi filamenta omnis extenſionis eſſent expertia. Ob hanc cauſam etiam determinatio vis a vento exertae aliam ſequetur legem, ita vt, quae hactenus de hac re ſunt tradita non niſi vero prope, idque ſenſu ſatis laxo transferri queant. Cum autem

in hoc negotio practico determinatio non nimis longe a vero aberrans ſufficere poſſit, etiam his ſubtilioribus inueſtigationibus, per ſe vires calculi ſuperantibus, ſuperſedemus, ad alia progreſſuri, quae calculum non reſpuant.

§. 790. Imprimis autem grauitatis ratio erit habenda quae hactenus eſt praetermiſſa; qua fit vt velorum figura a vento orta non ſolum multum immutetur, ſed etiam vis venti ſe alio modo exerat. Quod diſcrimen clariſſime ſe manifeſtabit, ſi loco veli tabulam OA conſideremus, quae circa axem horizontalem O inſtar penduli ſit mobilis, in quam ventus ſecundum directionem VC, ad quam axis O ſit normalis, impingat. Si enim haec tabula eſſet grauitatis expers, tum ventus eam mox in ſitum horizontalem circa O deduceret, ita vt nulla amplius vis venti ſollicitans extaret. Sin autem grauitas adſit, per eam tabula ſitum quendam obliquum OA retinebit, ventumque, quaſi in A eſſet alligata, excipiet; vnde nauis ad motum vrgeatur; cuiusmodi ſollicitatio abeſſet, ſi tabula pondere careret. Hocque idem diſcrimen locum habebit, ſi tabula non fuerit rigida, ſed inſtar fili perfecte flexilis, hoc enim caſu grauitas pariter impediet, quo minus ea in ſitum horizontalem extendatur, ſed curuam formabit conuexam verſus venti plagam, in quam ventus vim nauem propellentem exercebit.

Tab. XXIII. fig. 1.

§ 791. Inquiramus igitur primum in effectum, quem ventus in tabulam rigidam exerceat, ſitque ſuperficies tabulae $= bb$; cuius centrum grauitatis exiſtat in puncto C, vbi ſimul ſitum ſit centrum grauitatis tabulae, ponatur autem tabulae pondus $=$ P. Tum vero ſit celeritas venti debita altitudini v, cum qua in directione VC in tabu-

tabulam irruat. Iam ponatur anguli BOA, in quo tabula a vento et grauitate ſimul ſollicitata perſiſtet, ſinus $= x$, et coſinus $= \sqrt{(1 - xx)} = y$, erit media directio venti CM normalis ad tabulae ſuperficiem; vis autem, qua ventus tabulam in hac directione vrgebit erit vt $v\,bb.\,(\text{ſin. VCO})^2 = v\,bbyy$. Scilicet ſi maſſae aquae, cuius volumen $=$ V pondus ſit $=$ M; aequabitur iſta venti vis ponderi $= \frac{M}{800\,V}.\ v\,bbyy$. Praeterea vero tabula a grauitate vrgetur vi $=$ P in directione verticali CP, quae duae vires, vt ſe mutuo in aequilibrio teneant neceſſe eſt, vt earum momenta reſpectu axis O ſint aequalia. Erit ergo $\frac{M}{800\,V}.\ v\,bbyy.\,\text{OC} = \text{P. OC. ſin. PCA} = \text{P}x.\ \text{OC}$, ideoque $\frac{M}{800\,V}.\ v\,bbyy = \text{P}x$. Ex qua aequatione angulus BOA determinabitur.

§. 792. Quoniam pes cubicus aquae circiter pondus habet 64 libr; ſi fierit V vnus pes cubicus, erit $\text{M} =$ 64 libr, et $\frac{800\,V}{M} = \frac{2}{25}$ libr. Quare ſi ſuperficies bb in pedibus quadratis, altitudo vero v celeritati venti debita in pedibus, ſimulque pondus tabulae P in libris exprimatur, habebitur iſta aequatio ad menſuras notas reuocata $\frac{2vbb}{25}yy = \text{P}x$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2vbb}{25} = \alpha$, et ob $yy = 1 - xx$ habebitur $\alpha - \alpha xx = \text{P}x$, ideoque $xx = \frac{-\text{P}x + \alpha}{\alpha}$, vnde fit $x = \frac{-\text{P} \pm \sqrt{(\text{PP} + 4\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Duplicem haec ſolutio praebet valorem pro x ſeu ſinu anguli BOA; at cum alter valor negatiuus fiat vnitate, qua ſinus totus indicatur, maior, erit iſte angulus imaginarius. Quare habebitur anguli BOA ſinus $x = \frac{\sqrt{(\text{PP} + 4\alpha\alpha)} - \text{P}}{2\alpha} = \sqrt{(1 + \frac{\text{PP}}{4\alpha\alpha})} - \frac{\text{P}}{2\alpha}$, vnde, cum α et P quantitates homogeneas pondera ſcili-

ſcilicet denotent, angulus BOA definiri poterit. Vt ſi fuerit $P : \alpha = 3 : 2$ erit $x = \frac{1}{2}$ et angulus BOA fiet 30°.

§ 793. Quo autem pateat, quantam vim ipſa nauis, in qua eiusmodi tabula fuerit ſuſpenſa, ſuſtineat, videndum eſt, quanta vis requiratur ad tabulam in ſitu hoc, in quem a vento redigitur, conſeruandam. Scilicet ſi tabula in O ope funis ad malum fuerit alligata, inueſtigandum eſt, quanta vi et in quanam directione hic funis vrgeatur. Ad hoc reſoluatur vis grauitatis P in binas laterales, alteram in directione CA, alteram in directione ad hanc normali, atque perſpicuum hanc poſteriorem a vi venti CM omnino deſtrui. Reſtat ergo prior vis ex reſolutione grauitatis orta, cuius directio eſt CA, quae erit $= Py$: haec itaque vis a fune debet ſuſtineri; ex quo perſpicitur funem in directione tabulae Oa extendi vi $= Py$; ex cuius reſolutoine in Ob et $O\alpha$ ſequitur nauem in O propulſum iri vi $= Pxy$. Cum vero ſit $x = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$ erit $yy = \frac{P}{\alpha} \left(\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}\right)$ ideoque nauis propelletur vi $= P\left(\sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{P}{\alpha}}$.

§. 794. Hinc patet a poſteriori, hoc eſt ex angulo BOA ad quem tabula a vento inclinatur, cognoſci poſſe vim, qua nauis propelletur. Cum enim haec vis ſit $= Pxy$, atque $2xy$ praebeat ſinum dupli anguli AOB, erit haec vis ad dimidium pondus tabulae, vti ſinus dupli anguli AOB ad ſinum totum. Haec ergo vis erit ceteris paribus maxima, ſi angulus AOB fuerit ſemirectus, hocque caſu vis nauem propellens aequabitur ſemiſſi ponderis tabulae. Erit ergo $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, hincque $\frac{vhh\sqrt{2}}{2g} = P$. Quamobrem ſi tabulae tam pondus quam ſuperficies fuerint data, de-

determinari poterit certa venti celeritas, qua nauis vehementiſſime propelletur, quae reſultabit ex aequatione $v = \frac{25P}{bb\sqrt{2}}$; quae cum P detur in libris et bb in pedibus quadratis oſtendit eum ventum maximum producere effectum qui vno minuto ſecundo percurrat ſpatium $= \sqrt{1104,854 \frac{P}{bb}} = 33,2393 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ pedum. Quodſi autem celeritas venti ſit data atque ventus vno minuto ſecundo n pedes conficiat, quo tabula maximam vim excipiat debet eſſe $\frac{P}{bb} = \frac{nn}{1104,854} = \frac{905097 \cdot nn}{1000000000}$.

§. 795. Huiusmodi igitur tabula commode adhiberi poterit ad venti celeritatem abſolutam explorandam. Cognitis enim pondere tabulae P in libris, quam eius ſuperficie bb in pedibus quadratis, obſeruetur angulus BOA; ad quem tabula inclinatur, cuius ſinus ſit $= x$ et coſinus $= y$; poſito ſinu toto $= 1$ hinc ſtatim eruitur altitudo venti celeritati debita $v = \frac{25Px}{2bbyy}$; atque ideo ventus vno minuto ſecundo conficiet ſpatium $27,9508 \sqrt{\frac{x}{yy} \cdot \frac{P}{bb}}$ pedum. Quo autem anguli declinationum BOA a ventis maxime conſuetis neque nimis fiant magni neque nimis parui, fiat circiter $\frac{P}{bb} = 1$; quo facto celeritas venti ex obſeruato angulo BOA ita cognoſcetur. Fiat vt radix quadrata ex coſinu anguli BOA ad radicem quadratam ex tangente anguli BOA ita numerus $27,9508 \sqrt{\frac{P}{bb}}$ ad quartum, qui numerus deſignabit numerum pedum, quem ventus vno minuto ſecundo abſoluit, quae operatio per logarithmos facillime expedietur.

§. 796. Anemometron hoc in ſuo genere perfectiſſimum praedicare haud dubito, cum non ſolum vtrum alius ventus alio ſit fortior, oſtendat, ſed etiam quantum ſpatium datus ventus vno minuto ſecundo percurrat, in-

dicet. Conſtructioni eius practicae hic non admodum immorari conuenit, cum artifex intelligens facile perſpiciat, quomodo eius perfectio augeri queat. Hic tantum annotaſſe ſufficiat, hoc anemometrum cum ſolitis tritonibus, quibus plaga venti indicari ſolet, ita combinari poſſe, vt tabula OA perpetuo directe vento opponatur; hocque pacto eodem inſtrumento tam plagam venti, quam ipſam eius celeritatem cognoſcere licebit. Praeterea expediet tabulae OA figuram oblongam potius tribuere, quam curtatam, quo pro eadem ſuperficie interuallum OA longius reddatur, ſicque quantitas anguli BOA facilius dignoſci queat, quod ope arcus circularis in gradus diuiſi et in B fixi ſatis commode fiet, tum vero ſi in vno huius arcus latere gradus notantur, in altero latere numerus pedum quos ventus hanc inclinationem producens, vno minuto ſec. percurrit, congrue adſcribetur.

§. 797. Imprimis autem hic notandum eſt, centrum grauitatis ipſius tabulae et centrum grauitatis ſuperficiei eius in idem punctum incidere debere, id quod, ſi tabula ex materia homogenea conficiatur et vbique eadem praedita ſit craſſitie quam minima, ſponte vſu venit. Quodſi autem centrum grauitatis tabulae diſcrepet a centro grauitatis ſuperficiei ipſius alius prorſus orietur effectus ac diuerſus ab eo, quem modo determinauimus. Sit igitur primo, vt ante poſuimus, pondus tabulae OA $= P$, eius ſuperficies $= bb$, celeritas venti in directione VC impingentis ſit debita altitudini v, et anguli BOA, ad quem tabula a vento declinatur, ſit ſinus $= x$ coſinus $= y$. Deinde vero ſit C centrum grauitatis ſuperficiei tabulae et eius ab axe O diſtantia OC $= a$; centrum grauitatis

Tab. XXIII. fig. 2.

autem

autem ſoliditatis tabulae ſit in G, eiusque ab axe O diſtantia $OG = b$. His poſitis videamus, quantum et in aequalitas interuallorum a et b determinationes ante inventas ſit perturbatura.

§. 798. Ex vi venti $CM = \frac{M}{800\gamma} \cdot vbbyy$ naſcitur ad tabulam circa O conuertendam momentum $\frac{M}{800\gamma} \cdot avbbyy$, cui aequale eſſe debet momentum ex vi grauitatis ortum, quod eſt $= Pbx$, vnde habetur iſta aequatio $\frac{M}{800\gamma}\, avbbyy = Pbx$, vel ſi pondus P in libris et magnitudines in pedibus exprimantur haec $\frac{2avbb}{25b} yy = Px$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{2avbb}{25b} = \alpha$, habebitur vt ante $\alpha yy = Px$, hincque $x = \sqrt{(1 + \frac{PP}{4\alpha\alpha})} - \frac{P}{2\alpha}$. Reſoluatur vis grauitatis P in laterales GQ et GA inter ſe normales, erit vis $GQ = Px$ et vis $GA = Py$; hinc ad tabulam in O continendam requiritur primum vis Op in directione AO, $= Py$, tum vero inſuper vis normalis $Oq =$ vi CM − vi $GQ = \frac{2vbb}{25} yy - Px = \frac{\alpha b}{a} yy - Px$; a quibus viribus nauis propelletur vi $= Pxy + \frac{\alpha b}{a} y^3 - Pxy = \frac{b}{a} Pxy$. Erit ergo vt ante vis propellens ceteris paribus vt ſinus dupli anguli AOB, at cum hac ratione inſuper coniungi debet ratio $\frac{OG}{OC}$.

§ 799. Sit nunc tabula, quam hactenus rigidam poſuimus, perfecte flexilis, ſeu ſit filum graue BMYA in B ſuſpenſum, ventum in directione horizontali VY excipiens, cuius celeritas debita ſit altitudini v, in A autem filum hoc firmiter ſit alligatum; ſeu ſollicitetur duabus viribus $AE = E$ et $AF = F$ quae ſint tantae, vt filum BMA in hoc ſtatu incuruato, qui ipſi cum a vento tum a grauitate inducitur, continere valeant, quarum virium al- Tab. XXIII. fig. 3.

 tera

tera AE ſit verticalis, altera AF horizontalis, quibus ſimul ſumtis aequiualebit vis AG per diagonalem parallelogrammi EF indicata. Sumatur recta verticalis AP pro axe, ac ponatur abſciſſa $AP = x$, applicata $PM = y$; atque longitudo curuae $AM = s$. Tribuatur huic filo latitudo $= c$, vt velum repraeſentet, ſitque tota longitudo $AMB = a$, ideoque ſuperficies $= ac$; totius autem veli pondus ſit $= P$; vnde cum velum vniformiter craſſum vbique ponatur; erit ponduſculum cuiuslibet elementi $Mm = ds$, ad pondus P vti eſt ds ad a; conſequenter elementi ds ponduſculum erit $= \frac{Pds}{a}$.

§. 800. Qnoniam velum ponitur perfecte flexile, vt in ſtatu permanente verſetur, neceſſe eſt, vt virium ſollicitantium momenta, quae ad filum flectendum tendunt, vbique ſe deſtruant. Vidimus autem ſupra (757) ſummam momentorum omnium a vento ortorum, quibus filum circa M dextrorſum vrgeatur eſſe $= \int dx \int p\,dx + \int dy \int p\,dy$, exiſtente $p = \frac{cv}{100} \cdot \frac{M}{V} \cdot \frac{dx^2}{ds^2}$; ponatur breuitatis gratia $\frac{cv}{100} \cdot \frac{M}{V} = \alpha$, vt ſit $p = \frac{\alpha dx^2}{ds^2}$; eritque a vi venti momentum dextrorſum inflectere conans $= \alpha \int dx \int \frac{dx^3}{ds^2} + \alpha \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2}$. A viribus autem E et F oritur momentum filum circa M ſiniſtrorſum inflectere annitens $= Fx - Ey$; vnde niſi grauitas adeſſet, haec duo momenta inter ſe aequalia eſſe oporteret. Sicque prodiit ſupra illa aequatio, qua natura curuae, quae velo grauitatis experti a vento imprimitur, determinabatur. Haec autem curua vehementer ab actione grauitatis, vnde pariter momentum filum dextrorſum inflectere conans, naſcitur.

§. 801.

§. 801. Ad hoc momentum a grauitate oriundum debito modo definiendum ſumatur quoduis fili elementum intermedium Yy pro quo ſit $AX = \xi$; $XY = \Phi$; et $Yy = d\omega$; erit vt ante vidimus pondusculum elementi $Yy = \frac{Pd\omega}{a}$, quo verticaliter deorſum ſecundum directionem YR ſollicitatur; hinc filum circa M dextrorſum vrgebitur momento $= \frac{Pd\omega}{a}(y - \Phi)$. Omnium ergo horum momentorum ſumma erit $= \frac{P}{a}(y\int d\omega - \int \Phi d\omega)$ quae quidem a grauitate portionis AY oritur. Integrum ergo momentum a toto filo AM ortum prodibit, ſi punctum Y in M transferatur, quo fit $\omega = s$; et $\Phi = y$. Hinc erit momentum totum a grauitate ortum, et filum dextrorſum circa M flectere conans $= \frac{P}{a}(y\int ds - \int y ds) = \frac{P}{a} \int s dy$. Quae vis ſi ſola adeſſet, ſeu ventus flare ceſſaret, filo induceret curuam catenariam, quae a velaria aliter non differt, niſi quod illius axis ſit verticalis huius vero horizontalis.

§. 802. His igitur momentis rite collectis pro curua AMB iſta conficietur aequatio $\alpha \int dx \int \frac{dx^2}{ds^2} + \alpha \int dy \int \frac{dx^2 dy}{ds^2} + \frac{P}{a}\int s dy = Fx - Ey$. Ad quam commodius tractandam ponatur breuitatis gratia $\frac{\alpha dx^2}{ds^2} = p$, vt ſit $\int dx \int p dx + \int dy \int p dy + \frac{P}{a}\int s dy = Fx - Ey$. Differentietur haec aequatio, et habebitur: $dx \int p dx + dy \int p dy + \frac{Psdy}{a} = Fdx - Edy$, quae poſito dx conſtante denuo differentiata dat: $pdx^2 + pdy^2 + ddy \int p dy + \frac{Psddy}{a} + \frac{Pdsdy}{a} = -Eddy$; ſiue ſi per ddy diuidatur $\frac{pds^2}{ddy} + \int p dy + \frac{Ps}{a} + \frac{Pdsdy}{a\,ddy} + E = 0$. Differentietur tertio prodibitque ob $dsdds = dyddy$ haec aequatio $2pdy - \frac{pds^2 d^3y}{ddy^2} + \frac{ds^2 dp}{ddy} + pdy + \frac{2Pds}{a}$

Digitized by Google

$\frac{2Pds}{a} + \frac{Pdy^2}{ads} - \frac{Pdsdyd^3y}{addy^2} = 0$; quae per $\frac{ddy}{ds^2}$ multiplicata dat $dp + \frac{2pdyddy}{ds^2} - \frac{pd^3y}{ddy} + \frac{2Pddy}{as} + \frac{Pdy^2ddy}{ads^3} - \frac{Pdyd^3y}{aasddy} = 0$.

§. 803. Aequatio haec reſpectu ad p habito ergo integrabilis reddetur, ſi multiplicetur per $\frac{ds^3}{ddy}$ eritque $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{P}{a}\int(2ds^2 + dy^2 - \frac{ds^2dyd^3y}{ddy^2}) = Cdx$. At ſigni ſummatorii integrale exhiberi poteſt, quo facto erit $\frac{pds^3}{ddy} + \frac{Pds^2dy}{addy} + \frac{Pxdx}{a} = Cdx$ vnde $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Cum autem ſit $pds^2 = \alpha dx^2$ erit $\alpha dx^2 + \frac{Pdyds}{\alpha} + \frac{Pxdxddy}{ads} = \frac{Cdxddy}{ds}$. Ponamus $dy = qdx$ erit $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$ et $ddy = dqdx$; quibus ſubſtitutis fit $\alpha dx + \frac{Pqdx\sqrt{(1+qq)}}{a} + \frac{Pxdq}{a\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cdq}{\sqrt{(1+qq)}}$, quae per $\alpha + \frac{Pq\sqrt{(1+qq)}}{\alpha}$ diuiſa dat $dx + \frac{Pxdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}} = \frac{Cadq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$ vnde fit $\frac{dx}{Ca-Px} = \frac{dq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$, ex qua aequatione cum variabiles x et q ſint a ſe inuicem ſeparatae, determinari poterit valor ipſius x per q; hincque etiam y et s dabitur per q propter $dy = qdx$ et $ds = dx\sqrt{(1+qq)}$.

§. 804. Erit ergo $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{-Pdq}{(\alpha a+Pq\sqrt{(1+qq)})\sqrt{(1+qq)}}$. Ponatur $\sqrt{(1+qq)} = q+r$, erit $r = \sqrt{(1+qq)} - q$ et $q = \frac{1-rr}{2r}$ porroque $\sqrt{(1+qq)} = \frac{1+rr}{2r}$ et $dq = \frac{-dr(1+rr)}{2rr}$, ex quibus ſubſtitutionibus fit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{4Prdr}{P+4\alpha arr-Pr^4} = \frac{-4P^2rdr}{P^2r^4-4\alpha aPrr-PP}$. Cum autem ſit $P^2r^4 - 4\alpha aPrr - PP = (Prr - 2\alpha a + \sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})(Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)})$, erit $\frac{-Pdx}{Ca-Px} = \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}} - \frac{2Qrdr}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, fitque $Q = \frac{PP}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$. Qua propter per logarithmos integrando prodibit $l\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{P}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}\, l\frac{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}$, vnde ad numeros regrediendo fit $Ca - Px = Da$

$(\frac{Prr}{Prr}$

$\left(\frac{Prr-2\alpha a+\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}{Prr-2\alpha a-\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}}\right)P:\sqrt{}P^2+4\alpha^2a^2)$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{P}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}} = m$ et $\frac{2\alpha a}{\sqrt{(P^2+4\alpha^2a^2)}} = n$ erit $m^2+n^2=1$, et m et n conſiderari poterunt tanquam ſinus et coſinus anguli cuiusdam determinati, eritque $Ca - Px = Da \left(\frac{mrr-n+1}{mrr-n-1}\right)^m$.

§. 805. Ex hac aequatione porro fit $\frac{mrr-n+1}{mrr-n-1} = \left(\frac{Ca-Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}}$

et $rr = \dfrac{(n+1)\left(\frac{Ca-Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - n + 1}{m\left(\left(\frac{Ca-Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right)}$, dabitur ergo r per x,

et cum ſit $q = \frac{1-rr}{2r}$, reperietur q per x; quo cognito oritur $y = \int q\,dx$ et $s = \int dx\sqrt{}(1+qq) = y + \int r\,dx$; ſicque adeo curua quaeſita conſtrui poterit. Ad conſtantes vero C et D determinandas ex aequationum (802) prima et ſecunda conſtat factis x et $y=0$, fore $\frac{F}{E} = \frac{dy}{dx} = q$; ex tertia autem facto $x = y = a$, fit $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = -E\,ddy$, et ex (803) eſt in eadem hypotheſi $p\,ds^2 + \frac{P\,ds\,dy}{a} = \frac{C\,dx\,ddy}{ds}$; vnde fit $C = \frac{-E\,ds}{dx} = -E\sqrt{}(1+qq)$. Cum autem ſit $q = \frac{F}{E}$, ſi vim totam AG $= \sqrt{}(E^2+F^2)$ ponamus $= G$ erit $\sqrt{}(1+qq) = \frac{G}{E}$; ideoque $C = -G$. Deinde ob $r = \sqrt{}(1+qq) - q$, facto $x = 0$ erit $r = \frac{G-F}{E}$ ex aequatione autem vltima ob $C = -G$, fit $\frac{mrr-n+1}{mrr-n-1} = \left(\frac{-G}{D}\right)^{\frac{1}{m}}$ ideoque $\frac{-G}{D} = \left(\frac{m(G-F)^2+(1-n)E^2}{m(G-F)^2-(1+n)E^2}\right)^m$, ac propterea $D = -G\left(\frac{m(G-F)^2-(1+n)E^2}{m(G-F)^2+(1-n)E^2}\right)^m$.

§. 806.

§. 806. His definitis conſtantibus C et D aequationem pro curua ingredientibus, fiet $\frac{Ca-Px}{Da} = \frac{Ga+Px}{Ga}\left(\frac{m(G-F)^2+(1-n)E^2}{m(G-F)^2-(1+n)E^2}\right)^m$, ideoque $\left(\frac{Ca-Px}{Da}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m(G-F)^2+(1-n)E^2}{m(G-F)^2-(1+n)E^2}\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ pro quo valore determinato ſi ſcribamus X erit $rr = \frac{n(X-1)+X+1}{m(X-1)}$, et $r = \frac{\surd(mn(X-1)^2+m(X^2-1))}{m(X-1)}$, vnde fit $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{(m-n)(X-1)-X-1}{2\surd(mn(X-1)^2+m(X^2-1))}$; et $\surd(1+qq) = \frac{1+rr}{2r} = \frac{(m+n)(X-1)+X+1}{2\surd(mn\,X-1)^2+m(X^2-1))}$. Fiet ergo $q = \frac{dy}{dx} = 0$ ſeu tangens curuae verticalis, vbi fit $(m-n)(X-1) = X+1$ ſeu $(m-n-1)X = m-n+1$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}$. Hoc ergo caſu valor ipſius x innoteſcet ex hac aequatione $1 + \frac{Px}{Ga} = \left(\frac{m(G-F)^2-(1+n)E^2}{m(G-F)^2+(1-n)E^2}\right)^m \left(\frac{m-n+1}{m-n-1}\right)^m$. Tangens curuae autem fit horizontalis ſi vel ſit $X = 1$ vel $X = \frac{n-1}{n+1}$.

§. 807. Quoniam puncto M in A translato fit $\frac{dy}{dx} = \frac{F}{E}$, perſpicuum eſt directionem vis AG eſſe tangentem curuae in A. Hinc cognita ratione E : F in quouis curuae puncto M inclinatio tangentis ad horizontem poteſt inueniri, eo quod $\frac{dy}{dx} = q$ per abſciſſam x determinatur. Ponamus autem vim velum in A retinentem euaneſcere, ita vt ſit $G = 0$; qui caſus locum habebit ſi velum in B inſtar penduli ſuſpendatur, ventusque in id incurrat. Erit ergo ob P quantitatem finitam $\frac{Ga+Px}{Ga}$ quantitas infinita, hincque $X = \infty$; vnde prodibit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{m-n-1}{2\surd m(n+1)} =$ quantitati conſtanti. Ex quo intelligitur velum in planum extendi atque a vento inſtar tabulae rigidae a ſitu verticali declinari. Quod quidem ex ſupra allatis facile perſpicitur cum ſi tabula ſit vbique vniformiter craſſa, in ſtatu inclinato vis venti cum grauitate ita

in

Digitized by Google

in aequilibrio conſiſtat, vt inde nulla oriatur vis, quae tabulam, etiamſi flexilis eſſet, inflectere conaretur.

§. 808. Quando autem vis filum in A retinens G non eſt nulla, tangens curuae alicubi erit verticalis, niſi grauitas ſit nulla, in hoc ergo loco capiatur punctum A, eritque vis $F = 0$ et $E = G$; ideoque $X = \frac{m-n+1}{m-n-1}\left(\frac{Ga+Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} = \frac{m-n+1}{m-n-1}\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$; quae quantitas idcirco ob m et n vnitate minores, erit negatiua; applicatae autem PM et pm pariter ob ſitum contrarium erunt negatiuae. Hinc Tab. XXIII. fig. 4.

$$\text{igitur fit } rr = \frac{(n+1)(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} - (1-n)(1+n-m)}{m(m-n+1)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + m(1+n-m)}$$

$$= \frac{(1+m+n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m-n}{(1+m-n)\left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}} + 1-m+n} \quad \text{ob } 1-nn = mm.$$

Sit breuitatis gratia $S = \left(1+\frac{Px}{Ga}\right)^{\frac{1}{m}}$ erit $rr = \frac{(1+m+n)S+1-m-n}{(1+m-n)S+1-m+n}$ et $r = \frac{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}{(1+m-n)S+1-m+n}$ hincque $q = \frac{1-rr}{2r} = \frac{n-nS}{\sqrt{(2m(1+m)SS+4nnS-2m(1-m))}}$, qui valor ob $S > 1$ negatiuus luculenter indicat $\frac{dy}{dx}$, hincque ipſam applicatam y eſſe negatiuam. Meminiſſe autem oportet eſſe $\frac{m}{n} = \frac{P}{2aa}$, et $\alpha = \frac{cv}{100} \cdot \frac{M}{V}$.

§. 809. Cum ſit $r = \sqrt{(1+qq)} - q = \frac{ds-dy}{dx} = \sqrt{\frac{ds-dy}{ds+dy}}$ erit curuae tangens horizontalis, vbi eſt $r = 0$, vel etiam $n = \infty$ Hoc ergo euenit ſi capiatur $S = \frac{m+n-1}{m+n+1}$ vel $S = \frac{m-n-1}{m-n+1}$ vtroque enim caſu fit $q = \infty$; eſt vero alter ipſius S valor affirmatiuus alter negatiuus;

qui poſterior, cum poteſtati poſitiuae $(1 + \frac{Px}{Ga})^{\frac{1}{m}}$ aequari nequeat, eſt imaginarius. Erit ergo $\frac{m+n-1}{m+n+1} = (1 + \frac{Px}{Ga})^{\frac{1}{m}}$ et $\frac{Px}{Ga} = (\frac{m+n-1}{m+n+1})^m - 1$, ideoque $x = \frac{Ga}{P}(\frac{m+n-1}{m+n+1})^m - \frac{Ga}{P}$ qui valor eſt negatiuus; habebit ergo curua B A b in ramo inferiore A b tantum puta in b tangentem horizontalem, a quo loco curua rurſus aſſcendit. Ramus autem ſuperior A B in infinitum aſſcendit, facto enim $x = \infty$, fit quoque $S = \infty$, ideoque $q = \frac{dy}{dx} = \frac{-n}{\sqrt{m(1+m)}} = -\sqrt{\frac{1-m}{2m}}$; tum ſcilicet tangens cum horizontali VA faciet angulum cuius tangens $= \sqrt{\frac{2m}{1-m}}$; ideoque ſinus $= \sqrt{\frac{2m}{1+m}}$ et coſinus $= \sqrt{\frac{1-m}{1+m}}$.

Tab. XXIII. fig. 5. §. 810. Si ventus deſuper in directione verticali PA in velum MAm incideret, tum ipſi, ſi grauitate careret, eandem imprimeret curuam, quam ſola grauitas demto vento produceret, id quod congruentia inter curuas catenariam et velariam docet. Quodſi ergo tum grauitas quam ventus iſte deſuper veniens ſimul agant, dubium eſt nullum, quin velo eadem curuatura inducatur, quam ab vtraque vi ſeorſim reciperet. Ad hunc ergo caſum calculum accommodemus, quo clarius eius conſenſus cum veritate perſpiciatur. Sit igitur axe AP per curuae punctum imum A ſumto, quo caſu fit $E = 0$ et $F = G$, abſciſſa $AP = x$, $PM = y$ et arcus $AM = s$, reliquae vero litterae a, P, et α easdem retineant ſignificationes, quas ſupra habebant; quibus poſitis manifeſtum eſt, calculum in (802) datum huc transferri, ſi modo ponatur $p = \frac{\alpha dy^2}{ds^2}$ loco $\frac{\alpha dx^2}{ds^2}$, quippe quo pacto directio venti ad angulum rectum mutatur.

§. 811.

Digitized by Google

§. 811. Cum igitur ob $C = -G$ peruentum ſit ad hanc aequationem $pds^2 + \frac{Pdyds}{a} + \frac{Pxdxddy}{ads} + \frac{Gdxddy}{ds} = 0$, erit $\alpha a dy^2 + Pdyds + \frac{Pxdxddy + Gadxddy}{ds} = 0$. Ponatur $dy = qdx$, ſitque $\sqrt{(1+qq)} = q + r$ ſeu $q = \frac{1-rr}{2r}$, fiet facta ſubſtitutione $\frac{dx}{Ga+Px} = \frac{4rdr}{(1-rr)(P+\alpha a+(P-\alpha a)rr)}$, cuius integrale eſt $\frac{1}{P} l \frac{Ga+Px}{Da} = \frac{1}{P} l \frac{P+\alpha a+(P-\alpha a)rr}{1-rr}$, fit autem, cum poſito $x = 0$ fieri debeat $r = 0$, conſtans $D = \frac{G}{P+\alpha a}$; quare erit $\frac{Ga+Px}{Ga} = \frac{P+\alpha a+(P-\alpha a)rr}{(P+\alpha a)(1-rr)}$ hincque $rr = \frac{(P+\alpha a)x}{2Ga+(P+\alpha a)x}$. Tum vero prodit $q = \frac{dy}{dx} = \frac{Ga}{\sqrt{(2Ga(P+\alpha a)x+(P+\alpha a)^2xx)}}$. Scribatur breuitatis ergo b pro $\frac{Ga}{P+\alpha a}$, erit $dy = \frac{bdx}{\sqrt{(2bx+xx)}}$ quae aequatio manifeſto eſt pro curua catenaria; quemadmodum id quidem recte ex congruentia curuae velariae cum catenaria coniectauimus.

Cap. X.

DE MALORVM CONSTITVTIONE.

§. 812.

Si nauis velorum ope, in quae ventus incurrat, propelli debeat, nauem ita inſtrui oportet, vt vela firmiter expandi, ſicque vento exponi atque pro lubitu dirigi queant. Quem in finem mali in nauibus conſtitui debent, qui cum ſupra nauem ad inſignem altitudinem aſſurgant, loca praebent idonea, quibus vela alligentur, atque extendantur. Vim igitur quam ventus in vela exerit, quoniam cum malis ſunt connexa, immediate mali ſuſtinebunt, hocque modo nauis perinde promouebitur, ac ſi vis aequalis malis eſſet applicata. Quo circa neceſſe eſt, vt mali in naui firmiſſime collocentur, et cum naui, quaſi vnum corpus omnis flexionis expers conſtituant, vt ipſa nauis eandem vim ſentiat, qua mali ſollicitantur. Cum igitur primum mali in ſpina nauis ceu parte fortiſſima ſint collocati, tum ope funium ſatis robuſtorum tam vtrinque ad latera nauis, quam proram ac puppim verſus alligantur, vt in nullam plagam inclinari queant, quin ſimul funes ad oppoſitam plagam extenſi rumpantur. Quodſi ergo funes ſint ſatis fortes, mali firmiter in ſtatu ſuo perſeuerabunt, atque ad nauem propellendam erunt accommodati.

§. 813. Quo maiorem autem vim mali ſuſtinent, eo non ſolum firmius funium robuſtorum ope alligati atque ad nauem affirmati eſſe debent, ſed etiam ipſi mali ſatis fortes eſſe, atque adeo ex valido arboris trunco confici debent, vt ne ipſi a viribus ſollicitantibus flectantur, vel adeo diſrumpantur. Quamobrem in maioribus nauibus; cum ſinguli arborum trunci ſatis virium non habeant; plures ſibi

inuicem

Digitized by Google

inuicem ſecundum longitudinem inſeruntur, vt hoc modo mali multo maioris altitudinis, quam erant arbores, obtineantur; quin etiam ſubinde craſſities malorum duabus pluribusue arboribus coniungendis augeri ſolet. Sic in maximis nauibus mali ex ternis arboribus ſibi inuicem ſuperimpoſitis conſtant, quae arbores propterea fortiſſime inter ſe coniungi debent, vt iunctura cuiusue generis impetibus ſuſtinendis par ſit. Summa ergo cura erit adhibenda, vt mali, tam ſatis habeant roboris ipſi, quam vt ope funium firmiſſime alligentur, hocque modo quaſi cum naui vnum corpus rigidum conſtituant, adſtruantur.

§. 814. Quamuis autem ex theoria vtilia praecepta deriuari poſſent ope funium malos quam firmiſſime alligandi, tamen cum hoc argumentum, per experientiam ſatis inueſtigatum videatur, id praetermitto; atque tanquam poſtulatum hic aſſumo naues iam ita malis eſſe inſtructas, vt vires ſollicitantes malos neque inflectere, neque adeo ſubuertere valeant. Ad malos igitur vela antennarum ope alligantur atque in datam plagam extenduntur, vt ventum ſiue directe ſiue ſub data obliquitate excipiant. Velis autem quantum fieri poteſt extenſis, vt a vento quamminime incuruentur innoteſcet tam media directio quam magnitudo vis, quam ventus in ſingula vela exerit; quae vis cum a malis ſuſtineatur, ipſa nauis ab eadem vi et ſecundum eandem directionem ad motum ſollicitabitur. Quotcunque igitur fuerint vela, vires quas ſingula ſuſtinent, in vnam ſummam colligi, atque adeo vna vel duae vel ad ſummum tres vires omnibus aequiualentes exhiberi poterunt, quibus nauis ſollicitetur; hocque mo-

do ſollicitatio nauis a velorum conſideratione reuocabitur atque ad vires abſolutas reducetur.

§. 815. Collocentur autem mali in medio nauis, ſeu in plano verticali nauem ſecundum longitudinem in duas partes ſimiles et aequales diuidente; hancobrem ſi vela vtrinque circa malum quemque aequaliter eſſent extenſa, media directio vis venti in vela exertae per medium
Tab. XXIV. fig. 1. cuiusque mali tranſiret. Euenit autem plerumque in minoribus et ſaepe numero etiam in maioribus nauibus, vt vela ad vnam tantum mali partem extendantur, vti figura citata indicat; quo caſu media directio vis venti non per malum MN, ſed per centrum grauitatis g, veli $acdb$ tranſibit; ad cuius ſuperficiem erit normalis, ſi quidem fuerit maxime extenſum. Vtroque autem caſu, ſiue vela vtrinque aequaliter extendantur, ſiue ad vnam tantum partem, plerumque ſitum verticalem tenere ſolent, ita vt media directio vis venti fiat horizontalis; ſic igitur quotcunque velis nauis fuerit inſtructa, vis totalis, qua vrgebitur, habebit directionem horizontalem; quae eſt maxime idonea ad nauem propellendam. Atque ob hanc cauſam non conuenit vela ad horizontem inclinari; quia tali ſitu inclinato et minor vis a vento, quippe cuius directio eſt horizontalis, exciperetur, et minor vis ad nauem propellandam reſultaret, niſi ingens commodum inde proficiſcatur.

§. 816. His notatis, quo facilius doctrinam de malis pertractare, et quicquid ex idonea malorum conſtitutione ad perfectionem nauigationis redundat, perſcrutari queamus, conueniet ſeorſim vtrumque curſum nauis tam directum quam obliquum euoluere. In curſu enim obliquo praeter formam

Digitized by Google

formam nauis malorum poſitio plurimum confert, vt nauis maxime aduerſus ventum procedere queat; qui curſus, cum in nauibus vento propulſis praecipue intendatur, eo magis erit elaborandum, vt per idoneam malorum collocationem aptior reddatur ad curſum aduerſus venti plagam tum propius tum etiam celerius inſtituendum. Atque in hoc curſu imprimis gubernationem ſpectari oportet, quae per malorum poſitionem vel adiuuari vel impediri poteſt. In curſu autem directo efficiendum erit, vt nauis a dato vento quam celerrime promoueatur, idque ſine ſecuritatis detrimento; in vtroque enim curſu maxime eſt cauendum, ne a viribus, quas ventus in vela exerit, nauis nimium inclinetur. Quibus requiſitis quemadmodum maxime ſatisfieri poſſit, ex tractatione bipartita, qua primum curſum directum tum obliquum ſumus contemplaturi, commodiſſime cognoſcere poterimus.

§. 817. Ad curſum directum inſtituendum neceſſe eſt, vt directio vis ſollicitantis a puppi proram verſus tendat atque nauis axi longitudinali ſit parallela. Quare vel ſingulae velorum vires hanc directionem habere debebunt, vel ſaltem omnium media directio ita comparata eſſe debet, vt ſit axi nauis parallela. Quodſi ergo ſingula vela fuerint in planum extenſa, quia tum media directio vis venti ad ea eſt normalis, planities velorum ad axem nauis longitudinalem in curſu directo debet eſſe normalis; vel quantum alia ab hoc ſitu differant, tantundem alia in oppoſitum diſcrepare debent. Cum igitur in curſu directo tota vis nauem propellens directionem habeat axi nauis longitudinali parallelam, praeter ipſam huius vis quantitatem, contemplari oportet eius momenta in

in axes nauis latitudinalem et verticalem per centrum grauitatis ductos; in axem enim longitudinalem eius momentum erit nullum, quia directio vis huic axi eſt parallela. Atque ex his momentis patebit, quantum nauis cum antrorſum inclinetur tum in gyrum agatur circa axem verticalem.

§. 818. Sit igitur vis tota a vento velorum ope excepta $= P$, cuius directio ſit horizontalis atque axi nauis longitudinali parallela, huius ergo vis primus ac praecipuus effectus in nauis promotione ſecundum hanc eandem directionem conſumetur. In huius effectus productione tantum quantitas vis P ſpectatur, et perinde eſt in quonam loco ſit applicata, dummodo eius directio ſit axi nauis longitudinali parallela. Cum igitur nauis curſum directum ab hac vi nanciſcatur; conſiderari oportet reſiſtentiam prorae, quae aequalis ſit reſiſtentiae plani ff, quod pari velocitate directe contra aquam impingat. Ponatur celeritas quam nauis ab hac vi P accipit debita altitudini v, et aequabitur vis reſiſtentiae ponderi maſſae aqueae, cuius volumen $= ffv$. Vnde ſi nauis totius pondus ſit $= M$ et volumen aquae immerſum $= V$, erit vis reſiſtentiae $= \frac{Mffv}{V}$, cui cum vis propellens P ſit aequalis, habebitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$; ex qua patet celeritatem nauis acquiſitam tenere rationem ſubduplicatam vis propellentis P.

§. 819. Ex vi igitur propellente P et reſiſtentia nauis abſoluta ff inuenitur altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{PV}{Mff}$; ideoque ipſa celeritas. Indidem vero ex nauis celeritate et vi propellente P reperietur reſiſtentia abſoluta $ff = \frac{PV}{Mv}$; quae quidem omnia iam ſatis ſunt manifeſta. Videamus

mus igitur quomodo ex venti celeritate et directione vna cum velorum ſuperficie ipſa vis P exprimatur, quo facilius motus nauis datis velis inſtructae a dato vento oriundus determinari queat. Sit ergo BA axis nauis longitudinalis, Tab. XXIV. fig. 2. ad quem ſuperficies velorum, quam in planum extenſam aſſumo, ſit normalis; et repraeſentet recta EF velorum ſuperficies, quae ſit $= gg$. Tum vero ventus flet in directione VC celeritate debita altitudini k; atque anguli VCE, ſub quo ventus in vela incurrit, ſit ſinus $= m$ et coſinus $= n$; grauitas vero ſpecifica aeris ſit ad grauitatem ſpecificam aquae vt 1 ad i; erit quaſi $i = 800$.

§. 820. His iam poſitis, ſi nauis cum velis quieſceret foret vis venti in vela exerta aequalis ponderi maſſae aereae, cuius volumen $= mmggk$, hincque aequalis ponderi maſſae aqueae, cuius volumen $= \frac{mmggk}{i}$, ex quo vis venti foret $= \frac{Mmmggk}{iV} = P$: At quoniam nauis non quieſcit, ſed ſecundum directionem BA progreditur celeritate debita altitudini v, hoc motu ſeſe impetui venti quodammodo ſubducit, minoremque vim excipit, quam ſi quieſceret. Ad hanc vim determinandam capiatur in axe BA portio CN, quae ſit ad CV vt celeritas nauis ad celeritatem venti, nempe $CV : CN = \sqrt{k} : \sqrt{v}$: tum compleatur parallelogrammum VCNv et diagonalis Cv repraeſentabit tum directionem tum celeritatem venti, quem vela in hoc motu conſtituta actu ſentient. Erit ergo vis venti in vela nauis motae exerta $P = \frac{M(\text{ſin } v\text{CE})^2 gg . \text{C}v^2 . k}{iV . \text{CV}^2}$; angulus enim in ſuperiori caſu VCE abit in vCE; et cum ante altitudo venti celeritati debita eſſet $= k$ erit nunc $= \frac{\text{C}v^2 . k}{\text{CV}^2}$.

§. 821. Cum autem in triangulo CVv ſit ang CVv coſinus $=$ ſin. $VCE = m$ erit $Cv^2 = CV^2 + Vv^2 - 2CV.Vvm$ et ſin. $vCE = -$ coſ. $VvC = \frac{CV^2 - Vv^2 - Cv^2}{2Vv \cdot Cv} = \frac{m\,CV - Vv}{Cv}$ ideoque hoc valore loco ſin vCE ſubſtituto prodibit $P = \frac{M(mCV - Vv)^2 ggk}{iV \cdot CV^2}$. At ob $Vv = CN$ erit $CV : Vv = \sqrt{k} : \sqrt{v}$; ideoque $P = \frac{Mgg(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2}{iV}$; vnde patet vim a vento exceptam P continuò fore minorem, quo celerius nauis progrediatur, atque adeo euaneſceret, ſi nauis tanta celeritate progrederetur, vt eſſet $\sqrt{v} = m\sqrt{k}$, hoc eſt ſi celeritas nauis eſſet ad celeritatem venti, vt ſinus anguli VCE ad ſinum totum. Euaneſcente autem nauis celeritate $\sqrt{v}$ ſit vti ſupra iam oſtendimus $P = \frac{Mmmggk}{iV}$. Sic igitur, cum nauis iam quamcunque nacta fuerit celeritatem, vis dati venti in vela determinabitur.

§. 822. Cum igitur pro nauis celeritate habeamus aequationem $P = \frac{Mffv}{V}$ erit nunc $ffv = \frac{1}{i} gg(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ hincque $f\sqrt{i}\,\sqrt{v} = mg\sqrt{k} - g\sqrt{v}$; et $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{g + f\sqrt{i}}$, vbi erit proxime $\sqrt{i} = 28$. Si igitur ad obliquitatem directionis venti ſolum reſpiciamus, quia m eſt coſinus anguli VCB, quem directio venti cum directione nauis conſtituit, erit ceteris paribus celeritas nauis vt coſinus anguli, quem venti directio cum directione nauis comprehendit. Sin autem celeritatem venti tantum ſpectemus, erit celeritas nauis $\sqrt{v}$ celeritati venti $\sqrt{k}$ proportionalis. Quare ſi ſuperficies velorum gg et reſiſtentia nauis abſoluta ff ſeu figura prorae maneant eadem; erit celeritas nauis in ratione compoſita coſinus anguli VCB et celeritatis venti $\sqrt{k}$. Maximam ergo celeritatem nauis ab vento aeque celeri acquiret, ſi a puppi ſpiret; nullam vero habebit celeritatem,

Digitized by Google

tem; ſi directio venti ad directionem curſus fuerit normalis.

§. 823. Maneat nunc celeritas venti eiusque directio inuariata, et manifeſtum eſt ſi ſuperficies velorum gg in infinitum augeatur, nauem tamen maiorem celeritatem adipiſci non poſſe quam $= m \mathcal{V} k$. Sin autem eſſet $g = f \mathcal{V} i = 28 f$ ideoque $gg = 784 ff$, quae quidem velorum ſuperficies eſſet vehementer magna, tamen nauis dimidiam tantum venti celeritatem acciperet, ſi quidem ventus directe in vela irrueret, vt eſſet $m = 1$. Poſito autem $m = 1$ ſit $\mathcal{V} v = \frac{1}{\alpha} \mathcal{V} k$ erit $\alpha g = g + 28 f$, ideoque $g = \frac{28 f}{\alpha - 1}$ et tota velorum ſuperficies $gg = \frac{784 ff}{(\alpha - 1)^2}$. Ad datam igitur celeritatis venti partem naui imprimendam, oportet vt ſuperficies velorum gg ad reſiſtentiam abſolutam ff datam teneat rationem: quare quo minor fuerit reſiſtentia abſoluta, eo minori opus erit copia velorum; vt nauis eandam aſſequatur celeritatem: aucta autem reſiſtentia, velorum ſuperficies in eadem ratione augeri debebit.

§. 824. Quo haec clarius illuſtrentur, conſideremus nauem ad profunditatem 20 pedum aquae immerſam, erit eius latitudo circiter 50 pedum, et ſectio transuerſa ampliſſima 800 ped. quadratorum. Quare ſi ponamus reſiſtentiam abſolutam ob allongationem prorae octies fieri minorem, erit $ff = 100$, et $f = 10$. Velis autem, quae ad vnum malum extenduntur, tribuamus latitudinem 80 ped. et altitudinem parem 80 ped. vt eſſet $gg = 1600$ ped. quadr. Qnamuis enim altitudo pro hac latitudine multo maior eſſe ſoleat, tamen latitudo velorum continuo diminuitur vt tota ſuperficies vix ſit ſuperatura 1600 ped. quadr. Erit ergo $g = 40$. Quodſi nunc ventus di-

recte in vela impingat, erit $\sqrt{v} = \frac{40\sqrt{k}}{40+280} = \frac{1}{8}\sqrt{k}$; ſeu hoc caſu nauis acquiret octauam partem celeritatis venti. Hinc vt haec nauis ſingulis horis vnum milliare germanicum conficiat, qua celeritate ſingulis minutis ſecundis 6 pedes abſoluuntur, requiritur ventus, qui ſingulis ſecundis 48 ped. percurrat.

§. 825 Quae autem hic de diminutione effectus venti a motu nauis orta exponuntur, celeritatem venti abſolutam ſpectant, non eam, quae in ipſa naui ſentitur, ſcilicet ſi in loco extra nauem fixo obſeruetur venti celeritas $= \sqrt{k}$, et anguli, quem directio venti cum nauis directione conſtituit, coſinus ſit $= m$, tum erit vti vidimus $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{g+f\sqrt{i}}$. At qui in naui verſantur neque veram venti celeritatem neque eius directionem ſentiunt, atque ipſa vexilla nauis, iam illam alteratam venti directionem monſtrant, quae a motu nauis proficiſcitur. Quare ſi $\sqrt{k}$ denotet venti celeritatem, quae in naui percipitur, et m ſit ſinus anguli, ſub quo ventus hic apparens in vela impingit, erit vtique $\sqrt{v} = \frac{mg\sqrt{k}}{f\sqrt{i}}$. Eritque adeo celeritas nauis vt celeritas venti et ſinus m coniunctim et vt radix quadrata ex ſuperficie velorum per reſiſtentiam abſolutam ff diuiſa. Haec ergo regula ſimplicior adhiberi debebit; ſi motus nauis ex vento, qualis in naui apparet, definiri debeat.

Tab. XXIV. fig. 3. §. 826. Hinc expeditum nanciſcimur modum veram cuiusque venti celeritatem explorandi, ac ſpatium aſſignandi, quod quisque ventus dato tempore abſoluit. Veniat enim ventus in directione VC et ſit eius celeritas, quae quaeritur, $= \sqrt{k}$. Conſtruatur machina EFG vexillo, circa axem C liberrime mobili inſtructa, cuiusmodi ad venti

Digitized by Google

venti directionem explorandam fieri ſolent; haecque machina ſi in ſitu C quieſceret, ope indicis CG, cum vexillo mobilis indicaret veram venti directionem VG. Nunc autem haec machina ſecundum directionem AB ad ventum normali promoueatur data velocitate, qui motus ope inſtrumenti tractorii ad lubitum facile producetur. Sit haec celeritas machinae cognita $= V v$, qua vno minuto ſecundo ſpatium datum $= a$ abſoluatur; atque vexillum durante hoc motu poſteriora verſus declinabit ſitumque CM tenebit. Quare ſi durante motu index vexillo annexus ſiſtatur, eius ſitus CM innoteſcet, hincque angulus GCM. Quo cognito erit celeritas venti $V k$ ad celeritatem machinae $V v$ vt CN : MN = ſin. tot. ad tang. GCM, erit ergo $V k = \frac{V v}{tang. GCM}$: ventus vno minuto ſecundo abſoluet ſpatium $= \frac{a}{tang. GCM}$.

§. 827. Supra quidem iam modum expoſuimus venti celeritatem explorandi, ope tabulae circa axem horizontalem mobili, cuius inclinatio a ſitu verticali celeritatem venti indicabat. Quoniam vero hic modus ſupra traditus pendet a theoria reſiſtentiae, atque iſto nititur principio, quod impetus fluidi contra obſtaculum planum irruentis ſit in duplicata ratione celeritatis fluidi et ſinus anguli incidentiae; propter hanc cauſam dubius videri poteſt. Hic autem poſterior modus nulla eiusmodi hypotheſi, quae in dubium vocari queat, nititur, et hanc obrem veram celeritatem venti ita monſtrabit vt extra omne dubium collocetur. Quamobrem per hunc ipſum modum hic traditum, ille qui ſupra eſt propoſitus commode explorari; atque ex conſenſu vel diſſenſu ipſa hypotheſis, cui prior eſt ſuperſtructus, vel confirmari vel euerti poterit; quo

Digitized by Google

ipſo theoria impetus fluidorum magnopere perficietur.

§. 828. Si igitur ventus fuerit borealis, ſeu a borea auſtrum verſus progrediatur, atque nauis ab occaſu in ortum moueatur, his qui in naui ſunt ventus non borealis ſed verſus ortum declinans apparebit. Contra vero ſi nauis ab ortu in occaſum currat, ventus idem occaſum verſus declinare videbitur. Quodſi ergo ſpirante aquilone duae naues ſibi occurrant, quarum altera in ortum, altera in occaſum curſum dirigat ſuum, quamuis ambae ab eodem vento impellantur, tamen putabunt ventum in eadem regione diuerſum extare: atque altera alterius ventum ſibi potius optabit quam ſuum. Quae nauis enim verſus ortum progreditur, ventum mallet ab aquilone occaſum verſus declinantem, quali alteram nauem propelli exiſtimat: ſicque viciſſim haec altera nauis ſibi ventum, quo priorem vrgeri videt, expetet. Eo maius autem hoc diſcrimen apparebit, quo celerius vtraque promouetur.

§. 829. In naue igitur mota neque vera venti celeritas neque eius vera directio percipitur, et hancobrem ipſum nauis motum ex venti tam celeritate quam directione apparente definiri conueniet. Cum autem hoc pacto motus venti relatiuus ſentiatur, qualis eſt reſpectu nauis, manifeſtum eſt ab hoc motu relatiuo eundem in naui oriri debere effectum atque in naue quieſcente a vento, cuius motus abſolutus cum iſto relatiuo conſentiat. Quamobrem ſi celeritas venti in naui aeſtimata ſit debita altitudini k, atque ſinus anguli, ſub quo ventus in vela incidere obſeruatur, ſit $= m$, erit celeritas nauis abſoluta $V v = \frac{mg \surd k}{f \surd i}$; ceteris ergo paribus erit celeritas nauis vt ſinus m anguli, quem directio venti cum planitie velorum

facere

facere obſeruatur, ſeu vt coſinus anguli, quem directio venti apparens cum ipſius nauis longitudine conſtituit. Haec vero regula tantum locum habet, ſi omnia vela ad vnum malum fuerint extenſa et iuxta ſe poſita, neque vnum impediat, quominus ventus in reliqua incurrat; quod euenit, ſi vela per plures malos ſint extenſa. Hunc ergo caſum ſeorſim euolui oportet.

§. 830. Inſtructa ſit nauis duobus velis EF et *ef*, Fig. 4.
aequalibus inter ſe, atque ad axem nauis AB normaliter extenſis, ſit autem vtriusque veli figura parallelogrammum rectangulum, cuius latitudo $EF = ef = g$, et vtriusque altitudo $= a$; ſitque porro diſtantia horum velorum $Ce = c$, et reſiſtentia nauis abſoluta ponatur $= ff$. Venti autem celeritas vera ſit debita altitudini k. Veniat primum ventus directe a puppi in directione BC, atque manifeſtum eſt, velum poſterius EF ventum ita eſſe excepturum, vt in anterius *ef* nulla venti portio incurrat; nauisque igitur perinde promouebitur, ac ſi ſolum velum poſterius EF eſſet extenſum, cuius ſuperficies eſt $= ag$. Si igitur celeritas nauis ab hoc vento acquiſita ponatur debita altitudini v, erit venti celeritas, qua in velum EF irruit $= \sqrt{k} - \sqrt{v}$, vnde fiet $ffv = \frac{1}{i} ag (\sqrt{k} - \sqrt{v})^2$ et $f\sqrt{v} = \frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{i}} - \frac{\sqrt{agv}}{\sqrt{i}}$. Quamobrem erit celeritas venti $\sqrt{v} = \frac{\sqrt{agk}}{\sqrt{ag} + f\sqrt{i}}$, vbi valor ipſius $\sqrt{i}$ eſt circiter $= 28$.

§ 831. Quam primum autem ventus a directione BC deflectit, praeter velum poſterius EF quoque aliquam portionem veli anterioris ſtringet; quae portio eo maior erit, quo maior primum fuerit angulus BCV, tum vero etiam quo celerius nauis progrediatur. Si enim directio [illegible] vera ſit VC, quae cum axe nauis AB faciat angulum

gulum VCB, cuius ſinus $= n$, et coſinus $= m$; tum primo inſtanti quo nauis etiam nunc quieſcit, anterioris veli portio ek a vento ſtringetur, vt ſit anguli Eke ſinus $= m$, coſinus $= n$, ideoque $\frac{ek}{Ee} = \frac{n}{m}$, ſeu $ek = \frac{nc}{m}$. Statim vero ac nauis aliquam acquirit celeritatem directio venti relatiua mutatur, eiusque obliquitas augetur, ita vt ventus in directione vC in vela impingere cenſendus ſit. Hinc igitur ob maiorem angulum vCB cui angulus Eke eſt aequalis, maior pars ek veli anterioris ſtringetur; ideoque ob duplicem rationem impetus venti obliqui erit maior, ſi nauis duobus velis ſit inſtructa.

§. 832. Ad verum igitur venti obliqui effectum determinandum, ſumta CN, quae ſit ad VC vt celeritas nauis Vv ad celeritatem venti veram Vk, compleatur parallelogrammum $CVvN$, et diagonalis vC repraeſentabit cum directionem venti relatiuam, tum eius celeritatem. Sit anguli BCv ſinus $= \nu$; et coſinus $= \mu$; et ducta uEk ipſi vC parallela, erit ek portio veli anterioris a vento percurſa, ideoque habebitur $ek = \frac{\nu c}{\mu}$: ex quo tota velorum ſuperficies, quae impetum venti ſentiet erit $= a(g + \frac{\nu c}{\mu})$. Cum igitur anguli incidentiae vCE ſinus ſit $= \mu$, et altitudo celeritati debita $= \frac{Cv^2 . k}{CV^2}$, erit vis venti in vela exerta $= \frac{Cv^2 . k}{CV^2} \mu \mu a (g + \frac{\nu c}{\mu})$, quae aequalis eſt reſiſtentiae nauis $iffv$ denotante $i : 1$ rationem grauitatis ſpecificae aquae ad aerem. Vel ſi ponatur $CV = Vk$, et $CN = Vv$, quia in parallelogrammo $CVvN$ ratio tantum laterum ſpectatur erit $iffv = Cv^2 . \mu \mu a (g + \frac{\nu c}{\mu})$; vbi valores lineae Cv et ſinuum μ, ν, in quantitatibus cognitis k, v, m et n exprimi debent.

§. 833.

§. 833. Sit $Cv = \sqrt{z}$, et quia in triangulo CNv eſt ſinus anguli $CNv = n$, et coſ. $CNv = m$; itemque ſin. $BCv = \nu$ et coſ. $BCv = \mu$; erit $n : \nu = \sqrt{z} : \sqrt{k}$. Deinde vero ex natura triangulorum erit $z = k + v - 2m\sqrt{kv}$; et $k = z + v + 2\mu\sqrt{zv}$; vnde $\mu = \frac{k-z-v}{2\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{kv}-v}{\sqrt{zv}} = \frac{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}{\sqrt{z}}$. Cum igitur ſit $iffv = \mu\mu za\left(g + \frac{\nu c}{\mu}\right)$; erit $iffv = (m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2 a \left(g + \frac{\nu c}{\mu}\right)$; atque ob $\nu = \frac{n\sqrt{k}}{\sqrt{z}}$ erit $\frac{\nu}{\mu} = \frac{n\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$, quo valore loco $\frac{\nu}{\mu}$ ſubſtituto habebitur $ck = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k}-\sqrt{v}}$ et $iffv = ag(m\sqrt{k} - \sqrt{v})^2 + ac(m\sqrt{k} - \sqrt{v})\, n\sqrt{k} = mmagk - 2mag\sqrt{kv} + agv + mnack - nac\sqrt{kv}$; adeoque $v = \frac{-4mag\sqrt{kv} - 4nac\sqrt{kv} + 2mmagk + 2mnack}{2iff - 2ag}$ et $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{-2mag - nac + \sqrt{(nnaacc + 4imaff(mg+nc))}}{2iff - 2ag}$. Sin autem fuerit $ag = iff$ erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{m(mg+nc)}{2mg+nc}$.

§. 834. Ex caſu hoc quo $ag = iff$ intelligitur nauem a vento cum quadam obliquitate incurrente celerius propelli quam a vento directo: ſi enim angulus BCV fuerit minimus $= \Phi$ erit $n = \Phi$ et $m = 1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$, reiectis ob paruitatem altioribus ipſius Φ poteſtatibus. Hinc erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{(1-\Phi\Phi)g + \Phi c}{(2-\Phi\Phi)g + \Phi c} = \frac{1}{2} + \frac{\Phi c}{4g} - \frac{\Phi\Phi(2gg+cc)}{8gg}$, quae expreſſio maior eſt, quam ſi eſſet $\Phi = 0$, foret enim tantum $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{2}$. Creſcente ergo obliquitate venti creſcit celeritas nauis vsque ad datum terminum, quem cum attigerit celeritas iterum decreſcit: ideoque dabitur certus obliquitatis angulus, cui maxima celeritas nauis reſpondet, qui ex formula $\frac{mmg+mnc}{2mg+nc}$ differentiata elicitur. Prodit autem $0 = 2mmngg + 2mnncg - m^3cg + n^3cc$, vel ſi tangens anguli quaeſiti BCV ponatur $= t$ vt ſit $t = \frac{n}{m}$

Digitized by Google

erit $cct^3 + 2cgtt + 2ggt - cg = 0$, vnde ſit $\frac{c}{g} = \frac{1 - 2tt \pm \sqrt{(1 - 4tt - 4t^4)}}{2t^3}$.

§. 835. Debet ergo eſſe $1 - 4tt - 4t^4$ quantitas poſitiua, quae ſit $= \alpha$, vt ſit $1 - 4tt - 4t^4 = \alpha$, vnde fiet $(1 + 2tt)^2 = 2 - \alpha$ et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{(2-\alpha)} - 1}{2}}$. Patet itaque α minus eſſe debere quam 2, ne $\sqrt{(2 - \alpha)}$ fiat imaginarium; inſuper vero eſſe debet $\alpha < 1$, ne valor ipſius t fiat imaginarius. Cum autem t creſcat, decreſcente α, angulus obliquitatis BCV, cui maxima nauis celeritas reſpondet, erit maximus, ſi fiat $\alpha = v$; quo caſu erit $t = \sqrt{\frac{\sqrt{2} - 1}{2}} = 0{,}455089$, et angulus BCV $= 24^\circ, 28', 11''$; maior ergo eſſe nequit angulus BCV, cui maxima nauis celeritas reſpondet, ſi quidem fuerit $ag = iff$. Hoc vero caſu erit $\frac{c}{g} = \frac{1 - 2tt}{2t^3} = \frac{\sqrt{2}}{t} = 2\sqrt{(\sqrt{2} + 1)} = 3, 106$, nempe diſtantia velorum $Cc = c$ maior eſſe debet, quam latitudo velorum g ter ſumta, ſitque hoc caſu $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)}} = \frac{1}{1{,}553} = 0, 643$.

§. 836. Quae cum ita ſe habeant caſu $iff = ag$, videamus ſub quonam obliquitatis angulo idem ventus naui maximam celeritatem inducat generaliter; ſit itaque $iff = \delta ag$, et erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = \frac{-2mg - nc + \sqrt{(nncc + 4\delta mmgg + 4\delta mncg)}}{2g(\delta - 1)}$, quae differentiata poſito m et n variabili, et ſumto $t = \frac{n}{m}$ deducet ad hanc aequationem $(2gt - c)\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$; hincque ſumtis vtrinque quadratis habebitur $(\delta + 1)ccgt^4 \genfrac{}{}{0pt}{}{+4\delta cgg}{-c^3}t^3 \genfrac{}{}{0pt}{}{+4\delta g^3}{-2\delta ccg}tt - 4\delta cggt + \delta ccg = 0$ ita vt tangens t anguli quaeſiti BCV definiatur per aequationem biquadratam, quae ſi $\delta = 1$, diuidi poteſt per $2gt - c$ et

depri-

Digitized by Google

deprimitur ad aequationem cubicam praecedentem. Sub hoc igitur obliquitatis angulo, cuius tangens $= t$, nauis celerrime propelletur niſi forte portio veli ek maior evadat quam tota latitudo veli g. Cum autem ſit $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k} - \sqrt{v}}$ erit pro $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}$ valore ſuperiori ſubſtituto, $ek = \frac{2(\delta - 1)cgt}{2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}}$ qui valor ſi eſſet $> g$, conſequentia de motu celerrimo non amplius valeret.

§. 837. Ponamus ergo eſſe $ek = g$, quo vis venti fiat maxima, ſimulac totum velum anterius percutit; atque habebimus praeter ſuperiorem aequationem inuentam, hanc $2\delta ct - 2ct = 2\delta g + ct - \sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)}$ ſeu $\sqrt{(cctt + 4\delta cgt + 4\delta gg)} = 2\delta g + 3ct - 2\delta ct$, qui valor rationalis loco ſurdi in ſuperiori aequatione ſubſtitutus dabit $(2gt - c)(2\delta g + 3ct - 2\delta ct) = 4\delta ggt - 2\delta cg + 6cgtt - 3cct - 4\delta cgtt + 2\delta cct = 2\delta cgtt + 4\delta ggt - cct - 2\delta cg$, ſeu reducendo $6\delta cgtt - 6cgtt + 2cct - 2\delta cct = 0$, hinc per $2(\delta - 1)ct$ diuidendo fit $3gt = c$, et $t = \frac{c}{3g}$. Subſtituatur hic valor in vna praecedentium, eritque $\sqrt{(c^4 + 12\delta ccgg + 36\delta g^4)} = 6\delta gg - 2\delta cc + 3cc$, vnde elicitur $9\delta g^4 - 6\delta ccgg + \delta c^4 - 2c^4 = 0$ ſeu $(3\delta gg - \delta cc)^2 = 2\delta c^4$ et $\frac{gg}{cc} = \frac{\delta \pm \sqrt{2\delta}}{3\delta} = \frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}$. Conſequenter habebitur $\frac{g}{c} = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta} \pm \sqrt{2}}{3\sqrt{\delta}}}$, et $t = \sqrt{\frac{\sqrt{\delta}}{3\sqrt{\delta} \pm 3\sqrt{2}}}$ vbi ſi $\delta > 2$ duplex ſolutio locum habet.

§. 838. Quantam autem celeritatem nauis, ſi vela ad hanc normam fuerint diſpoſita, a vento obliquo ſit acceptura, commodiſſime ex aequatione $ek = \frac{nc\sqrt{k}}{m\sqrt{k} - \sqrt{v}} = g$ colligetur; quippe quae ſtatim praebet $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}} = m - \frac{nc}{g} =$

$m-3nt$ ob $t=\frac{c}{3g}$. Cum vero ſit $n=\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ et $m=\frac{1}{\sqrt{(1+tt)}}$ erit $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}=\frac{1-3tt}{\sqrt{(1+tt)}}$, quae ob $tt=\frac{\sqrt{\delta}}{3\sqrt{\delta}+3\sqrt{2}}=\frac{\delta}{3\delta+\sqrt{2\delta}}$, hincque $1-3tt=\frac{\sqrt{2\delta}}{3\delta+\sqrt{2\delta}}$; et $1+tt=\frac{4\delta+\sqrt{2\delta}}{3\delta+3\sqrt{2\delta}}$ dabit $\frac{v}{k}=\frac{6\delta}{(\delta+\sqrt{2\delta})(4\delta+3\sqrt{2\delta})}$ et $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{(4\delta+6+7\sqrt{2\delta})}}$ Quodſi autem ventus eadem celeritate a puppi in vela incurreret foret $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{k}}=\frac{\sqrt{ag}}{\sqrt{ag}+f\sqrt{i}}=\frac{1}{1+\sqrt{\delta}}$; ob $iff=\delta ag$; ſeu $\frac{v}{k}=\frac{1}{\delta+1+2\sqrt{\delta}}$; pro vento vero obliquo eſt $\frac{v}{k}=\frac{1}{1+\frac{2}{3}\delta+\frac{n}{8}\sqrt{2\delta}}$ quae expreſſio ob minorem denominatorem maior eſt quam illa. Hinc itaque vera ratio patet, cur nauis a vento aliquantum obliquo celerius promoueatur, quam a vento directo; quod phaenomenon nauigantes quotidie experiuntur.

§. 839. Si ventus ſecundum directionem nauis BA in vela impingat, poſtica tantum vela EF ferit, atque anteriora *ef* nullam prorſus venti vim ſuſtinent, hocque igitur caſu vela anteriora ſunt inutilia, niſi forte ſint latiora. Quare ſi ventus perpetuo a puppi flaret, ſufficeret nauem vnico malo inſtrui, atque ſuperuacaneum foret vel plures malos in naui conſtituere, vel iuxta eos vela extendere. Statim vero ac ventus oblique incidit, vela anteriora quoque ad nauem propellendam vim acquirunt, quoniam eorum portio quaedam *ek* a vento impellitur, quae portio eo erit maior quo magis diſtet velum anterius *ef* a poſteriori EF. Interim tamen portio *ek* a vento percuſſa non vltra totam veli latitudinem creſcere poteſt; quare ſi interuallum C*c* iam fuerit tantum vt totum velum *ef* vim venti ſentiat, tum etiamſi velum *ef* vlterius anteriora verſus remoueatur, tamen effectus venti

Digitized by Google

venti non augeretur. Hinc igitur pro data venti obliquitate diſtantia velorum $Cc = c$ maxime idonea definitur, quae tanta eſſe debet, vt ſit $\frac{g}{c}$ = tangenti anguli obliquitatis, ſub quo ventus flare obſeruatur.

§. 840. Si igitur fuerit VO directio, ſecundum quam ventus venire deprehenditur. Scilicet non ſit VO vera venti directio ſed ea, quam in naui habere videtur, et in qua in vela impingit. Pro hac ergo venti directione velum anterius *ef* ita aptiſſime conſtituetur, vt ventus id totum ſtringat, quod eueniet, ſi fuerit tangens anguli BOV ad ſinum totum vt latitudo velorum $EF = ef$ ad diſtantiam Cc. Atque ſi diſtantia haec Cc non ſit maior, inutile prorſus foret inter haec duo vela tertium $\varepsilon\sigma$ conſtituere; neque enim tale velum quicquam ad nauem celerius promouendam conferret. Ponamus namque eiusmodi velum $\varepsilon\sigma$ inter duo vela EF et *ef* expandi, atque manifeſtum eſt ventum quidem in eius portionem $\varepsilon\kappa$ impingere; at hoc ipſum velum impediet quo minus ventus integrum velum anterius *ef* ſtringat. Sollicitabit ſcilicet ventum eius portionem *ek* reliqua parte *kf* penitus relicta intacta. Cum igitur ſit $\varepsilon\kappa = kf$ ventus non maiorem vim ad nauem propellendam exeret, quam ſi velum intermedium $\varepsilon\sigma$ penitus abeſſet. Simul autem hinc intelligitur nullum incrementum vis venti obtineri, ſi plura vela inter extrema EF et *ef* extendantur. Tab. XXIV. fig. 5.

§. 841. Quemadmodum autem velis EF et *ef* ita ordinatis vti expoſuimus, inutile foret inter ea alia vela extendere, ita e contrario bono cum ſucceſſu vltra ea proram verſus plura vela vti $\varepsilon\sigma$ conſtituantur, quibus vis propellens non mediocriter augebitur. Sic ſi pro data Fig. 6.

Digitized by Google

venti obliquitate VE fuerit Cc debita duorum velorum diſtantia ad eandem diſtantiam $c\gamma = Cc$ tertium velum $\varepsilon\sigma$, vlteriusque quartum et quintum vtiliter conſtituetur, ſiquidem longitudo nauis id permittat. Atque ſi vela hanc teneant inter ſe diſtantiam, tanta vi nauis promovebitur, quam fieri poteſt, et ſuperuacaneum foret inter haec vela alia extendere; quippe quae vim a vento exceptam non augerent; niſi obliquitas venti maior euaderet. Interim tamen plura vela, quam haec regula poſtulat, vim venti non diminuunt; et quia aucta venti obliquitate, etiam vim propellentem adaugent, nimis magnus velorum numerus non penitus eſt reiiciendus.

§. 842. Hinc igitur pro data venti obliquitate, non ſolum interuallum inter bina vela ſe immediate ſequentia ſed etiam numerus velorum ac proinde numerus malorum determinari poterit. Sit enim anguli, quem directio venti cum directione nauis conſtituit, tangens $= t$; latitudo velorum quam vbique eandem aſſumo, $= g$, et diſtantia inter bina vela $Cc = c\gamma = c$; quia eſt $\frac{g}{c} = t$ erit haec diſtantia $c = \frac{g}{t}$ poſito ſinu toto $= 1$. Quodſi iam tota nauis longitudo, per quam vela extendere licet, quae ſit $= a$ diuidatur per $c = \frac{g}{t}$, quotus $\frac{at}{g}$ oſtendet quot eiusmodi interualla c ſecundum nauis longitudinem conſtituere liceat, et cum malorum numerus ſit vnitate maior, erit pro data venti obliquitate numerus malorum maxime idoneus $= 1 + \frac{at}{g}$. Hinc nempe intelligitur ſi nauis eſſet paucioribus malis inſtructa, eius motum minus futurum eſſe celerem; etiamſi autem plures mali conſtituerentur,

tamen

Digitized by Google

tamen nauem celerius non eſſe progreſſuram; ac propterea nauem tam velis quam malis inutiliter eſſe oneratam.

§. 843. Quoniam expreſſio $1+\frac{at}{g}$ indicat numerum malorum conuenientiſſimum pro data venti obliquitate cuius tangens eſt $=t$; manifeſtum eſt, quo maior fuerit venti obliquitas, eo plures malos vtiliter adhiberi poſſe. Conueniet autem numerum malorum ex maxima obliquitate venti, ſub qua curſum etiamnum directum conſeruare expedit, definire, propterea quod pro minori venti obliquitate idem malorum numerus, etſi nauis celeritatem non auget, eam tamen non diminuit. Expedit autem plerumque, ſi obliquitas venti maior euadat quam 60°, curſum obliquum potius inſtituere quam directum, et hancobrem maximus ipſius t valor non ſuperabit tangentem 60°, quae eſt $=\sqrt{3}$. Quare aptiſſimus malorum naui imponendorum numerus erit circiter $=1+\frac{a\sqrt{3}}{a}$, vel $=1+\frac{7a}{4g}$; vbi a non totam nauis longitudinem ſed diſtantiam inter malos extremos ſignificat

§. 844. Quo longior ergo eſt nauis manente eadem eius latitudine, a qua velorum latitudo g pendet, eo plures malos in ea collocari oportebit; ideoque eo maiorem vim a vento excipiet. Cum igitur acuta nauis longitudine eius reſiſtentia non augeatur, quo longior fuerit nauis, eo celerius a vento obliquo propelletur; quanquam a vento recto non maiorem celeritatem quam nauis breuior acquirit, hincque patet noua ratio, propter quam naues quam longiſſimas confici expedit. Solet autem fere in nauibus grandioribus longitudo a quadruplo eſſe maior quam latitudo, et velorum inferiorum latitudo prope modum duplo maior quam latitudo nauis, ita vt ſit $a=2g$;

vnde

Digitized by Google

vnde ſecundum regulam inuentam in eiusmodi nauibus 1 + 3½ ſeu 4 mali conſtitui deberent, eo quod *a* ob rationem allatam minor eſt quam tota nauis longitudo 2*g*. Inſtructae autem ſunt illae naues reuera quatuor malis, praeter tres enim malos proprie ſic dictos roſtrum quarti mali vicem ſuſtinet, quippe ex quo pariter vela extenduntur.

§. 845. Pendet autem, numerus malorum potiſſimum a latitudine velorum *g*, quae quo fuerit maior, eo magis numerus malorum reſtringitur, vnde naſcitur grauiſſima cauſa latitudinis velorum maxime augendae. Non ſolum autem per auctam velorum latitudinem hoc nanciſcimur commodum, vt numerus malorum diminuatur, ſed etiamſi ventus directe a puppi veniat, quo caſu anteriorum malorum vela iacent inutilia, nauis eo maiori vi propelletur, quo vela fuerint latiora; neque enim hoc caſu defectus velorum per numerum malorum compenſari poteſt. Quamuis autem inferius vela fiant latiſſima tamen ſuperiora verſus ſenſim confici debent arctiora, et hanc ob cauſam in ſublimi maiorem malorum numerum adeſſe expediret; in his igitur regionibus conueniet plura vela extendere, atque intra malos ad funes robuſtos alligare, quod ſubſidium in praxi vtiliter adhiberi ſolet.

Tab. XXV. fig. 1. §. 846. Quanquam hactenus omnia vela aeque lata poſuimus, tamen ſimili modo effectus, quem ventus in vela diuerſae latitudinis exerit, colligi poterit. Inſtructa enim ſit nauis AB duobus velis EF et *ef*, quorum poſterius EF latius ſit quam anterius *ef*. Hoc caſu manifeſtum eſt ab anteriori velo *ef* nullam prorſus vim a vento excipi, non ſolum ſi ventus directe a puppi veniat

Digitized by Google

niat, ſed etiam ſi habeat obliquitatem non maiorem quam eſt angulus EOB, quem recta E*e* per velorum terminos ducta cum axe nauis conſtituit. Niſi ergo obliquitas venti maior ſit iſto angulo, nauis non magis propelletur, quam ſi velum anterius *e f* plane abeſſet; atque tum demum a velo *e f* effectus orietur, cum obliquitas venti, ſeu angulus, quem eius directio cum axe nauis BA facit, fuerit maior quam angulus EOB. Prius autem totum velum anterius *e f* a vento non incitabitur, quam obliquitas venti ſuperet angulum E*o*B, cuius anguli tangens eſt $= \frac{EC + ec}{Ce}$. Anguli autem EOB, ſub quo velum anterius *e f* primum vim exerere incipit tangens eſt $= \frac{EC - ec}{Ce}$.

§. 847. Sin autem velum anterius *e f* latius ſit quam poſterius EF, tum ſi ventus directe impingat, praeter velum poſterius EF totum, anterioris veli partes *em* et *fn* venti vim ſentient, ſicque ob $EF = mn$, nauis perinde mouebiter, ac ſi velum poſterius EF prorſus eſſet ſublatum, ſolumque velum latius *e f* relinqueretur. Hocque modo velum poſterius quaſi inutile manebit, quoad venti obliquitas non excedat angulum *m*E*e* ſeu *n*F*f*, qui formatur a recta F*f*, velorum extremitates F, *f* iungente cum recta F*n* axi nauis parallela; quamdiu ergo tangens obliquitatis venti minor fuerit quam $\frac{nf}{Fn} = \frac{ec - EC}{Ce}$, ſine detrimento minus velum EF praetermittitur. At ſi venti obliquitas vltra hunc terminum augeatur, tum quidem vis propellens maior exiſtit quam a ſolo velo latiori, ante vero ambo vela tota a vento non incitabuntur, quam cum venti obliquitas maior euadit angulo E*o*B, cuius tangens eſt $= \frac{EC + ec}{Ce}$. Fig. 2.

Digitized by Google

§. 848. Si igitur eiuſmodi duo vela inaequalia ita diſponi debeant, vt datae obliquitatis ventus ea ambo penitus perſtringat, interuallum Cc tantum eſſe debebit, vt fiat $\frac{EC+ec}{Cc}$ = tang. obliquitatis datae pro vtroque caſu: ſcilicet ſi haec diſpoſitio requiratur pro venti obliquitate 60°, oportebit eſſe $Cc = \frac{EC+ec}{\sqrt{3}}$. Hinc igitur quotcunque vela per longitudinem nauis ita poterunt diſponi, vt omnia ſi ventus datam habeat obliquitatem, pleno vento inflentur. Sint enim vela $1\alpha 1$, $2\beta 2$, $3\gamma 3$; etc. latitudine data per longitudinem nauis BA ita diſponenda, vt cum venti obliquitas fuerit 60° aut maior omnia inflentur; initium fiat a puppi, vbi primum velum $1\alpha 1$ conſtituatur, cui adiungatur $1(2)$ = ſemiſſi ſequentis veli $\beta 2$ ac ducatur recta $(2)b$ cum axe BA faciens angulum 60°; eritque b locus ſecundi veli $2b2$, cui adiungatur $2(3) = \gamma 3$, et ducta ad eundem angulum recta $(3)c$ dabit locum veli tertii $3c3$. Porro apponatur $3(4) = \delta 4$ ducaturque $(4)d$, vt angulus $(4)d\beta$ ſit 60°, habebitur d locus quarti veli $4d4$, ex quo ſimili ratione locus veli quinti et ſequentium definietur; haecque operatio erit eadem ſi alius quicunque angulus obliquitatis loco 60° proponatur.

Fig. 3.

§. 849. Hinc totum interuallum inter velum primum $1a1$ et vltimum $5e5$ definiri, atque cum longitudine nauis comparari poterit, quo pateat, quot vela ratione latitudinis data nauis capere poſſit. Sit tangens anguli obliquitatis propoſitae $= t$, poſito ſinu toto $= 1$, eritque $ab = \frac{\alpha 1 + \beta 2}{t}$; $bc = \frac{\beta 2 + \gamma 3}{t}$; $cd = \frac{\gamma 3 + \delta 4}{t}$; et $de = \frac{\delta 4 + \epsilon 5}{t}$; vnde totum interuallum inter vela extrema erit

ae

Digitized by Google

$ae = \frac{\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3 + \delta_4 + \varepsilon_5}{t}$. Quare omnium velorum latitudines addantur, atque a ſumma ſubtrahatur ſemiſumma velorum primi et vltimi; quo facto reſiduum per tangentem t anguli propoſiti diuiſum dabit interuallum ae; ex quo cum tota nauis longitudo maior ſit quam hoc interuallum ae, ea cenſeri poterit aequalis ſummae omnium velorum latitudinum per tangentem t anguli diuiſae, ac viciſſim tota nauis longitudo AB per tangentem t multiplicata dabit ſummam omnium velorum latitudinum vtcunque eae inter ſe fuerint inaequales.

§. 850. Sic igitur definitur malorum numerus ex data velorum latitudine ac nauis longitudine, hocque modo maxime ſatisfiet illi requiſito principali, ſecundum quod naues maxima celeritate progredi debent. Hactenus enim tantum motum nauis progreſſiuum ſpectauimus, neque adhuc inueſtigauimus, quid reliqua nauis momenta, conuerſio ſcilicet circa axem verticalem, quo gubernatio continetur, et inclinatio circa axes horizontales ratione malorum poſtulent. Antequam autem huc reſpiciamus, quoniam circa altitudinem malorum nihil adhuc eſt definitum, notandum eſt ex ſola motus progreſſiui contemplatione altitudinem malorum minime determinari. Cum enim hoc loco id tantum ſit propoſitum, vt naui maxima celeritas concilietur hoc ipſum commodum eo magis obtinebitur, quo magis vis propellens augeatur. Hinc ergo vtique expediret ſummam malis altitudinem tribuere, quia hoc pacto quantitas velorum et vis a vento excepta plurimum multiplicaretur. Quamobrem ex hoc capite altitudini malorum non ſolum nulli limites ponuntur, ſed etiam mali quantum fieri poteſt; altiſſimi ſuadentur.

§ 851. Cum igitur ex motus progreſſiui contemplatione nihil amplius circa conſtitutionem malorum praecipiatur, reliqua momenta, ad quae in nauium conſtructione potiſſimum attendi oportet, perpendamus. Ac primo quidem patebit ex conuerſione nauis circa axem verticalem, nihil, quod ad malorum conſtitutionem ſpectet, determinari, ſi quidem vela ad ſingulos malos vtrinque aequaliter extendantur. Quoniam enim in curſu directo qui hic nobis eſt propoſitus, media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali eſt parallela, atque in ipſo plano diametrali exiſtit, ea ſimul per axem nauis verticalem tranſibit, hincque nullum habebit momentum ad nauem circa iſtum axem conuertendam. Quamobrem in hoc ſtatu gubernatio nauis a vi venti neque impedietur neque adiuuabitur; ſicque ſingula praecepta quae ſupra circa gubernationem nauium ſunt tradita manebunt inuariata.

§. 852. Longe aliter autem ratio erit comparata, ſi vela ad vnam tantum malorum partem extendantur, ſeu ita ſaltem, vt media directio vniuerſae vis a vento exceptae extra planum diametrale vel dextrorſum vel ſiniſtrorſum cadat. Tum enim vtique huius vis exiſtet momentum ad nauem de curſu ſuo declinandam. Scilicet ſi iſta media directio ad dextram cadat, prora nauis ſiniſtrorſum conuertetur, dextrorſum autem ſi media directio ad laeuam partem cadat. Iſte ergo effectus curſum nauis magnopere perturbans deſtrui deberet per actionem gubernaculi, quae ſaepenumero huic incommodo tollendo ne par quidem foret, nunquam autem ſine notabili celeritatis nauis detrimento exerceri poſſet. Quamobrem eiusmodi ve-

lorum

lorum ſtatus omnino eſt improbandus, haecque regula in velorum diſpoſitione ſedulo obſeruanda, vt ad vtramque partem aequalis a vento vis excipiatur, ſicque media directio per ipſum axem verticalem nauis tranſeat. Haec vero regula ideo etiam eo magis eſt tenenda, quod aequali velorum vtrinque diſpoſitione vis venti maxime augetur; nihil autem adhuc ſit repertum quod huius vis multiplicationem prohibeat.

§. 853. Huius generis autem incommodum vix euitari poteſt ſi ventus oblique in vela incidat. Quoniam enim vela tantopere extendere non licet, vt nulla prorſus curuatura ipſis a vento inducatur, vis venti in eam velorum partem, quae regioni venti eſt oppoſita, aliquanto maior exiſtet, propterea quod his locis ventus minori cum obliquitate in vela incidit. Hinc primo quidem media directio vis venti aliquantum a directione nauis declinabitur, vnde curſus nauis obliquus oriri deberet; tum vero etiam vis venti fortior erit in partes velorum a vento remotiores. Priori autem incommodo remedium afferetur, ſi vela aliquantulum ad ventum adducantur, hocque modo obliquitas incidentiae augeatur. Poſteriori vero incommodo, niſi gubernaculum ſine notabili detrimento occurrere valeat, obuiam ibitur, ſi in parte nauis vento viciniori vela vltra aequalitatem augeantur, quo per vim ad hanc partem alias praeualentem media directio totius vis in planum diametrale reducatur. Duplici autem hoc remedio tam curſus nauis directus conſeruabitur, quam nimia actio gubernaculi euitabitur.

§. 854. Perſpicuum autem porro eſt ab hac vi venti qualis ad curſum directum commode inſtituendum requiri-

tur, quantacunque demum ſit, nullam prorſus inclinationem nauis circa axem longitudinalem oriri poſſe. Cum enim media directio vis venti in planum diametrale navis incidere debeat, in quo ſimul axis nauis longitudinalis eſt poſitus, directio vis cum iſto axe in eodem plano iacebit, hincque nullum habebit momentum ad nauem circa hunc axem inclinandam. Neque etiam curuatura velorum hic vllum impedimentum affert, qua vti vidimus, media directio vis venti mutaretur, quoniam ſi remedia ante memorata adhibeantur, haec declinatio penitus tollitur. Interim tamen ſi quod momentum vis venti reſpectu axis longitudinalis reſultaret, inclinatio nauis hinc orivnda foret perexigua ac penitus contemnenda, cum nauis eadem in curſu obliquo multo maiora momenta reſpectu huius axis ſuſtinere debeat. Quamobrem iſta conſideratio hoc loco merito negligitur.

§. 855. Supereſt igitur, vt quemadmodum vim venti ratione inclinationis nauis circa axem latitudinalem comparatam eſſe oporteat, inquiramus, vnde maximi momenti limites deriuabuntur, quos in velorum multiplicatione atque malorum altitudine ſine ingenti periculo transgredi non liceat. Cum enim vis venti momentum reſpectu amborum reliquorum axium ſit nullum, eo maius erit reſpectu axis latitudinalis, niſi forte haec directio per ipſum nauis centrum grauitatis tranſeat. Quoniam vero centrum grauitatis nauis in eius corporis medium incidit vela autem ſupra nauis corpus extendantur, manifeſtum eſt, quo altius vela fuerint diſpoſita eo maius inde eſſe oriturum momentum ad nauem inclinandam. Quamobrem ex hoc capite tam copia velorum quam malorum alti-

altitudo, determinationem atque limites adipiſcetur, quibus cum ſuperioribus praeceptis coniunctis demum efficietur, vt nauis ſine periculo celerrimum motum ſit impetratura.

§. 856. Cum igitur a vi venti oriatur momentum ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam, inclinatio autem nimis magna ſit periculoſa, tanta venti vis, ab qua inclinatio periculoſa oriatur, tolerari nequit. Quamobrem ex maxima inclinatione, quam nauis ſine damno ſubire poteſt, magnitudo vis a vento excipendae determinabitur, neque vero hic tam quantitas ipſius vis venti definietur quam eius momentum reſpectu axis latitudinalis quod eſt productum ex ipſa hac vi in diſtantiam eius ab axe. Determinato ergo momento ipſa vis quantumvis augeri poſſet, dummodo altitudo eius mediae directionis ſupra centrum grauitatis nauis tantundem diminueretur. Ex quo ſtatim naſcitur vtiliſſima regula praecipiens; vt vela adhibeantur quam latiſſima; ſic enim eadem vniuerſorum velorum ſeruata ſuperficie directio media deorſum deducetur, eiusque momentum diminuetur. Maxime ergo nauigationi conſuleretur, ſi modus inueniretur velorum latitudinem ita magis augendi, vt tuto expandi ac ſine moleſtia tractari dirigique poſſent, qua in re vtique vna maxima nauium perfectio poſita eſſet.

§. 857. Verum inclinatio nauium non a ſola vi venti in vela exerta eiusue momento producitur, ſed etiam impetus aquae contra proram nauis allabentis plurimum confert ad inclinationem vel augendam vel minuendam. Vtriusque igitur vis momentum ante definiri oportet quam ipſam inclinationem inde oriendam aeſtimari liceat. Cognito autem hoc vtroque momento tanquam vera inclinatio-

nis

Digitized by Google

nis cauſa, tum demum ſtabilitas nauis eſt conſideranda, qua ipſe effectus determinatur atque inclinationis oriundae quantitas aſſignatur. Hoc igitur loco figura prorae, non amplius, quatenus ab ea reſiſtentia nauis pendet, in computum ingredietur, ſed etiam quatenus ab aqua vim excipit ſecundum directionem verticalem vnde ſatis notabile momentum reſpectu axis latitudinalis naſci debet. Atque his cum minima reſiſtentia coniunctis aptiſſima prorae figura pro nauibus vento propulſis colligetur.

Tab. XXV. fig. 4. §. 858. Repreſentet A*ab*B nauem curſu directo ſecundam *ba* progredientem, cuius A*a* ſit prora, B*b* puppis; in G autem ſitum ſit totius nauis centrum grauitatis; per quod tranſeat vel malus vel recta imaginaria verticalis D*p*. Sit PQ media directio totius vis a vento exceptae, ipſa autem vis huius magnitudo ponatur $=$ P, quae ſimul recta PQ indicetur. In hac ergo figura planum tabulae exhibebit nauis ſectionem verticalem per axem longitudinalem factam; vnde axis latitudinalis erit normalis ad hoc planum, ac per centrum grauitatis G tranſibit; ex quo momentum vis P ad nauem circa axem latitudinalem inclinandam erit $=$ P. PG, ſi quidem directio media vis venti PQ fuerit horizontalis, ſi enim directio PG cum recta D*p* angulum obliquum conſtitueret, expreſſio P. PG inſuper per ſinum huius anguli multiplicari deberet, poſito ſinu toto $= 1$. Aſſumam autem directionem PQ, vt plerumque fieri ſolet eſſe horizontalem, poſtmodum inueſtigaturus, quid declinatio huius directionis ab horizonte immutare valeat in concluſionibus hinc deducendis.

§. 859.

§. 859. Hinc conſideretur reſiſtentia, quam prora nauis aquam findens patitur, ac ponatur ad hoc celeritas nauis debita altitudini $= v$, quippe qua prora contra aquam impingit. Sit porro RS media directio reſiſtentiae aquae, vtcunque ad horizontem inclinata, cuius inclinatio pendet a figura prorae, vti in ſuperiori libro, vbi reſiſtentiam ad calculum reuocauimus, ſatis ſuperque eſt oſtenſum. Ponatur ergo ducta horizontali Rr anguli SRr ſinus $= m$, et coſinus $= n$ erit vis reſiſtentiae tota ad eius partem, qua motui nauis reſiſtit vt ſinus totus 1 ad n. Quodſi ergo, vt hactenus aſſumſimus, ſtatuatur reſiſtentia nauis abſoluta tanta, quantam pateretur ſuperficies plana ff directe eadem, qua nauis mouetur celeritate, contra aquam vibrata, erit reſiſtentiae vis motui nauis contraria $=$ ponderi voluminis aquae ffv, quod pondus ergo erit $= \frac{Mffv}{V}$, denotante M totius nauis pondus, ac V eius volumen ſub aqua merſum. Hinc itaque erit tota aquae in proram impingentis vis ſecundum directionem $RS = \frac{Mffv}{nV}$.

§. 860. Quoniam vero nauis curſum iam ad ſtatum permanentem reductum eſſe aſſumo, erit vtique vis propellens P aequalis reſiſtentiae aquae horizontali $\frac{Mffv}{V}$; vnde naſcitur haec aequatio $P = \frac{Mffv}{V}$ ex qua nauis celeritas ſupra eſt determinata, nunc autem indidem ex calculo eliminari poterit. Occurat enim directio RS rectae verticali Dp in puncto S, reſiſtentia aquae eundem exeret effectum, ac ſi nauis in S ſecundum directionem ST pelleretur a vi $ST = \frac{Mffv}{nV}$, vnde ob $P = \frac{Mffv}{V}$ erit haec vis $ST = \frac{P}{n}$, et anguli TSp ſinus erit $=$ coſ. $SRr = n$.

Quocirca momentum huius vis aquae ad nauem circa axem latitudinalem reclinandam erit $=$ vi ST. SG. ſin. TSp $=$ P. SG, ſicque omnino nauis circa axem latitudinalem inclinabitur, eiusque prora aquae profundius demergetur a virium momento P. PG $-$ P. SG $=$ P (PG $-$ SG). Scilicet ſi punctum S ſupra P cadat, prora non ſolum non demergetur ſed etiam eleuabitur, puppi magis depreſſa.

§. 861. Praeter hunc autem inclinationis effectum, quem deinceps fuſius perpendemus, tota nauis alleuabitur, et quaſi leuior reddetur. Cum enim vis ST directio ſit ad horizontem inclinata, ea reſoluatur in binas vires laterales, horizontalem Sq, et verticalem Sp; quarum illa motum nauis progreſſiuum afficit eſtque $= \frac{nffv}{V} = $ P haec vero Sp quae eſt $= \frac{mP}{n}$, totam nauem ſurſum trahet, cuius effectus proinde in hoc conſtabit, vt nauis ex aqua quaſi extrahatur, eiusque volumen aquae ſubmerſum diminuatur. Qui effectus ſatis debebit eſſe ſenſibilis, cum ſit aequalis ipſi $\frac{m}{n}$ P, ideoque idem praeſtet ac ſi nauis tanta onerum copia, quanta pondus habeat $= \frac{m}{n}$ P priuetur. Hoc igitur effectu ob minutum volumen aquae ſubmerſum reſiſtentia quidem minuetur, hincque nauis celeritas fiet maior; at quia plerumque naues non ſatis oneratae nimis paruam habere ſolent ſtabilitatem, etiam iſte effectus non ſemper pro tanto lucro eſt habendus, quam primo intuitu videatur.

§. 862. Cum igitur omnes naues, quae velis propelluntur, eiusmodi proris ſint inſtructae, vt media directio vis aquae proram impingentis non ſit horizontalis, ſed ſurſum dirigatur, perſpicuum eſt, omnes naues, ſtatim ac

a

a vento propelli incipiunt, leuiores fieri debere, minusque volumen aquae immerſum habere, quam ſi quieſcant, quod phaenomenon a nauigantibus luculenter animaduerti ſolet. Eo magis autem nauis alleuatur, quo celeriorem curſum adipiſcatur; tum enim vis a vento excepta P tanto fiet maior, ſimulque adeo onus $\frac{m}{n}$ P, quod de pondere nauis tollitur creſcit. Ceteris ergo paribus iſta alleuatio eo erit maior, quo maior fuerit angulus, rRS quippe cuius tangenti $\frac{m}{n}$ eſt proportionalis. Cum igitur ſit $P = \frac{Mffv}{V}$, erit pondus ab onere nauis ablatum $= \frac{mMffv}{nV}$, ideoque ſe habebit ad pondus nauis totum M vti eſt $\frac{m}{n}$ ffv ad V. Erit ergo alleuatio nauis in ratione compoſita quadrati celeritatis, reſiſtentiae nauis abſolutae ff et tangentis anguli rRS, quo media directio virium aquae ad horizontem Rr inclinatur.

§. 863. Si duae naues omnino concipiantur ſimiles, quarum latera homologa ſint vt C ad c; erunt tam ipſarum pondera M quam volumina aquae ſubmerſa V in ratione triplicata vt C^3 ad c^3; reſiſteutiae autem abſolutae ff erunt in ratione duplicata laterum homologorum ratio vero $\frac{m}{n}$ in vtraque erit eadem. Quare ſi hae naues aequali celeritate propelli ponantur, erunt pondera quibus hae naues diminuentur in ratione duplicata laterum homologorum hoc eſt vt CC ad cc. Quoniam autem ſectiones aquae eandem tenent rationem duplicatam, vtraque nauis per aequale ſpatium ex aqua extrahetur; ſcilicet ſi nauis maxima vnum pedem ſupra aquam attollitur nauis quoque minima illi prorſus ſimilis et aeque celeriter promota per ſpatium vnius pedis emerget; niſi quatenus per

Digitized by Google

iſtam eleuationem diſſimilem ſimilitudo ſtatus vtriusque nauis tollitur. Hinc ergo quo naues fuerint maiores, eo minus erit ſenſibilis iſte effectus ratione totius nauis; ideoque ſiue commodum ſiue incommodum inde oriundum eo minus euadet.

§. 864. Reuertamur autem ad malorum conſtitutionem, ac ponamus nauem malis inſtruendam iam eſſe paratam. Dabitur ergo in ea tam poſitio rectae verticalis D*p* per eius centrum grauitatis G ductae, quam directionis virium aquae RS; hincque adeo innoteſcet interſectio S duarum iſtarum linearum. Si iam vela ad tantam altitudinem extendantur, vt media directio vis a vento exceptae PQ per ipſum punctum S tranſeat, tum quantacunque fuerit vis venti, nullum prorſus ex ea naſcetur momentum ad nauem inclinandam; hincque nauis quam maxima vi propulſa in ſitu prorſus erecto ſine vlla inclinatione curſum abſoluet. Sin autem vela non ad tantam altitudinem pertingant, ideoque media directio vis venti PQ infra S cadat tum non ſolum prora nauis non magis immergetur, ſed etiam eleuabitur, puppi magis immerſa. Quodſi autem tanta malis altitudo tribuatur, vt media directo vis venti PQ ſupra punctum S cadat, tum nauis ita circa axem latitudinalem inclinabitur, vt prora profundius immergatur.

§. 865. Cum igitur ille nauis curſus ſit optimus ſimulque tutiſſimus, qui cum nulla inclinatione eſt coniunctus, conueniet vela ad tantam altitudinem extendi, vt media directio vis a vento excipiendae per ipſum punctum S tranſeat. Quamobrem hinc aptiſſima malorum altitudo definietur, ſi enim omnes malos eiusdem altitudi-

titudinis ponamus, atque ad ſingulos per totam altitudinem vela aeque lata extendi ſumamus, cadet vtique media directio vis venti in mediam cuiusque mali altitudinem. Quo circa ſi vela in loco extendi incipiant, fiet tota malorum altitudo $= DS + CS = CD + 2 CS$. Sin autem omnes mali non ſint aeque alti, cuiusmodi inaequalitatem ſtructura atque indoles nauis omnino requirit, tum quantum breuiores ab altitudine $CD + 2 CS$ deficiunt, tantum longiores eam ſuperare debebunt, ita vt ſi ſinguli velis inſtruantur, altitudo omnium media aequetur longitudini $CD + 2 CS$; vel ſi ſingulorum malorum altitudines addantur ac ſumma per malorum numerum diuidatur, prodire debebit altitudo haec inuenta $CD + 2 CS$.

§. 866. Malos autem in naui conſtituendos omnino inaequalis tam altitudinis quam craſſitiei eſſe oportet, cum enim nauis non vbique aequali oneri ſuſtentando par ſit, atque circa medium plus habeat roboris quam in extremitatibus, mali extremi minores eſſe debebunt quam medii. Deinde ſi quemuis malum ſeorſim ſpectemus, is inſtar columnae inferius multo fortior ſit neceſſe eſt quam ſuperius, quo fit vt in regionibus ſublimioribus non tantam velorum vim ſuſtinere poſſit quam ad nauis ſuperficiem. Hinc vela, quo magis eleuentur, minorem latitudinem habent; et cum plura vela ad eundem malum extendi ſoleant, inferiora ratione latitudinis ſuperiora multum ſuperabunt, vnde fit vt centrum grauitatis ſeu virium velorum non in mediam altitudinem, ſed aliquantum inferius cadat. Euismodi vero velorum ſuperiora verſus coarctationem etiam operationis ratio poſtulat, quia vela nimis lata in ſublimi poſita non ad lubitum tractari et dirigi

 liceret.

liceret. Iſtam ergo malorum velorumque dipoſitionem a ſtatu nauis ac tractandi facilitate pendentem hic fuſius non attingam.

§. 867. Si iam vela inſtar trianguli iſoſcelis ſurſum conuergerent, atque centrum grauitatis ſuperficiei velorum poſitum eſſet in S, tum tota velorum altitudo foret $= 3\,CS$, vnde malorum altitudo prodiret $= CD + 3\,CS$; quae ſi vela vbique eſſent aeque lata tantum erat $= CD + 2\,CS$. Cum igitur reuera vela neque ſint vbique aeque lata, neque ſupra in cuſpidem acuminentur, vera malorum altitudo medium tenere debebit inter $CD + 2\,CS$ et $CD + 3\,CS$, vnde aptiſſima malorum altitudo quaſi erit $= CD + \frac{5}{2}\,CS$. In nauibus autem pluribus malis inſtructis, medius ſeu altiſſimus non mediocriter hanc altitudinem $CD + \frac{5}{2}\,CS$ ſuperare debebit, quia reliqui erunt minores; atque inaequalitas ita erit temperanda vt commune velorum centrum ad altitudinem puncti S ſit poſitum.

§. 868. Ex puncto ergo S inuento malorum ſiue aequalium ſiue inaequalium, cum numerus iam ante ſit definitus, altitudo determinabitur. Conuenienter ergo hoc punctum S a Celebr. Bougero appellatur *centrum velare*, quia media directio omnium virium a vento exceptarum per iſtud punctum tranſire debet. Altitudo itaque malorum non minor eſſe debet, quam regula iſta poſtulat: primo enim ſi minor ſtatueretur, ob vim aquae praeualentem nauis ita circa axem latitudinalem inclinaretur, vt puppi magis depreſſa prora altius eleuaretur. Tum vero in quo cardo rei vertitur, praeter neceſſitatem minor vis ad nauem propellendam impenderetur, quam a naui commodiſſi-

modiſſime ſuſtineri poſſet, vnde nulla vrgente cauſa motus nauis tardior exiſteret. Omnino autem perfectae nauis idea poſtulat, vt maxima vis, quam quidem ſine damno ſuſtentare queat, ad nauem propellendam adhibeatur, quo motu celerrimo vehatur. Quoniam vero altitudine malorum ſecundum datam regulam definita, nulla prorſus inclinatio nauis conſequitur, manifeſtum eſt magis idoneam malorum altitudinem reperiri non poſſe, quo nauis tutius ac ſine minori periculo inſtruatur.

§. 869. Quodſi autem hanc regulam transgredi conveniat, maiorem potius malis altitudinem tribui expediet, quam minorem, cum hoc pacto vis nauem promouens augeatur, ſicque ipſi maior celeritas concilietur. Inclinabitur autem vtique hoc caſu nauis proram verſus, quia momentum inclinans a vi venti ortum ſuperat alterum momentum ex vi aquae reluctante natum. Tranſeat enim vis propellentis media directio per punctum p, ac poſita vi propellente tota $= P$ erit momentum eius nauem inclinans $= P.Sp$, a quo quanta inclinatio ſit proditura ex ſtabilitate nauis reſpectu axis latitudinalis iudicari debebit. Sit igitur poſito totius nauis pondere $= M$ ſtabilitas reſpectu huius axis $= Mp$, eritque ſinus anguli inclinationis productae $= \frac{P.Sp}{Mp}$. Eousque igitur altitudinem malorum vltra datum terminum augere licebit, quoad angulus inclinationis non fiat maior, quam a naui ſine vllo periculo ſubiri poſſit; quem angulum non multum $5°$ ſuperare oportet, ita vt fractio $\frac{P.Sp}{Mp}$ non excedere debeat $\frac{1}{10}$.

§. 870. Quo maior ergo fuerit ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis, eo magis altitudinem malorum vltra terminum praeſcriptum augere licebit, ceteris paribus.

Quo-

Quoniam vero vis P praeter velorum latitudinem a celeritate venti pendet, manifeſtum eſt quo maior fuerit venti celeritas, eo minus eſſe debere interuallum Sp. Atque hinc iſtud ſpatium maius concedi nequit, quam a quo etiamſi ventus ſit vehementiſſimus nulla inclinatio periculoſa reſultare queat; quamobrem ex valore maximo, quem vis P obtinere poterit, vento vrgente fortiſſimo, magnitudinem interualli Sp definiri conueniet, ne vnquam nauis periculo ex nimia inclinatione oriundo exponatur. Hinc ergo fit, quod naues, in quibus punctum p ſupra centrum velure S cadit, non ſolum proram verſus inclinentur, ſed etiam inclinatio eo maior exiſtat, quo fortior fuerit ventus; cum contra naues in quibus punctum p in ipſum punctum S incidit, etiam a vehementiſſimo vento nullam inclinationem patiantur. Quo igitur nauis celerrimum motum ſine damno impetret, maxima magnitudo interualli Sp ex ſtabilitate et maxima venti celeritate colligi debet, vti eſt praeceptum.

§. 871. Hic autem probe eſt notandum, quod aucto interuallo Sp, eadem manente venti vehementia, etiam ipſa vis P augeatur, ideoque momentum $P.Sp$ duplici modo creſcat. Erit autem vis venti P proxime altitudini velorum $\frac{3}{2}Cp$ ideoque ipſi altitudini Cp proportionalis; vnde eius momentum erit vt $Cp.Sp$ hoc eſt vt $(CS+Sp)\,Sp$. Ponamus iam eiusmodi pro Sp valorem puta α eſſe per experientiam repertum, quo nauis etiam a fortiſſimo vento non vltra dimidium gradum inclinetur, ita vt foret $\frac{P.\alpha}{Mp} = \frac{1}{100}$; quoniam igitur ſine periculo inclinatio ad 5 gradus augeri poteſt, ponamus interuallum Sp hanc inclinationem producens eſſe $= x$; erit

pro-

propemodum $(CS + \alpha)\,\alpha : (CS + x)\,x = 1 : 10$, vnde $10\,CS.\alpha + 10\,\alpha\alpha = CS.x + xx$ ideoque $x + \frac{1}{2}CS = \sqrt{(\frac{1}{4}CS^2 + 10\,CS.\alpha + 10\,\alpha\alpha)}$, vnde orietur idonea interualli Sp magnitudo $x = \sqrt{(\frac{1}{4}CS^2 + 10\,CS.\alpha + 10\,\alpha\alpha)} - \frac{1}{2}CS$. Et, ſi CS prae α fuerit vehementer magnum erit $x = 10\,\alpha - \frac{90\,\alpha\alpha}{CS}$.

§. 872. Plurimum igitur intereſt in determinatione altitudinis malorum noſſe cum centrum velare S, ſeu interſectionem mediae directionis impetus aquae RS cum recta verticali DS per centrum grauitatis nauis G ducta, tum etiam nauis ſtabilitatem. Vtrumque quidem ex figura et conſtitutione nauis cognita per calculum ſecundum methodum ſupra traditam definiri poterit, at cum ſtatus nauis ad calculum reuocatus plerumque multum ab eius ſtatu vero diſcrepare poſſit, expediet vtrumque practice per experimenta explorare; quae cum in ipſis nauibus non ad lubitum inſtitui queant, curetur nauicula fabricari naui per omnia ſimilis, ſimilique modo onerata. Inſeratur huic nauiculae verticaliter per centrum grauitatis bacillus, cui alligetur in quacunque altitudine filum, cuius ope nauicula in aqua protrahatur a pondere filum horizontaliter extendente, ac notetur vtrum durante motu antrorſum an retrorſum inclinetur; priori caſu filum humilius poſteriori ſublimius alligetur ac tractio repetatur, donec nauicula in motu prorſus non inclinetur. Quod cum euenerit punctum alligationis fili dabit centrum velare S, quod ſecundum regulam ſimilitudinis ad nauem ipſam transferetur.

§. 873. Dum haec experimenta inſtituuntur eadem opera ſtabilitas nauis explorari, atque adeo magnitudo interualli Sp, quae tolerari poſſit, aſſignari poterit. In-

vento enim in nauicula puncto S, filum aliquantum ſupra *S* alligetur ac dum a dato pondere protrahitur, diligenter inclinatio notetur. Hinc enim concludetur, ſi maior nauis in ſimili puncto *p* a vi horizontali propellatur, quae ſe habeat ad illam vim, qua nauicula erat protracta in ratione triplicata laterum homologorum ſeu in ratione ponderum tum eandem inclinationem conſequi debere. Quodſi autem vnico caſu conſtet, quantum nauis a data vi P in dato puncto *p* applicata inclinetur, inclinatio a quauis alia vi alibi applicata oriunda definiri poterit; erunt enim inclinationes momentis P. S*p* proportionales. Tum igitur cognita velorum ſuperficie, ventoque maxima data celeritate facile aeſtimabitur vis illa P, vnde interuallum S*p* determinabitur tantum, vt nunquam inclinatio damnoſa euenire queat.

§. 874. Potiſſimum igitur pendet altitudo malorum ac proinde copia velorum a figura prorae, quippe a qua angulus ille SR*r* determinatur. Quo magis enim media directio impetus aquae RS ſupra horizontem eleuatur, eo ſublimius poſitum erit punctum S, ſi quidem diſtantia R*r* fuerit eadem; erit namque altitudo $Sr = Rr$ tang. A . SR*r*. Quamobrem ſi media directio aquae RS fuerit horizontalis, centrum velare caderet in punctum *r*, quod ſemper eſt ſub aqua; ex quo minima velorum copia nauem inclinaret, et tametſi ſtabilitas nauis eſſet admodum magna, tamen iis venti viribus, quae ad modicum curſum inſtituendum requiruntur, ſuſtinendis minime foret par. Hoc ergo incommodum in eius generis naues competit, quae omnes ſectiones horizontales ſub aqua inter ſe habent ſimiles et aequales, quippe quae vim aquae alla-

allabentis vbique ſecundum directionem horizontalem excipiunt. Huiusmodi ergo formae naues omnino ſunt ineptae ad malos geſtandos, neque eae ſine inſigni periculo vento committi poſſunt, talis igitur forma iis tantum nauibus eſt relinquenda, quae vel remis promouentur, vel a curſu fluminis deferuntur.

§. 875. Naues ergo velorum ope propellendas eiusmodi prora praeditas eſſe oportet, quae aſcendendo ab imo ſpinae diuergat, ita vt ſectiones horizontales vsque ad ſuperficiem aquae creſcant, vel deſcendendo a ſuperficie aquae continuo decreſcant; ſic enim in ſingulis punctis recta ad ſuperficiem prorae normalis ad horizontem inclinabitur, et cum vis aquae directionem huius normalis ſequatur, erit directio media vniuerſae aquae vis ad horizontem inclinata. Ad hanc formam cunctae naues vento propellendae conſtrui ſolent, ita vt hic pleniſſimus conſenſus theoriae cum praxi deprehendatur. Quae igitur in ſuperiori libro de vi, quam nauis in aqua promota ſuſtinet, ſunt tradita, hic commode in ſubſidium vocabuntur, quo media directio virium aquae RS definiatur. Reſoluta quidem ibi eſt vis aquae in laterales, horizontalem ſcilicet et verticalem et vtraque ſeorſim eſt definita, ab his binis viribus cognitis facillime eae coniungentur, atque directio vis aequiualentis determinabitur, cuius quidem poſitionem RS hoc loco noſſe ſufficit.

§. 876. Quo magis ergo prora ſurſum allongatur et extenuatur, eo magis media directio aquae eleuabitur atque ad ſitum verticalem propius accedet; ac, ſi prora in infinitum extenderetur, fieret media directio RS prorſus normalis ad horizontem. Hinc ſemper prora tanto-

 pere

pere elongari poſſet, vt malorum altitudo quantumuis magna prodiret; ſed praeter incommoda plura praelongarum prorarum, quorum nonnulla iam ſunt commemorata, ipſa malorum altitudo non nimis magna admitti poteſt. Non ſolum enim nimis magnum tam praealtorum malorum pondus nauem vehementer oneraret, ſed etiam conſtitutio et confirmatio tantorum malorum maximas afferret moleſtias, vt lucrum inde ſperandum penitus ceſſaret. Quin etiam velorum expanſio ac directio plurimum difficilis redderetur, vt taceam plura alia incommoda, quae a tam vaſtis malis orirentur; quorum ingenti pondere atque apparatu ad eos ſuſtentandos neceſſario centrum gravitatis totius nauis nimis eleuaretur, ſimulque oneratio, cui nauis eſt deſtinata, impediretur.

§. 877. Hancobrem ex natura ac robore vna cum ſcopo, cui nauis deſtinatur, altitudinem malorum, quos nauis ſine incommodo geſtare queat, definiri conueniet; qua inuenta prora nauis ita adſtrui debebit, vt per directionem mediam virium aquae eadem malorum altitudo, quae iam erat determinata, reſultet. Scilicet ex data malorum altitudine ac velorum latitudine concludetur facile altitudo puncti S ſeu centri velaris ſuper centro grauitatis G; ex puncto S ad proram ducatur recta SR; atque tum proram ita formari oportebit, vt media directio virium aquae in hanc ipſam rectam RS incidat. Hoc igitur pacto non ſolum figura prorae propemodum ſed etiam eius elongatio determinabitur; ſicque naues ita conſtruentur, vt primum tanta velorum copia ſint inſtructae, quantam ſine damno geſtare valeant; tum vero vis venti inclinans ita a vi aquae aequilibretur, vt etiam a fortiſſimo vento nul-

la

la inclinatio ſubſequatur, quae ſine dubio eſt perfectiſſima malorum conſtitutio, quatenus ex curſu directo proficiſcitur.

§. 878. Sequenti autem modo curuatura ſpinae anterior, qua prora clauditur commodiſſime determinabitur. Sit *ab* ſpina nauis, G centrum grauitatis, per quod ad ſpinam ducatur normalis DS in eaque ex apta malorum altitudine ſtatui nauis conuenienti notetur centrum velare S, per quod ſcilicet velis omnibus paſſis media directio venti ſit tranſitura. Tum centro S amplitudine S*a* deſcribatur arcus circularis *a*A donec ad ſuperficiem aquae AB aut vltra pertingat; qui arcus praebebit curuaturam ſeu eleuationem ſpinae prorae formandae aptam. Cum enim omnes preſſiones aquae ad A*a* ſint normales, ſingularum directiones ac proinde media directio RS per punctum S tranſibit. Inuenta autem ſic ſectione nauis diametrali ſi dentur pro arbitrio ſectio aquae et ſectio ampliſſima per curuas affines tota prora formabitur, vti capite primo eſt oſtenſum. Quamuis autem hoc modo directio media vniuerſae aquae vis aliquantum alteratur, tamen diſcrepantia non erit tanta, vt inde periculum ſit metuendum. Neque enim in hoc negotio ad minutias eſt attendendum, cum poſitio puncti S ob ſtabilitatem nauis modicam patiatur amplitudinem. Tab. XXVI. fig. 1.

§. 879. Neque vero hic arcus circularis A*a* ſolus ea gaudet proprietate, vt media directio vis aquae impingentis RS per punctum propoſitum S tranſeat; haec enim eadem proprietas in infinitas alias lineas curuas competit. Quin etiam omnes arcus circulares per puncta A et *a* tranſeuntes, quorum numerus eſt infinitus eadem proprietate erunt praediti. Arcuum enim circularium per puncta A et *a* ductorum centra erunt in recta SR an-

 gulum

gulum AS*a* biſecante, hincque media directio vis aquae in quemcunque eiusmodi arcum impingentis cadet in eandem rectam RS. Tum vero etiam linea recta puncta A et *a* iungens ſeu corda arcuum A*a* dabit idoneam prorae figuram. Inter hos ergo innumerabiles arcus circulares, qui per puncta A et *a* duci poſſunt pro lubitu eligi poterit is, qui ad proram determinandam propter alias rationes videatur maxime accommodatus, et hancobrem non opus erit ad alias lineas curuas confugere.

§. 880. Ex datis ergo centro velari S, et termino ſpinae anteriori *a* vna cum ſuperficie aquae AB definietur corda A*a*, ſuper qua omnes arcus circulares constructi eiusmodi prorae figuram exhibebunt, vt media directio vis aquae per punctum S tranſeat, erit enim haec media directio ad cordam A*a* normalis, eamque biſecabit. Cum igitur vnumquemque horum arcuum AR*a* pro figura prorae accipere liceat, ne in electione ancipiter haereamus, conueniet eam potiſſimum arcum AR*a* prae reliquis eligi, qui prorae minimam reſiſtentiam hotizontalem conciliet. Sic enim inter omnes arcus circulares AR*a* qui ad malorum altitudinem propoſitam aeque ſunt accommodati is ad proram formandam deligetur, a quo nauis celerrimum motum adipiſcatur. Hoc ergo modo duobus requiſitis principalibus ſimul ſatisfaciemus, ſcilicet vt nauis conuenienti velorum copia inſtructa et celerrime promoveatur, et nullam prorſus inclinationem ſenſibilem ſiue antrorſum ſiue retrorſum patiatur. Neque igitur aliunde magis idonea determinatio prorae reperiri poterit.

Tab. XXVI. fig. 2.

§. 881. Cum igitur corda A*a* magnitudine et poſitione ſit data, ponatur $AE = aE = a$; ſitque angulus SEF

Digitized by Google

SEF, quem recta SR cum horizonte EF conſtituit, $= q$; cuius ſinus ponatur $= m$ et coſinus $= n$ poſito ſinu toto $= 1$. Sit O centrum arcus ARa, ac ponatur $OE = b$; et radius circuli $OA = Oa = c$ vt ſit $c = \sqrt{(aa+bb)}$; et anguli AOR ſeu aOR ſinus $= \frac{a}{c}$ et coſinus $= \frac{b}{c}$. Iam ad reſiſtentiam explorandam conſideretur elementum Mm, in quod aqua ſecundum directionem NM irruat: ducto radio OM ſit angulus ROM $= s$, erit vis aquae in Mm incidentis vt Mm per quadratum ſinus incidentiae RMN multiplicatum: eſt autem producta NM in Q ſinus anguli RMN $=$ coſ. OMQ $=$ coſ. $(q+s)$; vnde erit vis, quam elementum Mm ſuſtinet vt $cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^2$, cuius directio eſt MO normalis ad Mm, quare vis ſecundum directionem horizontalem MQ ſeu reſiſtentia erit vt $cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^3$ ideoque reſiſtentia arcus RM erit vt $\int cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^3$.

§. 882. Ad hanc formulam $\int cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^3$ integrandam manifeſtum eſt eſſe $(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^3 = \text{coſ.}\,\overline{q+s}\,(1-(\text{ſin.}\,\overline{q+s})^2)$ vnde erit $\int cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q+s})^3 = \int cds\,\text{coſ.}\,\overline{q+s} - \int cds\,\text{coſ.}\,\overline{q+s}\,(\text{ſin.}\,\overline{q+s})^2$ quae vtraque formula cum ſit integrabilis erit integrale quaeſitum $= c\,\text{ſin.}\,\overline{q+s} - \frac{1}{3}c\,(\text{ſin.}\,\overline{q+s})^3 + C$; haecque conſtans C ita debet definiri, vt poſito $s = 0$, et reſiſtentia euaneſcat, ex quo erit $C = -c\,\text{ſin.}\,q + \frac{1}{3}c\,(\text{ſin.}\,q)^3$. Quam obrem reſiſtentia arcus RM erit $= c\,\text{ſin.}\,\overline{q+s} - \frac{1}{3}c\,(\text{ſin.}\,\overline{q+s})^3 - c\,\text{ſin.}\,q + \frac{1}{3}c\,(\text{ſin.}\,q)^3$. Sin autem angulus ROM $= s$ ad alteram partem verſus A capiatur erit reſiſtentia ſimili modo computata $= \int cds\,(\text{coſ.}\,\overline{q-s})^3$

cuius

cuius integrale erit $= -c$ ſin. $\overline{q-s} + \frac{1}{3}c$ (ſin. $\overline{q-s})^3 +$ c ſin. $q - \frac{1}{3}c$ (ſin. $q)^3$. Ponatur angulus AOR $= a$OR $= g$, ac in vtraque formula poſito g pro s ſumma ambarum formularum dabit reſiſtentiam totius arcus AR$a =$ c ſin. $\overline{q+g} - c$ ſin. $\overline{q-g} - \frac{1}{3}c$ (ſin. $\overline{q+g})^3 + \frac{1}{3}c$ (ſin. $\overline{q-g})^3$, ad directionem horizontalem reductam.

§. 883. Cum vero ſit ſin. $\overline{q+g} =$ ſin. q. coſ. $g +$ coſ. q. ſin. g et ſin. $\overline{q-g} =$ ſin. q. coſ. $g -$ coſ. q. ſin. g, erit reſiſtentia arcus AR$a = 2c$ coſ. q. ſin. $g - 2c$ (ſin. $q)^2$ coſ. q (coſ. $g)^2$ ſin. $g - \frac{2}{3}c$ (coſ. $q)^3$ (ſin. $g)^3$. Quoniam nunc eſt ſin. $q = m$, coſ. $q = n$; et ſin. $g = \frac{a}{c}$, atque coſ. $g = \frac{b}{c}$, erit his valoribus ſubſtitutis reſiſtentia arcus AR$a = 2na$ $- \frac{2m^2nabb}{cc} - \frac{2}{3}\frac{n^3a^3}{cc}$. Nunc ob $cc = aa + bb$ et $mm = 1$ $- nn$, erit reſiſtentia $= \frac{2na}{cc}$ $(aa + bb - bb + nnbb - \frac{1}{3}nn$ $aa) = \frac{2na}{3cc}$ $(3aa - nnaa + 3nnbb)$. Quodſi ergo fiat $b = c = \infty$ quo caſu arcus ARa cum corda Aa confunditur, erit ob a prae b euaneſcens reſiſtentia $= 2n^3a$, vti alias conſtat. Sin autem OE $= b = 0$, vt ſit $c = a$ et ARa ſemicirculus, erit reſiſtentia $= \frac{2}{3}na\,(3 - nn)$, niſi quatenus ob inclinationem rectae Aa non totus ſemicirculus aquae allapſui exponitur.

§. 884. Quo igitur totus arcus ARa alliſioni aquae opponatur, neceſſe eſt vt angulus ROa minor ſit angulo ROP ſeu EOF, ſi enim ſit aequalis tum tangens eius in puncto infima a fiet horizontalis, et ſi eſſet maior, arcus ad a iam ſurſum reflecteretur proraque alicubi profundius immergeretur quam tota ſpina, quae adeo figura ad proram conſtituendam eſt inepta. Debebit ergo ſinus anguli ROa qui eſt $= \frac{a}{c}$ non maior eſſe ſinu anguli EOF ſeu

Digitized by Google

ſeu coſinu anguli OEF, qui eſt $= n$, eritque igitur vel $\frac{a}{c} = n$ vel $\frac{a}{c} < n$. Sit primo $\frac{a}{c} = n$ vt ſit $\frac{b}{c} = m$, erit reſiſtentia $= \frac{2}{3} na(3nn - n^4 + 3mmnn) = \frac{4}{3} n^3 a(3 - 2nn)$. Quae reſiſtentia vel aequalis eſſe poteſt cordae vel maior vel minor; erit enim aequalis ſi $3 = 2(3 - 2nn) = 6 - 4nn$, vnde $n = \frac{\surd 3}{2}$, ideoque angulus EOF $= 60°$, ſin autem angulus EOF fuerit maior minorue $60°$, tum quoque reſiſtentia arcus minor erit, maiorue quam reſiſtentia cordae.

§. 885. Hinc apparet quandoque per incuruationem prorae reſiſtentiam diminui, quandoque vero proram rectam AEa praeſtare; qui caſus quo melius diſtingui queant, conſideremus deligentius reſiſtentiam arcus ARa eamque comparemus cum reſiſtentia, quam corda ipſa Aa patitur. Cum ergo ſit $bb = cc - aa$ erit reſiſtentia $= \frac{2na}{3cc}(3aa - 4nnaa + 3nncc) = 2na(nn + \frac{(3-4nn)aa}{3cc})$; atque reſiſtentia cordae ſit $= 2n^3 a$; patet diiudicationem ex valore $3 - 4nn$ eſſe petendam. Scilicet ſi fuerit $3 - 4nn = 0$, ſeu angulus EOF vel angulus RSG ſexaginta graduum, reſiſtentia prorae erit eadem ſiue conſtituatur recta ſecundum cordam, ſiue incuruetur ſecundum arcum circularem quemcunque per puncta A et a tranſeuntem, dummodo nulla prorae pars profundius immergatur quam ipſa ſpina. Sin autem ſit $n < \frac{\surd 3}{2}$ ſeu angulus RSG 60 gradibus minor, tum reſiſtentia cordae minor erit quam reſiſtentia cuiusuis arcus circularis per puncta A et a ducti.

§. 886. Caſus hic, quo angulus RSG minor eſt 60 gradibus in omnibus fere nauibus, quae malis ſolent eſſe Tab. XXVI. fig. 1.

Pars II. Ppp inſtruc-

inſtructae, locum habet; quocirca in his nauibus aptiſſima prorae figura erit linea recta puncta A et *a* iungens, quippe quae minimam naui producit reſiſtentiam. Omnis ideo curuatura, quae his caſibus prorae induceretur motum nauis retardaret, ſicque effectum velorum qui vnice intendi ſolet, diminueret. Sequenti ergo modo iſta prorae figura aptiſſima definietur; centro S interuallo S *a*, quod ad finem ſpinae anteriorem pertingit deſcribatur arcus circuli *a*RA, donec ſuperficiem aquae in A ſecet ductaque corda A*a* dabit prorae eleuationem atque adeo figuram conuenientiſſimam. Ceterum aliae rationes, quae omnes angulos, cuiusmodi oriretur in *a*, prohibent, applicationem huius regulae ſaepiſſime impediunt; quare ne his rationibus vis inferatur, proram in *a* tam parum incuruari oportebit, quam circumſtantiae permittunt, ita vt minime a figura deſcripta aberretur.

§. 887. Sin autem naues occurrant eiusmodi, in quibus poſtquam arcus A*a* fuerit delineatus, anguluſque AS*a* recta SR biſectus, angulus RSG maior fiat 60 gradibus, ideoque quantitas $3 - 4nn$ valorem obtineat negatiuum, tum manifeſtum eſt quo magis prora incuruetur, eo minorem prodituram eſſe eius reſiſtentiam. His igitur caſibus conveniet proram in arcum circularem AR*a* incuruare, eius radio tam exiguo aſſumto, quantum fieri poteſt. Quoniam vero prora nusquam infra ſpinam deſcendere debet, manifeſtum eſt, angulum RO*a* non maiorem eſſe poſſe angulo EOF. Quare vt prorae maxima idonea curuatura tribuatur, ex puncto *a* erigatur recta normalis, eiusque interſectio cum recta SR notetur; haec enim interſectio dabit centrum circuli, quo arcum AR*a* deſcribi conueniet.

Fig. 2.

Hoc

Hoc modo fiet prorae *a*RA tangens in imo puncto *a* horizontalis ſicque prora quaſi continuum corpus cum ſpina conſtituet, nullique occurrent anguli, quos ob alias rationes euitari oporteret.

§. 888. Eo magis igitur prora ad horizontem inclinabitur quo minor fuerit angulus RSD, ac ſimul quo minor fuerit nauis profunditas ſub aqua. Sit enim recta SD $= a$ profunditas carinae CD $= b$; et diſtantia aD $= c$; erit $Sa =$ SA $= \sqrt{(aa+cc)}$, et AC $= \sqrt{(aa+cc-(a-b)^2)} = \sqrt{(cc+2ab-bb)}$. Ducta iam corda A$a$, quae proram conſtituet, quoties angulus DSR non fuerit maior quam 60°, erit eius inclinatio ad horizontem = angulo CAa, cuius tangens eſt $= \frac{b}{\sqrt{(a+2cb-bb)}-c}$, et ſinus $= \frac{b}{\sqrt{(2cc+2ab-2c\sqrt{(cc+2ab-bb)})}}$, vnde cum reſiſtentia ſit vt CD in quadratum huius ſinus erit reſiſtentia huius prorae rectae Aa vt haec expreſſio $\frac{b^3}{2cc+2ab-2c\sqrt{(cc+2ab-bb)}}$. Deinde vero eſt A$a = \frac{b}{\text{ſin } CAa} = \sqrt{(2cc+2ab-2c\sqrt{(cc+2ab-bb)})}$, angulus autem RSD aequalis eſt angulo CAa, vnde perſpicuum eſt quo minor fuerit angulus DSR eo reſiſtentiam fore minorem hincque nauem celerius eſſe progreſſuram. Tab. XXVI. fig. 1.

§. 889. Quo igitur reſiſtentia magis diminuatur, efficiendum erit vt angulus DSR plurimum diminuatur, quod fiet ſi cum altitudo SD augeatur, tum vero interuallum aD minuatur. Quod quidem ad poſterius attinet, quoniam aD a longitudine nauis pendet, quam ob grauiſſimas cauſas prorſus non diminuere licet, ſed etiam elaborandum ſit vt ea quoad fieri poteſt, augeatur; hoc relinquitur vt centrum grauitatis G, quantum fieri poteſt,

 au-

Digitized by Google

antrorſum promoueatur, quo interuallum Da hoc pacto minimum praeſtetur. In ſequenti autem capite aliae occurrent rationes quae eandem centri grauitatis ad proram admotionem poſtulant; quibus itaque dum ſatisfit, ſimul motus nauis accelerabitur. Quo autem centrum grauitatis proram verſus permoueatur, neceſſe eſt, vt maior onerum copia in hac nauis parte imponatur, ne autem hinc prora nimium immergatur, eius quoque volumen ſub aqua amplius fieri oportet, vnde regulae ad conſtructionem nauium requiſitae magis determinabuntur.

§. 890. Multo ſenſibilius autem aucta altitudine DS angulus DSR ac proinde reſiſtentia nauis diminuetur. Hinc ergo ſumma vtilitas perſpicitur, quam mali altiſſimi nauibus afferunt. Primo enim pluribus velis vtiliter extendendis locum concedunt, quo vis propellens fortior redditur; ex quo ſi eadem eſſet reſiſtentia, celeritas nauis augeretur. Verum praeterea quo altiores conſtituuntur mali, eo magis angulus CAa ac proinde reſiſtentia diminuetur, vnde denuo acceleratio nauis exiſtit. Cum igitur duplicem ob cauſam celeritas nauis aucta malorum altitudine multiplicetur, eo magis erit curandum, vt naues quam altiſſimis malis inſtruantur. Quodſi ergo impedimenta, quae nunc quidem nimiam malorum altitudinem diſſuadent, tolli vel ſuperari, vel alia ratione altitudo malorum augeri poſſet, hoc quidem nauigatio plurimum perficeretur. Interea autem probe eſt cauendum, ne praeter neceſſitatem malorum altitudo minor adhibeatur, quam nauis quaeque pro robore ſuo ſuſtinere poſſet.

§. 891. Haec igitur ſunt tenenda, ſi naues ita fabricari debeant, vt in curſu ſuo directo nullam prorſus incli-

Digitized by Google

clinationem patiantur. Quoniam vero ob inſignem ſtabilitatem ratione axis latitudinalis, quam cum figura ipſa nauibus tribuit, tum incolumitas maxime poſtulat, naues ſine periculo inclinationem ſuſtinere poſſint, eam ita in vſum conuerti conueniet, vt inde ſtatus nauium magis perficiatur. Supra quidem, vbi prorae figuram iam datam aſſumſimus, ita ab hac regula receſſimus, vt malos altiores fieri ſuaderemus, quam reſiſtentiae ratio poſtularet; vnde cum inclinatio nauis antrorſum ſequeretur, ita malorum altitudo determinari debebat, vt ne inclinatio inde oriunda naui damnum afferre queat. Nunc autem ſi ita a regula data recedere velimus, vt inclinatio nauis antrorſum oriretur, quantam quidem ſuſtinere poſſet, prora magis ſurſum eleuari deberet, quo media directio R S infra punctum S, per quod media directio vis venti tranſit, cadat; hinc autem non ſolum nullum lucrum ſed etiam inſigne damnum nauibus inferretur.

§. 892. Si enim prora A *a* magis eleuaretur atque ad ſitum verticalem propius adduceretur, tum reſiſtentia nauis augeretur hincque curſus retardaretur. Atque adeo hoc pacto inclinatio in naui produceretur cum inſigni incommodo. Quocirca multo erit conſultius proram magis ad horizontem inclinare, quam regula ante data requirit; hoc autem modo, quia media directio vis aquae R S ſupra mediam directionem venti cadet, inclinatio nauis retrorſum producetur, quae dummodo non ſit maior, quam ſine damno ſuſtineri poteſt, admitti poterit. Emolumentum autem, quod per hanc ab regula receſſionem in nauem redundat, minime erit contemnendum; ſic enim reſiſtentia nauis non mediocriter diminuetur, eoque motus

Digitized by Google

nauis celerior reddetur. Eiusmodi ergo inclinatio circa axem latitudinalem innoxia vtique admitti poterit, cum tam inſigne lucrum, nauis ſcilicet acceleratio impetretur; alia vero praeterea accedunt commoda, quae eiusmodi proram eo magis ſuadebunt.

§. 893. Primo enim dum prorae A*a* inclinatio ad horizontem minor redditur, ſimul longitudo nauis in ſuperficie aquae AB augetur, vnde praeter alia auctae longitudinis commoda etiam ſtabilitas nauis reſpectu axis latitudinalis augetur; hincque nauis eo facilius inclinationem ſuſtinebit, minusque damnum ab ea erit metuendum. Deinde ſi hoc modo prora nauis elongetur, non ſolum centrum grauitatis G ſponte ad *a* propius accedit, ſed etiam maius ſpatium in prora ſuppetit, vbi maior onerum copia collocari, hocque pacto centrum grauitatis adhuc propius antrorſum produci poterit; hac autem ipſa centri grauitatis promotione, quam punctum S ſequitur, inclinatio nauis retrorſum oriunda diminuetur, atque incommodum ſi vllum ex hac parte eſſet metuendum, tolleretur. Quin etiam ſi ob tantam prorae onerationem in nauis ſtatu quietis, prora aliquanto profundius immergeretur, quam par eſt, hic ipſe defectus ab inclinatione retrorſum nata emendabitur, nauisque in ſitu erecto curſum abſoluet.

Fig. 3. §. 894. Ad haec commoda accedit aliud non minoris pretii lucrum, quod ex ipſa nauis inclinatione retrorſum facta naſcitur. Dum enim prora nauis eleuatur, eius minor portio reſiſtentiam aquae ſentiet, ſicque ipſa reſiſtentia diminuetur. Contra quidem in hoc ſtatu nauis aqua contra vniuerſum fere fundum ad puppim vsque impin-

pingit, quo reſiſtentia iterum augeri videatur. At vero in ſuperioribus vidimus reſiſtentiam non magis diminui poſſe, quam prora maxime elongata; quamobrem in praeſenti caſu, quo tota fere nauis prorae vicem ſuſtinet et aqua vbique ſub maxima obliquitate allidit, reſiſtentia vehementer diminui debebit. Denique hic non eſt praetereundum per talem inclinationem aquam liberius in gubernaculum incurrere; quae omnia tam inſignia commoda nullis incommodis inquinata eiusmodi prorae figuram, quae magis ad horizontem inclinetur, quam regula requirit, omnino ſuadent; dubiumque nullum ſupereſſe poteſt, quin in praxi a tali malorum ac prorae conſtitutione ſummus fructus percipiatur.

§. 895. Vnica ſupereſſet tractatio de malis non verticaliter conſtitutis, ſeu potius de velis, quorum ſuperficies expanſa ad horizontem ſit inclinata; verum tanta incommoda occurrunt, vt eiusmodi velorum diſpoſitio penitus ſit improbanda. Primo enim per obliquitatem eorum ſuperficies augeretur, ac propterea plus lintei requireretur, tum vero non obſtante ſuperficiei incremento, vis nauem propellens adeo in ratione duplicata ſinus anguli, quem vela cum horizonte conſtituunt, diminueretur, quae rationes vtique ſufficiunt ad eiusmodi velorum poſitionem reiiciendam. Praeterea quidem per talem velorum inclinationem tota nauis vel aquae profundius immergi, vel altius ex aqua extrahi poſſet, ſed haec non ſunt eiusmodi, vt memorata incommoda ideo admitti queant: niſi forte certae circumſtantiae quandoque eiusmodi effectum abſolute requirant, quae cum eueniunt, ipſae potius quam motus nauis erunt ſpectandae.

Caput XI.

Caput XI.
DE CVRSV NAVIVM OBLIQVO.

§. 896.

In capite praecedente vidimus, quemadmodum cum malos conſtitui, tum proram inſtrui oporteat, vt nauis curſum directum tenens ſine periculo quam celerrime progredi queat. Quoniam vero curſum directum tenere non licet, niſi venti directio congruat, ventus autem non ab arbitrio noſtro pendet in nauibus vento propellendis imprimis ad curſum obliquum erit attendendum, vt quicunque fuerit ventus, nauis maxime curſum propoſitum ſequatur. In ſuperiori quidem libro figuram nauium ad curſum obliquum inſtituendum aptiſſimam inueſtigauimus, vt deuiatio a curſu propoſito eſſet minima. Hoc igitur loco tantum ſupereſt, vt in conſtitutionem malorum ad hunc ſcopum maxime accommodatam inquiramus, quo nauis ſine periculo cum maxima celeritate ac minima deuiatione ſecundum directionem axis longitudinalis progrediatur. Hic autem vt in curſu directo nouae ſeſe manifeſtabunt regulae, quas in conformatione prorae atque totius nauis obſeruare conueniet, quibus conſtructio nauium magis perficietur.

§. 897. Quemadmodum curſus directus abſoluitur, cum media directio vis a vento exceptae axi nauis longitudinali eſt parallela, quod euenit ſi vela ita extendantur, vt iſte axis ad eorum ſuperficiem ſit normalis, ita nauis curſu obliquo feretur, ſi media directio vis a vento exceptae cum axe longitudinali angulum conſtituat obliquum. His ergo caſibus nauis non in directione vis venti

ti

Digitized by Google

ti promoueri poterit, propter reſiſtentiam aquae, cuius directio aequalis atque contraria vi propellenti eſſe non poteſt. Sequetur ergo [illegible] pellentis, [illegible] directione[illegible] mediam inter ipſam [illegible] directionem ſeu axem longitudinalem et inter directionem vis pr[illegible] angulus autem, quem directio curſus cum axe nauis longitudinali conſtituit, deuiatio ſeu declinatio cur[illegible], pendet autem haec curſus declinatio potiſſimum a figura nauis atque eo minor exiſtit, quo magis nauis longitudo latitudinem ſuperauerit. Cum igitur deuiatio quam minima deſideretur, ad curſum obliquum imprimis requiritur, vt longitudo nauium quantum fieri queat, prae latitudine augeatur, cuius quidem rei ratio iam ſupra vberius eſt expoſita.

§. 898. Quanquam varietas inclinationis ſuperficiei velorum ad axem longitudinalem nauis poteſt eſſe infinita in praxi tamen ad duos fere caſus reduci ſolet. Deſignet enim AB nauem ſeu eius axem longitudinalem, ſitque A prora et B puppis. Ac primo quidem ſi vela in ſitum EF ad AB normalem diſponantur, nauis curſu directo promouebitur, vti vidimus, hocque caſu nauis pleno vento vehi dicitur. Deinde ſi vela in ſitum *ef* expandantur, vt angulus *e*CA fiat circiter ſemirectus, curſus naſcetur obliquus prioris ſpeciei, qui cum vento dimidio inſtitui dicitur, propterea quod haec velorum diſpoſitio ad eum potiſſimum ventum eſt accommodata, qui in directione EC ad nauem AB normali venit. Sin autem ventus in directione *e*C irruat, vela in ſitum $\varepsilon\sigma$ extenduntur, ita vt angulus ε C A quaſi quartam partem recti ſeu $22\frac{1}{2}^{\circ}$ adaequet; qui curſus propterea aduerſus ventum inſtitui dicitur. Sunt adeo duae curſus Tab. XXVI. fig. 4.

Digitized by Google

obliqui ſpecies, quarum altera ad ventum dimidium, altera ad ventum contrarium eſt accommodata.

§. 899. Scilicet cum ventus vel a puppi B venit, vel non vltra 60 aut $56\frac{1}{4}$ gradus, qui angulus 5 rhumbos facit, diſcedit, curſus directus tenetur; hoc eſt ſumto in circulo centro C deſcripto, arcu $BM = 56\frac{1}{4}°$, ſi venti directio intra B et M cadat, vela ad ſitum EF diſponuntur. Sin autem ventus ex plaga MEN iterum quinque rhumbos ſeu angulum $56\frac{1}{4}°$ continente veniat, ita vt ſit EN $22\frac{1}{2}°$, dimidio vento nauis propelli cenſetur, atque vela in ſitum eCf diriguntur. Sin autem directio venti vltra N verſus A nempe in ſpatium Ne duos rhumbos continens incidat, curſus nauis contra ventum inſtitui dicitur ac vela in ſitum $\varepsilon C \sigma$ diſponuntur. Quodſi vero ventus ex plaga eA veniat, tum nullam memoratorum curſuum tenere licebit, his ergo caſibus ipſa nauis directio AB ita ad a declinatur, vt curſum tertium aduerſus ventum tenere liceat; nauis ergo non ſecundum directionem propoſitam BA procedet, verum tamen, dum alternatim ad dextram ac ſiniſtram deflectitur in regionem propoſitam appropinquabit.

§. 900. Quamuis autem theoria pro quauis venti directione velorum diſpoſitionem aptiſſimam monſtret, tamen in praxi haec infinita varietas non commode obſeruari poteſt, propterea quod nautae theoriae expertes non ita ad ſub tum inſtrui poſſunt, vt vela ad praeceptam obliquitatem accurate diſponant. In horum igitur gratiam expedit aliquot velorum diſpoſitiones tantum relictis reliquis ad vſum adhibere, atque pro vna quaque ipſis certas notas monſtrare, quas ſequentes vela vel ad plenum ventum

tum vel ad dimidium vel ad contrarium inſtar machinarum diſponere poſſint. Hoc modo etiam gubernator facilius curſus deuiationem aeſtimabit, cum duplicem tantum curſum obliquum habeat diiudicandum; ſi enim ipſi pro vtroque ſemel innotuerit, quanta ſit deuiatio, haec breuis cognitio ſufficiet ad curſum aeſtimandum. Etſi autem vndarum motus et impetus deuiationem non mediocriter immutare ſolet, tamen non tam facile in iudicio ſuo falletur, quam ſi infinita velorum obliquitas ipſi inſuper eſſet perpendenda.

§. 901. Quod nunc primum ad numerum locumque malorum attinet, quoniam in his rebus nullam mutationem, quoties curſus obliquus inſtituitur, ſuſcipere licet, tam numero quam loco malorum eodem vti oportet, qui ſemel fuerit conſtitutus. Quamuis enim alium requireret malorum cum numerum tum locum curſus directus, alium vero obliquus, tamen ob immutabilitatem, malorum vtrique ſatisfieri non poſſet; ſed contentos non eſſe oportebit malos ita conſtituiſſe, vt cum ad neutrum curſum ſint perfecte accommodati, tamen in vtroque quam fieri poteſt maximum effectum praeſtent. Poterit interim cum velorum latitudo augeri diminuiue, tum in aliis locis praeter malos vela expandi, ſicque eadem mutatio, quae per malorum tranſpoſitionem intendi poſſet, obtineri, cuiusmodi adminicula ſaepenumero in ſubſidium vocari ſolent; verum antequam huiusmodi adminicula diiudicare liceat, examinari conueniet, quantum iam ante conſtitutus malorum cum locus tum numerus motui obliquo vel faueat vel obſtet.

Digitized by Google

Tab. XXVI. fig. 5. §. 902. Pro curſu autem directo malorum loca ex velorum latitudine ita determinauimus, vt ſi directio venti a puppi 60 declinet, tum ventus in omnia vela irruat. Sint igitur D et L loca duorum malorum contiguorum; ac velorum ad illum expanſorum latitudo ſit EF $= 2a$, ad hunc vero ſit MN $= 2b$; interuallum autem malorum ſit DL $= c$. Quoniam igitur haec vela EF et MN ad curſum directum ſunt extenſa, erit ducta recta EN angulus BOE $= 60°$; ideoque $\frac{a+b}{c} = \sqrt{3}$ ſeu $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$. Si ergo ventus flet in directione EON, tum omnia vela inflabuntur, atque adeo curſus directus bono cum ſucceſſu inſtituetur; ſin autem venti directio magis a puppi B declinet, angulusque BOE maior 60° fiat, tum quidem niſi ad 90° aſcendat, ſingula vela EF et MN tota perſtringet, ſed nimis oblique, atque etiam portio venti inutiliter inter vela tranſibit. Quamobrem expediet velis poſitionem quandam obliquam ef et mn tribuere, quo cum ventus magis directe in ea incurrat: tum etiam nulla eius pars inutiliter pereat.

§. 903. Ponamus vela in ſitum cf et mn ita extendi vt ſit anguli ADe ſeu ALm ſinus $= m$, coſinus $= n$. Ducatur recta en, atque manifeſtum eſt, ſi ventus in directione hac en veniat, vtrumque velum totum a vento impulſum iri; ſin autem venti obliquitas fuerit minor angulo BOe, tum partem tantum veli mn incitari, at ſi obliquitas venti maior fuerit angulo BOe tum quidem ventum totum velum mn perſtringere, at aliquam venti portionem a velis non exceptam perire. Determinemus ergo ex angulo eLA ſeu mLA aſſumto angulum BOe, quo [illegible] ſinam ventum haec velorum diſpoſitio ſit

ſit maxime accommodata. Dubium enim eſt nullum quin ventus in hac directione veniens maximam vim exerat: namque perſpicuum eſt, ſi obliquitas venti eſſet maior eius vim ob minorem angulum incidentiae minorem eſſe futuram; ſin autem obliquitas venti eſſet minor tum maior quidem foret angulus incidentiae, at ſimul non totum velum mn perſtringeretur, quo ipſo vis minor euadat neceſſe eſt.

§. 904. Ex L in velum ef demittatur normalis LK, ob anguli LDK ſinum $= m$, coſinum $= n$, et $DL = c$, erit $LK = mc$ et $DK = nc$. Deinde ex e ad mn normalis ducatur ek erit $Lk = Ke = a - nc$, et $ek = LK = mc$, ideoque fiet $nk = a + b - nc$. Hinc anguli enk erit tang. $= \frac{ek}{nk} = \frac{mc}{a+b-nc}$; quo angulo enk inuento erit angulus $BOe = 180° - enk - BLn$. Cum igitur ſit tang. $enk = \frac{mc}{a+b-nc}$; et tang. $BLn = \frac{m}{n}$ erit tang. $(enk + BLn) = \frac{m(a+b)}{n(a+b)-c}$ ob $mm + nn = 1$; ideoque tang. $BOe = \frac{m(a+b)}{c-n(a+b)}$. Supra autem vidimus eſſe $c = \frac{a+b}{\sqrt{3}}$ ex quo habetur tang. $BOe = \frac{m\sqrt{3}}{1-n\sqrt{3}}$. Cum igitur latitudo velorum ex calculo egrediatur, manifeſtum eſt ex ſolo angulo inclinationis velorum ADe, definiri directionem venti eOn ſeu angulum BOe, cui haec velorum diſpoſitio maxime conueniat; in quae ergo ventus incidet ſub angulo enk, cuius tangens eſt $= \frac{mc}{a+b-nc} = \frac{m}{\sqrt{3}-n}$; et ſinus $= \frac{m}{\sqrt{(4-2n\sqrt{3})}}$.

§. 905. Haec ita ſe habent, ſi ponamus malos ita conſtitui vt vento a puppi ad 60° vsque declinante adhuc curſus directus teneri debeat; quoniam vero a nauigantibus anguli non per gradus [illegible] quorum

vnus 11° 15″ continet, menſurari ſolent, angulusque 60° nimis magnus videtur, expediet pro eo angulum 5 rhumborum ſeu 56° 15′ aſſumi, vel quia hic angulus non commode per ſinus et tangentes repraeſentari poteſt, in eius locum ſubſtituamus angulum 54° 44′ cuius tangens eſt $= \sqrt{2}$ ita vt ſit $c = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Vbique ergo $\sqrt{2}$ loco $\sqrt{3}$ ſubſtituto, ſi anguli AD*e* ſeu AL*m* quem vela cum axe conſtituunt, ſinus ſit $= m$, et coſ. $= n$, erit obliquitas venti ſeu anguli BO*e* tangens $= \frac{m\sqrt{2}}{1-n\sqrt{2}}$. Hinc ſi fuerit angulus BO*e* rectus, ſeu ſi venti directio cum directione nauis faciat angulum rectum, erit $n = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ideoque hoc caſu vela ita commodiſſime diſponentur, vt cum directione nauis AB angulum ſemirectum conſtituant, ſicque curſus obliquus cum vento dimidio talis accurate inſtituetur, qualem ſupra deſcripſimus.

§. 906. Quo autem hinc facilius intelligatur, quaenam velorum diſpoſitio ad quamlibet venti obliquitatem ſit maxime accommodata, tabellam ſupputari conueniet, quae pro quauis velorum obliquitate ſeu angulo AD*e* directionem venti ſeu angulum BO*e* vna cum angulo incidentiae venti in vela exhibeat, cuiusmodi tabellam ad denos gradus conſtruxiſſe ſufficiet.

Ang.

Ang. ADe quem vela cum longitudine nauis AB faciunt	Ang. BOe quem directio venti cum BA conſtituit	Ang. enm ſub quo ventus in vela incidit.
90°	54°, 44′	35°, 16′
80	61°, 33′	38, 27
70	68, 46	41, 14
60	76, 33	43, 27
50	85, 12	44, 48
45	90, 0	45, 0
40	95, 15	44, 45
30	107, 38	42, 22
20	124, 13	35, 47
10	147, 59	22, 1

vbi eiusmodi malorum conſtitutionem aſſumſimus vt eſſet $e = \frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

§. 907. Ex hac tabula patet in curſu obliquo, ſiquidem ventus omnia vela per totam ſuperficiem ſtringat, maximum incidentiae angulum eſſe 45°; qui locum habet ſi directio venti ad nauis directionem AB fuerit normalis, atque vela ad angulum ſemirectum ADe extendantur. Hoc ergo caſu vis venti in vela erit maxima, nauisque celerrime promouebitur, niſi quatenus eius motus ob curſus obliquitatem retardatur. Eo maius autem hoc erit lucrum quo pluribus malis nauis fuerit inſtructa; atque adeo fieri poteſt vt nauis pluribus malis inſtructa a vento dimidio ſeu ad AB normali celerius propellatur, quam a vento pleno, qui a puppi ſpirat; quia hic tantum in vela poſtrema incurrit, ille autem ventus lateralis omnia

omnia prorſus vela idque ſub maximo angulo 45°, quem obliquitas permittit, perſtringit, cuius quidem venti commodum nautis ſatis eſt notum.

Tab. XXVI. fig. 6. §. 908. Ad haec explicanda incipiamus a curſu maxime obliquo, quo vela ita diſponi ſolent, vt cum axe nauis AB angulum EDA ſeu $edA = 22°, 30'$ conſtituant. Plerumque enim hunc angulum minorem accipere non licet, quia obliquitas hincque deuiatio nauis fieret tanta, vt curſus potius impediretur quam promoueretur. Per praecedentem ergo regulam iſta velorum diſpoſitio maxime erit accommodata ad venti directionem VEf, quae cum axe AB angulum faciat $BOV = 119°, 32'$, ſeu $VOA = 60°, 28'$, eritque angulus incidentiae $Vfe = 37°, 58'$. Viciſſim autem ſi angulus VOA fuerit $60°, 28'$, a ſtructura nauis maxime pendet vtrum expediat angulum $edA = 22°, 30'$ relinqui an maiorem accipi; ſi enim maior accipiatur, angulus incidentiae quidem Vfe ac proinde vis propellens diminueretur quidem contra autem obliquitas curſus fieret minor, quo ipſo prius detrimentum compenſari poſſet. Minor autem angulus edA ſtatui prorſus nequit, quia tum et obliquitas augeretur, et ventus non amplius totam velorum ſuperficiem inflaret.

§. 909 Si ergo ventus magis oblique in vela hoc modo extenſa incidat, quoniam velorum obliquitatem augere non licet, venti quaedam portio peribit; et cum inſuper angulus incidentiae diminuatur, vis propellens ſine dubio vehementer diminuetur; ſaepenumero autem vrgente neceſſitate, quando ventus curſui eſt contrarius, angulus Vfe ad $22°, 30'$ diminui ſolet. Quo igitur iſta vis

Digitized by Google

vis propellentis diminutio compenſetur, velorum latitudo commode augeri poterit, vtrinque appendices adiungendo. Quanquam enim latitudo velorum EF, *ef* latitudinem nauis ſuperat, tamen in iſto ſitu obliquo tota intra parietes nauis cadent, ex quo maior latitudo tractationem non impediet; hoc itaque modo venti portio alias peritura intercipietur, atque ad vſum impendetur. Poſſunt etiam in idoneis nauis locis noua vela extendi, quo magis vis a vento excipienda augeatur: hocque omnino fieri ſolet ſi ventus ſpiret lenior, ſin autem fuerit vehemens eiusmodi ſubſidia omitti debent, ne nauis a tanta vi obliqua nimiam patiatur inclinationem.

§. 910. Quamdiu ergo venti directio ita eſt comparata vt angulus VOA non fiat maior quam 60°, 28', vela in ſtatu deſcripto maxime obliquo ſeruare conueniet, quando vero angulus VOA excedet 60°, 28' tum iſta velorum diſpoſitio non commode retineri poterit. Quamvis enim angulus incidentiae augeatur, tamen ventus non amplius totam velorum ſuperficiem perſtringet, ex quo vis venti eo magis diminuetur, quo plures mali in naui fuerint conſtituti. Tum vero ipſa velorum obliquitas in cauſa eſt, quod celeritas nauis progreſſiua non fiat tanta, quanta ab eodem vento per aptiorem velorum diſpoſitionem impetrari poſſet. Quare ſi angulus VOA fiat maior quam 60°, 28' conueniet ſimul vela ita diſponi, vt angulus EDA fiat maior; quo tota velorum ſuperficies a vento inſletur; hinc enim non ſolum vis a vento excepta fiet maior, ſed quia media directio quae ad velorum ſuperficiem eſt normalis, propius ad nauis directionem BA adducitur, ipſa nauis celeritas intendetur, atqne deviatio diminuetur.

§. 911. Perſpicitur hinc etiam non ſtatim atque angulus VOA fiat maior quam 60°, 28′ vela in priorem obliquitatis ſitum conſtitui conuenire, in quo angulus A DE ſit 45°, ſed perpetuo dari quendam angulum, ex quo nauis maximam obtineat velocitatem. Quamobrem, ſi commoditatis gratia duae tantum obliquitatis velorum diſpoſitiones admittantur, plerumque naui non tantus motus inducetur, quantus ab eodem vento, ſi vela aliter diſponerentur, produci poſſet. Hinc expertus atque attentus gubernator, dum a vulgari velorum diſpoſitione recedit, ſatis notabiliter curſum nauis accelerare poterit. Nam ſi vel experientia vel theoria edoctus animaduertat, cum vela in altero obliquitatis ſitu iam fuerint collocata, curſum nauis celeriorem eſſe futurum, ſi obliquitas velorum aliquantum vel diminuatur vel augeatur, iubebit velorum extremitates E et F in vna parte magis adduci, in altera remitti, quo magis apta obliquitas obtineatur. Atque hoc modo non ſine admiratione in longinquis itineribus obſeruari ſolet, celeritatem nauis plurimum pendere a dexteritate gubernatorum, ita vt nauis ſub directione vnius celerius promoueatur, quam ſub directione reliquorum, etiamſi omnes circumſtantiae prorſus eaedem videantur.

§. 912. Quod igitur ad numerum malorum attinet, ex dictis patet nullam eſſe rationem, quae mutationem ſuadeat, niſi forte, cum nauis aduerſus ventum annititur, videantur plures mali vim propellentem augere. Quoniam autem per appendices iſte defectus compenſari poteſt, atque in curſu tantopere obliquo vis propellens nimis magna naui periculum minatur, etiam haec ratio numeri malorum multiplicandi ceſſat, quoniam ſi ventus contrarius

parum-

Digitized by Google

parumper fortis exiſtit, ne quidem his velis, quae mali ſuppeditant, vti licet. Praeterea vero rationi minime conſentaneum foret nauem vno pluribusue malis onerari, quae nunquam vſui eſſent, niſi in curſu aduerſus ventum inſtituendo, quando ſimul ventus leniſſime ſpiraret. Seruato ergo eo malorum numero, quem in capite praecedente pro curſu directo definiuimus, iisdem in omni curſu obliquo ſatis vtiliter frui licebit, dummodo vela ita diſponantur, vt nauis motum celerrimum conſequatur. Quo autem velorum diſpoſitio maxime idonea inueniri poſſit, ipſum nauis motum, qui a quouis vento et velorum ſitu quolibet producitur, inueſtigari oportet, vt hinc per methodum maximorum et minimorum velorum ſitus aptiſſimus quouis caſu aſſignari poſſit.

§. 913. Quia in ſitu velorum obliquo, nauis non curſu directo ſed obliquo fertur, ex ſola prorae figura eiusque reſiſtentia celeritas nauis definiri nequit, ſed etiam deuiationem curſus ab directo noſſe, et quantam nauis in hoc curſu obliquo patiatur reſiſtentiam, cognitum eſſe oportet. Pendet autem iſta inquiſitio tantopere ab vniuerſa nauis figura, vt niſi haec exactiſſime ſit cognita, atque ſimul ad calculum reuocari queat, nihil accurate definiri poſſit, quemadmodum in libro ſuperiori fuſius eſt oſtenſum. Interim tamen, quia in praeſenti negotio ſcientiam exquiſitiſſimam non requirimus, atque eius modi cognitio, quae a veritate ſaltem non nimis abhorret, ſufficiens cenſetur, a veritate aliquantum diſcedere licebit, vt calculus non ſolum tractabilior reddatur, ſed etiam commode ad vſum transferri poſſit. Hunc in finem neglectis reliquis momentis omnibus, quae a figura nauis pendent, tantum duplicem nauis reſiſten-

tiam in computum trahi conueniet, alteram quam nauis in curſu directo patitur, et alteram quam pateretur, ſi ad latus in directione normali ſeu ſecundum axem latitudinalem moueretur.

Tab. XXVII. fig. 1. §. 914. Sit igitur ff reſiſtentia nauis abſoluta, ſi curſu directo ſecundum axis longitudinem promoueatur, et ſit bb reſiſtentia nauis lateralis abſoluta, ſi ſecundum axem latitudinalem procederet; vtroque ſcilicet caſu reſiſtentia abſoluta indicatur per ſuperficiem planam, quae in aqua directe pari celeritate, qua nauis progreditur, mota etiam eandem, quam nauis reſiſtentiam patiatur. Non igitur in determinatione motus nauis cuiuscunque vehementer a veritate aberrabimus, ſi loco verae nauis mente ſubſtituamus parallelepipedum rectangulum $a\alpha\beta b$, cuius facies anterior $a\alpha$ ſit $=ff$, et facies lateralis $\alpha\beta$ ſeu $ab=bb$; ita vt huius nauis fictae prora ſit $a\alpha$, puppis $b\beta$, axis longitudinalis AB, et latitudinalis EF. Si enim iſta nauis ficta curſu directo feratur eandem patietur reſiſtentiam, quam nauis vera, eademque inſuper erit vtriusque nauis reſiſtentia, ſi vtraque ad latus ſecundum directionem CE vel CF progrediatur; vnde intelligitur diſcrimen ſenſibile intercedere non poſſe, ſi motus fiat oblique ſecundum directionem quamcunque CM. Quantus autem futurus ſit diſſenſus ex libro ſuperiori colligi poterit, vnde quidem is vix ſenſibilis deprehendetur.

§. 915. Subſtituta igitur hac naui ficta in locum verae, ſit VC directio venti, eiusque celeritas debita altitudini c; vela autem ita ſint diſpoſita ſecundum eCf vt angulus eCA ſit $=p$; et tota velorum ſuperficies ſit $=gg$. Sit porro angulus $VCe=q$, ſub quo ventus in vela incidit; erit ergo ſi ventus totam velorum ſuperficiem

ciem perſtringat, vis venti aequalis ponderi voluminis aerei $= cgg\,(\text{ſin.}\,q)^2$, ſeu aequalis ponderi voluminis aquei $= \frac{1}{800}\, cgg\,(\text{ſin.}\,q)^2$; huiusque vis directio erit recta CP ad velorum ſuperficiem ef normalis, ita vt ſit angulus $ACP = 90^\circ - ACe = 90^\circ - p$. Nunc dum nauis iſta vi ſecundum directionem CP impellitur, quaeritur directio et celeritas, qua nauis ſit progreſſura. Sit CM directio nauis quaeſita, et angulus $ACM = s$, qui erit deuiatio curſus, ſeu curſus obliquitas; celeritas autem nauis, qua in hac directione progredietur debita ſit altitudini v, ita vt ipſa celeritas nauis futura ſit vt $\sqrt{v}$.

§ 916. Quoniam ponitur angulus $ACM = s$ erit vis quam facies anterior $aa = ff$ ab aqua perpetietur $= ffv\,(\text{coſ.}\,s)^2$, expreſſa in volumine aquae, huiusque vis directio erit recta AB, vis autem quam facies lateralis $\alpha\beta$ ſuſtinebit erit $= bbv\,(\text{ſin.}\,s)^2$ cuius directio erit in recta FE. Dum igitur nauis ſecundum directionem CP vi $= \frac{1}{800}\, cgg\,(\text{ſin.}\,q)^2$ vrgetur, a reſiſtentia duplicem patietur vim, alteram $= ffv\,(\text{coſ.}\,s)^2$ in directione CB, alteram $= bbv\,(\text{ſin.}\,s)^2$ in directione CE. Vis ergo his binis ex reſiſtentia aquae ortis aequiualens, quae ſit CR, primum ratione directionis vi CP contraria, tum vero eidem aequalis eſſe debet. Quia vero CR eſt media directio virium CB et CE, erit tang $BCR = \frac{bbv\,(\text{ſin.}\,s)^2}{ffv\,(\text{coſ.}\,s)^2} = \frac{bb}{ff}\,(\text{tang.}\,s)^2$. Quare cum angulus BCR aequalis eſſe debeat angulo $ACP = 90 - p$ erit tang. $BCR = \cot p = \frac{bb}{ff}\,(\text{tang}\,s)^2$; vnde ſtatim reperitur deuiatio nauis ſeu angulus $ACM = s$ ex aequatione tang. $s = \sqrt{\frac{ff}{bb}\cot p} = \sqrt{\frac{ff}{bb}\,\text{cotang.}\,ACe}$. Ex velorum ergo diſpoſitione ef, et vtraque nauis reſiſtentia abſoluta ff et bb reperitur deuiatio nauis ſeu declinatio a curſu directo ACM.

§. 917. Cum porro ſit $BCR = 90 - p$, erit vis aequiualens $CR = \frac{vi\ CB}{\text{coſ.}\, BCR} = \frac{ffv(\text{coſ.}\, s)^2}{\text{ſin.}\, p}$. Quia vero eſt $\text{tang.}\, s = \sqrt{\frac{ff}{bb}} \cot p$, erit ſec. $s = \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$ et coſ. $s = 1 : \sqrt{(1 + \frac{ff}{bb} \cot p)}$, vnde fit vis $CR = \frac{ff\, v}{\text{ſin.}\, p + \frac{ff}{bb} \text{coſ.}\, p}$; quae cum aequalis eſſe debeat vi propellenti $\frac{1}{800} cgg\, (\text{ſin.}\, q)^2$, fiet $v = \frac{1}{800} cgg\, (\frac{\text{ſin}\, p}{ff} + \frac{\text{coſ.}\, p}{bb}) (\text{ſin.}\, q)^2$, ex qua aequatione celeritas nauis innoteſcit. Ad quam commodius exprimendam ducantur diagonales $a\beta$ et $b\alpha$, erit angulorum bCB, aCA tangens $= \frac{ff}{bb}$; ſinus $= \frac{ff}{\sqrt{(f^4 + b^4)}}$, et coſinus $= \frac{bb}{\sqrt{(f^4 + b^4)}}$. Sit angulus $ACa = BCb = e$, erit $v = \frac{1}{800}(\text{coſ.}\, e\, \text{ſin.}\, p + \text{ſin.}\, e\, \text{coſ.}\, p)(\text{ſin.}\, q)^2 \frac{cgg\sqrt{(f^4 + b^4)}}{ff\, bb} = \frac{1}{800}\, \text{ſin.}\, (p + e)(\text{ſin.}\, q)^2 . \frac{cgg}{bb\, \text{ſin.}\, e} = \frac{1}{800}\, \text{ſin.}\, (p + e)(\text{ſin.}\, q)^2 . \frac{cgg}{ff\, \text{coſ.}\, e}$. Erit vero $p + e = \text{ang.}\, eC\alpha$, et $q = \text{ang.}\, VCe$, vnde fiet primo $\text{tang.}\, ACM = \sqrt{\text{tang.}\, AC\alpha . \text{cotang.}\, ACe}$ et $v = \frac{cgg}{800 ff\, \text{coſ.}\, AC\alpha}\, \text{ſin.}\, eC\alpha (\text{ſin.}\, VCe)^2$.

§ 918. Poſſint hinc plura problemata excogitari et reſolui, quae ad praxin non paruum ſubſidium afferunt. Sic ſi ponamus directionem nauis AB vna cum directione venti VC eſſe datam aptiſſima velorum diſpoſitio determinari poterit, qua nauis celerrime promoueatur. Quia nimirum directio nauis datur, ſimul poſitio rectae $C\alpha$ dabitur, ponatur ergo angulus datus $VC\alpha = a$ et angulus $VCe = q$, erit ang. $eC\alpha = a - q$. Hinc cum ſit $v = \frac{cgg}{800 ff\, \text{coſ.}\, AC\alpha}\, \text{ſin.}\, (a - q)(\text{ſin.}\, q)^2$, maximum eſſe debebit haec expreſſio $\text{ſin.}\, (a - q)(\text{ſin.}\, q)^2$, vnde fit $\text{coſ.}\, (a - q)(\text{ſin.}\, q)^2 = 2\, \text{ſin.}\, (a - q)\, \text{ſin.}\, q\, \text{coſ.}\, q$, et per coſ $(a - q)$ ſin. q coſ. q vtrinque diuidendo habebitur $\text{tang.}\, q = 2\, \text{tang}(a - q)$.

Quam-

Quamobrem angulum datum $VC\alpha$ ita in duas partes per rectam Ce ſecari oportet, vt anguli VCe tangens duplo ſit maior quam tangens anguli $eC\alpha$. Ad angulum ergo $VCe = q$ inueniendum ſit tang. $a = \alpha$ et tang. $q = \theta$ erit $\theta = \frac{2\alpha - 2\theta}{1 + \alpha\theta}$ ſeu $3\theta + \alpha\theta\theta = 2\alpha$, vnde $\theta = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{2\alpha}$. Vel ſi ponatur ſin. $\alpha CV = m$, et coſ. $\alpha CV = n$ erit $\theta = \frac{-3n + \sqrt{(9nn + 8mm)}}{2m}$ ſeu $\theta = \text{tang}\, q = \frac{-3n + \sqrt{(9 - mm)}}{2m} = \frac{\sqrt{(9 - mm)} - \sqrt{(9 - 9mm)}}{2m}$.

§. 919. Semper ergo maior eſſe debet angulus VCe quam angulus $eC\alpha$, quia illius tangens aequatur duplae tangenti huius, niſi caſu quo venti directio VC cadit in Cb; hic enim poſitio velorum ef ad lineam $bC\alpha$ erit normalis. Quando autem angulus $VC\alpha$ fit valde acutus, tum angulus $eC\alpha$ duplo minor erit angulo VCe hoc ergo caſu angulum $VC\alpha$ in tres partes aequales ſecari oportebit, vnamque partem angulo αCe tribui Sin angulus $VC\alpha$ fiat rectus, erit angulus $eC\alpha = 35^\circ, 15'$, et ang. $VCe = 54^\circ, 45'$. Quoniam vero deuiatio nauis ſeu angulus ACM ita definitur, poſito $AC\alpha = e$ vt ſit tang. $ACM = V$ tang. e cot $(a - q - e)$ ob cot $(a - q - e) = \frac{1 + \text{tang.}(a - q)\,\text{tang.}\, e}{\text{tang}\,(a - q) - \text{tang.}\, e} = \frac{2 + \text{tang.}\, q \cdot \text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, q - 2\,\text{tang.}\, e}$, erit tang. $ACM = V \frac{2\,\text{tang.}\, e + \text{tang.}\, q\,(\text{tang.}\, e)^2}{\text{tang.}\, q - 2\,\text{tang.}\, e}$. Hinc declinatio nauis euaneſcet, ſi fiat tang. $q = -2$. cot. e; ſi exempli gratia ſit $e = AC\alpha = 5^\circ$ erit $q = VCe = 92^\circ, 31'$; et $eC\alpha = 95^\circ$, quo ergo caſu habetur curſus directus.

§. 920. Ceterum ex formulis quas (917) tam pro declinatione nauis ACM quam pro celeritate nauis, quae a dato vento et data velorum diſpoſitione oritur, inuenimus, faciles regulae deriuari poſſunt ad motum nauis determinandum. Cum enim ſit tang. $ACM = V$ tang. $AC\alpha$.

cot

Digitized by Google

cot $\dot{A}Ce$, quia angulus eCP eſt rectus erit tang. $ACM = \sqrt{}$ tang. $AC\alpha$. tang. ACP. Producta ergo $a\,\alpha$ donec rectas CM et CP ſecet in μ et P, et ſumta AC pro ſinu toto, erit $A\mu =$ tang. ACM; $A\alpha =$ tang. $AC\alpha$; et $AP =$ tang. ACP; hincque fit $A\mu = \sqrt{A\alpha . Ap}$; ex quo erit $A\mu$ media proportionalis inter $A\alpha$ et AP. Sumta ergo $A\mu$ media proportionali inter $A\alpha$ et AP recta $C\mu M$ dabit directionem in qua nauis promouebitur. Quoniam deinde eſt $a\alpha = ff$, ſi ex a in $b\alpha$ demittatur perpendiculum $a\gamma$, erit $a\gamma = ff$ coſ. $AC\alpha = ff$ coſ. e. Hinc ergo erit $v = \frac{cgg}{100\,a\gamma}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$. Sumatur ergo $C\delta$, quae ſe habeat ad $a\alpha$ vt ſuperficies velorum gg ad reſiſtentiam prorae abſolutam ff, erit $v = \frac{c . C\delta}{100 . a\gamma}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$; vnde erit celeritas venti apparens $\sqrt{c}$ ad celeritatem nauis $\sqrt{v}$ vt 1 ad ſin. $VCe . \sqrt{\frac{C\delta}{100\,a\gamma}}$ ſin. $eC\alpha$.

§. 921. Cum ergo ſit celeritas nauis $\sqrt{v} =$ ſin. $VCe \sqrt{\frac{c . C\delta}{100\,a\gamma}}$ ſin. $eC\alpha$, erit celeritas nauis perpetuo in ratione compoſita ex ſimplici celeritatis venti $\sqrt{c}$, et ſinus anguli incidentiae VCe, atque ex ſub duplicata ratione ſuperficiei velorum $C\delta$ et ſinus anguli $eC\alpha$. Manente ergo celeritate venti et ſuperficie velorum eadem nauis celerrime promouebitur, ſi vterque angulus VCe et $eC\alpha$ fuerit rectus; quo itaque naui celerrimus motus imprimatur, nauis ita eſt dirigenda vt directio venti in diagonalem bC incidat, atque vela ita ſint diſponenda, vt ef ſit ad eandem diagonalem $b\alpha$ normalis. Eiusmodi ergo curſum inſtitui conueniet, ſi hoſtem nos a tergo perſequentem effugere velimus. Quoniam vero ſi nauis pluribus malis eſt inſtructa, ventus non omnia vela in hoc curſu perſtringere valet; his

his caſibus expediet curſum magis obliquum eligere, quo maior velorum portio vel integra ſuperficies a vento infletur, in quo negotio pariter maximum definire licebit.

§. 922. Quando autem curſus nauis verſus determinatam plagam dirigi debet, parum refert celerrime proceſſiſſe, niſi ſimul nauis in propoſita directione promoueatur. Quamobrem hic quaeſtio in praxi vtiliſſima naſcitur, quemadmodum pro data venti directione non ſolum vela diſponi, ſed etiam ipſam nauem dirigi oporteat, vt in data directione CM celerrime progrediatur. Sit igitur VC directio venti, et CM curſus a naui deſcribendus; ac ponatur angulus $VCM = a$. Sit autem ACB poſitio nauis aptiſſima, quae quaeritur, ac ponatur, angulus $ACM = s$; qui deſignat declinationem curſus, erit ob ang. $AC\alpha = e$, angulus $\alpha CM = s - e$; et ang. $VCA = a - s$. Deinde ſit ef velorum diſpoſitio maxime idonea ponaturque angulus $eCA = p$; et angulus incidentiae $VCe = q$; erit $p + q = a - s$. Primum ergo ex formula pro deuiatione inuenta erit tang. $s = \sqrt{}$ tang. e cot. $p = \sqrt{\frac{\text{tang.}\, e}{\text{tang.}\, p}}$; ideoque tang. $p = \frac{\text{tang.}\, e}{(\text{tang.}\, s)^2}$, vnde ex angulo ACM ſtatim inuenitur velorum diſpoſitio ſeu angulus $eCA = p$.

§. 923. Poſitis porro celeritate venti $= \sqrt{c}$ et celeritate nauis $= \sqrt{v}$, erit $v = \frac{cgg}{800 ff \cos e}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$. Eſt vero $eC\alpha = p + e$; et $VCe = q = a - s - p$; vnde erit $v = \frac{cgg}{800 ff \cos. e}$ ſin. $(e + p)(\text{ſin.}\, q)^2$; ac propterea maximum effici debet ſin. $(e + p)(\text{ſin.}\, q)^2$, ex quo naſcitur iſta aequatio dp coſ. $(e + p)(\text{ſin.}\, q)^2 + 2\, dq$ ſin. $(e + p)$ ſin q coſ. $q = 0$, ſeu $0 = dp$ tang. $q + 2\, dq$ tang. $(e + p)$. Cum vero ſit tang. $p = \frac{\text{tang.}\, e}{(\text{tang.}\, s)^2}$ erit $dp = \frac{-2\, ds\, \text{tang.}\, e\, (\text{coſ.}\, p)^2}{\text{tang.}\, s\, (\text{ſin.}\, s)^2}$;

et ob $q = a - s - p$, erit $d\,q = -\,d\,s + \frac{2\,ds\ \text{tang.}\ e\,(\text{coſ.}\ p)^2}{\text{tang.}\ s\,(\text{ſin.}\ s)^2}$, quibus valoribus ſubſtitutis et per $d\,s$ diuiſo habebitur $\frac{2\,\text{tang.}\ e\,(\text{coſ.}\ p)^2\ \text{tang.}\ q}{\text{tang.}\ s\,(\text{ſin.}\ s)^2} = \frac{2\,\text{tang.}\ e\,(\text{coſ.}\ p)^2\ \text{tang.}\ (e+p)}{\text{tang.}\ s\,(\text{ſin.}\ s)^2} - 2\ \text{tang.}\ (e+p)$. Seu $\text{tang}\ e\,(\text{coſ.}\ p)^2\ \text{tang.}\ q + \text{tang.}\ s\,(\text{ſin.}\ s)^2\ \text{tang.}\ (e+p) = 2\ \text{tang}\ e\,(\text{coſ.}\ p)^2\ \text{tang}\ (e+p)$.

§. 924. Sit tang. $e = \delta$; tang. $p = x$; et tang. $a = \alpha$; erit tang. $s = \sqrt{\frac{x}{\delta}}$; et ſin. $s = \sqrt{\frac{\delta}{\delta + x}}$; deinde ob $q = a - s - p$ erit tang. $q = \frac{\text{tang.}\ (a-p) - \text{tang.}\ s}{1 + \text{tang.}\ (a-p)\ \text{tang.}\ s} = \frac{\alpha - x - (1 + \alpha x)\ \text{tang.}\ s}{1 + \alpha x + (\alpha - x)\ \text{tang.}\ s} = \frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1 + \alpha x)\sqrt{\delta}}{(1 + \alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}}$; et tang. $(e+p) = \frac{\delta + x}{1 - \delta x}$; quibus ſubſtitutis ob coſ. $p = \frac{1}{\sqrt{(1 + xx)}}$ et $\frac{1}{(\text{coſ.}\ p)^2} = 1 + xx$, erit $\frac{(\alpha - x)\sqrt{x} - (1 + \alpha x)\sqrt{\delta}}{(1 + \alpha x)\sqrt{x} + (\alpha - x)\sqrt{\delta}} + \frac{(1 + xx)\sqrt{\delta}}{(1 - \delta x)\sqrt{x}} = \frac{2(\delta + x)}{1 - \delta x}$. Si haec aequatio a fractionibus liberetur diuiſibilis erit per $\delta + x$, atque diuiſione peracta prodibit $\alpha - 3x - 2\alpha xx = (2\alpha - 3x - \alpha xx)\sqrt{\delta x}$. Haec autem aequatio euoluta fit quinque dimenſionum ita vt hinc in genere nihil ad nauis velorumue diſpoſitionem concludi queat. Quoniam vero angulus e plerumque valde eſt exiguus, ſi eum prorſus euaneſcentem ponamus vt ſit $\delta = 0$, erit $\alpha - 3x = 2\alpha xx$ hincque $x = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}$, quae quidem ſolutio ob deuiationem euaneſcentem congruit cum ſupra (919) inuenta.

§. 925. Quanquam ergo angulus e non pro euaneſcente haberi poteſt, tamen quia eſt valde paruus, iſte pro x inuentus valor non multum a vero aberrabit. Sit itaque verus valor $x = \frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha} + z\sqrt{\delta}$ fiet $-3z + \frac{(3 - \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)})}{} z = -z\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)} = \frac{12\alpha\alpha + 9 - 3\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{8\alpha} \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$. hincque $z = \frac{-9 - 12\alpha\alpha + 3\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{8\alpha\sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}} \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha}}$, Vel ſi ponatur $\frac{-3 + \sqrt{(9 + 8\alpha\alpha)}}{4\alpha} = \mathfrak{C}$ vt ſit $\alpha = \frac{3\mathfrak{C}}{1 - 2\mathfrak{C}\mathfrak{C}}$ reperie-

perietur $z=\frac{-\epsilon-\epsilon^3}{1+2\epsilon\epsilon}\sqrt{\epsilon}$, vnde fit $x=\epsilon-\frac{\epsilon(1+\epsilon\epsilon)\sqrt{\epsilon\delta}}{1+2\epsilon\epsilon}$, qui valor facile loco veri ſubſtituetur. Hoc igitur modo definitur $x=$ tang. p ideoque velorum diſpoſitio in naui ſeu angulus eCA: quo cognito ſtatim prodibit angulus ACM $=s$, cum ſit tang. $s\sqrt{\frac{\delta}{x}}$, vnde directio nauis AB innoteſcit; ſicque tam nauis ita dirigetur, atque vela ita diſponentur, vt nauis ſecundum directionem CM celerrime promoueatur.

§ 926. Quemadmodum autem in quouis caſu tam nauis dirigi quam vela diſponi debeant, commodiſſime ex tabella perſpicietur, in qua pro pluribus diuerſis angulis VCM et nauis et velorum diſpoſitio maxime idonea exhibeatur Ad eiusmodi vero tabellam conficiendam valor x pro cognito aſſumi ex eoque valor ipſius α definiri poterit, id quod facile praeſtatur ex hac aequatione $\alpha=\frac{2x(1-\sqrt{\delta}x)}{1-2\sqrt{\delta}x-2xx+2xx\sqrt{\delta}x}$. Oportet autem pro δ valorem conuenientem aſſumi, quia igitur eſt $\delta=$ tang. $e=\frac{ff}{bb}$, ac reſiſtentia lateralis bb multum ſuperat reſiſtentiam prorae ff, ponamus $bb=9ff$; quae hypotheſis in plerisque nauibus non multum a veritate abhorrebit. Cum enim naues quadruplo ſoleant eſſe longiores quam latae, hinc iam foret $bb=4ff$, ſi formam heberent parallelepipedi, at per prorae elongationem eius reſiſtentia circiter duplo redditur minor, vnde fere fit $bb=9ff$ et $\delta=\frac{1}{9}$, vnde ang. AC$\alpha=6^\circ, 21'$, hancobrem habebitur $\alpha=$ tang. VCM $=\frac{x(1-\sqrt{x})}{2-2\sqrt{x}-6xx+2x\sqrt{x}}$ exiſtente tang. eCA $=x$; et tang. $s=$ tang. ACM $=\frac{1}{3\sqrt{x}}$ et VC$e=$ VCM $-$ ACM $-$ eCA.

§. 927. At vero tentanti patebit non licere pro x nimis paruos valores accipi, quia alias angulus ACM fie-

ret maior quam totus angulus VCM, hisque adeo caſibus nauis retro in directione MC moueretur contra inſtitutum. Si enim ponatur angulus $eCA = 10°$, prodibit $VCM = 34°, 29'$ et $ACM = 38°, 27'$. Quo igitur caſus ad propoſitum pertinentes obtineamus, manifeſtum eſt motum, qualem deſideramus, oriri non poſſe, niſi ſit angulus VCM maior quam $eCM = p + s$; quare debebit eſſe $\alpha > \frac{1 + 3x\sqrt{x}}{3\sqrt{x} - x}$, ſubſtituto autem loco α valore invento, ſublatisque fractionibus, diuidi poterit per $1 + xx$, atque ex quoto cognoſcetur eſſe debere $2\sqrt{x} + 18x\sqrt{x} > 3 + 3xx$. Hinc per approximationem reperitur eſſe debere $x > 0,24559$; ideoque neceſſe eſt vt angulus eCA maior ſtatuatur quam $13°, 48'$, vnde ab hoc angulo aſcendendo valores pro eCA accipi debebunt, ſumto enim $eCA = 13°, 48'$ nauis nullum motum in directione propoſita accipere poterit ſed quieſcet.

Tab. XXVII. fig. 2. §. 928. En igitur eiusmodi tabellam, quae pro variis anguli VCM valoribus exhibet angulos eCA, VCA, ACM, $eC\alpha$, et VCe, vt nauis celerrime in directione CM promoueatur.

VC

V C M	*e* C A	V C A	A C M	*e* C *o*	V C *e*
47°, 44′	13°, 48′	13°, 48′	33°, 56′	20°, 9′	0°, 0′
51, 47	15, 0	19, 0	32, 47	21, 21	4, 0
67, 36	20, 0	38, 41	28, 55	26, 21	18, 41
81, 37	25, 0	55, 36	26, 1	31, 21	30, 36
93, 56	30, 0	70, 15	23, 41	36, 21	40, 15
104, 51	35, 0	83, 8	21, 43	41, 21	48, 8
114, 41	40, 0	94, 41	20, 0	46, 21	54, 41
123, 41	45, 0	105, 20	18, 21	51, 21	50, 20
132, 6	50, 0	115, 7	16, 59	56, 21	55, 7
139, 55	55, 0	124, 20	15, 35	61, 21	69, 20
147, 24	60, 0	133, 12	14, 12	66, 21	73, 12
154, 38	65, 0	141, 49	12, 49	71, 21	76, 49
161, 31	70, 0	150, 9	11, 22	76, 21	0, 9
168, 16	75, 0	158, 29	9, 47	31, 21	3, 29
174, 55	80, 0	166, 57	7, 58	6, 21	6, 57
182, 9	85, 0	176, 31	5, 38	1, 2	1, 31
180, 0	90, 0	180, 0	0, 0	6, 2	0, 0

§. 929. Ex hoc ergo tabula primum patet, niſi angulus VCM, quem directio venti VC cum via propoſita CM conſtituit maior ſit quam 47°, 44′, hunc curſum omnino teneri non poſſe. Pendet autem iſte angulus 47°, 44′ ab angulo ACα quem 6°, 21′, aſſumſimus; qui ſi minor maiorue eſſet aſſumtus, etiam vltimus ſeu minimus angulus VCM minor maiorue prodiiſſet. Sin autem reſiſtentia lateralis *bb* infinita eſſet reſpectu *ff*, ideoque angulus ACα euaneſceret, tum quantusuis exiguus foret angulus VCM tamen curſum inſtitui liceret. Pendet ergo haec diiudicatio curſus conuenientiſſimi a ratione inter

reſiſtentiam prorae *ff* et reſiſtentiam lateralem *bb*, quae idcirco ante omnia cognita eſſe debet, id quod per vnicam obſeruationem deuiationis nauis facile praeſtabitur. In curſu enim obliquo notetur primum angulus *e*CA qui ſit $= p$; tum vero obſeruetur deuiatio nauis ſeu angulus ACM qui ſit $= s$; his cognitis erit tang. ACα $=$ tang. p (tang s)^2. Quodſi ergo angulus ACα maior minorue prodeat quam 6°, 21′, alia tabula conſtitui debebit, ex qua curſus nauis aptiſſimus determinetur.

§. 930. Hunc in finem adiungam hic tabulam, in qua angulus ACα infinite paruus aſſumitur, quo facilius ex collatione huius cum praecedente caſus medii, quibus angulus ACα minor deprehenditur quam 6°, 21′, dignoſci queant.

VCM

Digitized by Google

V C M	e C A	V C A	A C α	e C α	V C e
14°, 49′	5°, 0′	14°, 49′	0°, 0′	5°, 0′	9°, 49′
29, 25	10, 0	29, 25	0, 0	10, 0	19, 25
44, 11	15, 0	44, 11	0, 0	15, 0	28, 11
56, 3	20, 0	56, 3	0, 0	20, 0	36, 3
68, 0	25, 0	68, 0	0, 0	25, 0	43, 0
79, 6	30, 0	79, 6	0, 0	30, 0	49, 6
89, 28	35, 0	89, 28	0, 0	35, 0	54, 28
99, 13	40, 0	99, 13	0, 0	40, 0	59, 13
108, 26	45, 0	108, 26	0, 0	45, 0	63, 26
117, 15	50, 0	117, 15	0, 0	50, 0	67, 15
125, 42	55, 0	125, 42	0, 0	55, 0	70, 42
133, 54	60, 0	133, 54	0, 0	60, 0	73, 54
141, 53	65, 0	141, 53	0, 0	65, 0	76. 53
149, 41	70, 0	149, 41	0, 0	70, 0	79, 41
157, 22	75, 0	157, 22	0, 0	75, 0	82, 22
164, 58	80, 0	164, 58	0, 0	80, 0	84, 58
172, 28	85, 0	172, 28	0, 0	85, 0	87, 28
180, 0	90, 0	180, 0	0, 0	90, 0	90, 0

§. 931. Ex his ergo duabus tabulis coniunctis, ſi angulus ACα minor deprehendatur quam 6°, 21′, pro quouis angulo VCM propoſito ſatis exacte ad praxin tam nauis directio quam velorum diſpoſitio definiri poterit, vt nauis in data via celerrime progrediatur. Sit enim angulus ACα = 3°, 10′, medium ſcilicet teneat inter 6°, 21′, et 0°, 0′; atque propoſitus ſit angulus VCM = 90°. Pro velorum diſpoſitione ſeu angulo eCA tabula prior dat 28°, 24′, poſterior vero dat 35°, 16′, inter quos valores medius 31°, 50′ dabit valorem aptiſſimum pro

pro angulo eCA. Hinc erit ex regula generali tang. ACM $= \sqrt{\frac{\text{tang. } 3^\circ, 10'}{\text{tang. } 31^\circ, 50}}$, ideoque declinatio nauis ſeu angulus ACM $= 16^\circ, 37'$. Quare ex his, ſi in naui quapiam fuerit angulus AC$\alpha = 3^\circ, 10'$, atque angulus fuerit propoſitus VCM $= 90^\circ$, ſequenti modo nauis dirigi, velaque diſponi conueniet, vt ſit eCA $= 31^\circ, 50'$; VCA $= 73^\circ, 23'$, ACM $= 16^\circ, 37'$ et eC$\alpha = 35^\circ, 0'$ et VC$e = 41^\circ, 33'$.

§. 932. Quemadmodum autem hic, dum poſuimus $\delta =$ tang. AC$\alpha = \frac{1}{9}$, inuenimus curſum teneri non poſſe niſi ſit angulus VCM maior quam $47^\circ, 44'$, ſeu angulus e CA maior quam $13^\circ, 48'$; ſimili modo quicunque alius valor ipſi δ tribuatur reperiri poterunt limites pro angulis VCM et eCA, quos hi anguli ſuperare debent. Cum enim eſſe debeat angulus VCM maior quam eCM $= p + s$, ſi hi duo anguli aequales ponantur, prodibunt limites illi deſiderati. At quia eſt tang. $p = x$ et tang. $s = \sqrt{\frac{\delta}{x}}$ erit tang. $(p + s) = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$, vnde fit tang. VCM $= \alpha = \frac{2x(1 - \sqrt{\delta}\, x)}{1 - 2\sqrt{\delta}\, x - 2xx + 2x\sqrt{\delta}} = \frac{\sqrt{\delta} + x\sqrt{x}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}}$. Quae aequatio ſi a fractionibus liberetur, tumque per $1 + xx$ diuidatur, orietur $\sqrt{\delta} - 2\delta\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + xx\sqrt{\delta} = 0$ vnde cum δ ſit quantitas valde parua, per approximationem oritur $x = \sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{4}\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{8}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}}$. Dabit autem x tangentem anguli eCA et $\sqrt{\frac{\delta}{x}}$ tangentem anguli ACM horumque angulorum ſumma praebebit angulum minimum VCM, erit vero $\sqrt{\frac{\delta}{x}} = 2\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} + \frac{\delta}{3} + \delta\sqrt[3]{\frac{\delta\delta}{16}} + \frac{\delta\delta}{3}\sqrt[3]{\frac{\delta}{4}} =$ tang ACM.

§. 933.

Digitized by Google

§. 933. Quoties igitur euenit, vt angulus VCM non excedat limitem ſic inuentum; curſus propoſitus teneri non poteſt; et cum neque quieſcere neque regredi conueniat, eiusmodi curſum inſtitui oportet, quem tenentes ad propoſitam metam etiamſi non directe accurramus, tamen appropinquemus. Maxime autem hoc ſubſidium vſu venit, quando ventus directe ex eadem regione in quam tendimus, venit. Quamuis enim plane impoſſibile ſit contra ventum progredi, tamen ita curſum inſtituere licet, vt nauis in recta CM, quae cum VM angulum acutum faciat, promoueatur, ſicque adeo plagam verſus, vnde ventus venit, appellatur. Praecipuum autem negotium in hoc verſatur, vt, cum infinitis modis aduerſus ventum luctari liceat, is imprimis curſus definiatur atque eligatur, quo nauis eodem tempore plurimum verſus plagam, vnde ventus venit, promoueatur.

§. 934. Si ventus veniat ex plaga VC, ponamus ACB eam eſſe nauis directionem, et eCf velorum diſpoſitionem maxime idoneam, vt ex itinere maximum lucrum contra ventum obtineatur. Sit angulus $VCe = q$; $eCA = p$, et angulus ex indole nauis cognitus $AC\alpha = e$; tum vero ponatur angulus ACM ſeu declinatio nauis a curſu directo $= s$; erit vti vidimus tang. $s = \sqrt{\frac{tang. e}{tang. p}}$. Deinde vero eſt altitudo celeritati nauis debita $v = \frac{cgg}{100ff\, coſ. e}$ ſin. $eC\alpha$ (ſin. $VCe)^2$ hincque ipſa celeritas, qua nauis in directione CM procedet erit vt ſin. $q \sqrt{}$ ſin $(e + p)$, quae ſi multiplicetur in coſinum anguli $VCM = p + q + s$ dabit celeritatem deriuatiuam, qua nauis adverſus ventum progreditur, quae ergo maxima eſt efficienda. Quocirca maxima fieri debet iſta expreſſio coſ. $(p + q + s)$ ſin. q

V ſin. $(e+p)$. At ex aequatione tang. $s = V\frac{\text{tang. } e}{\text{tang. } p}$ habetur $dp = \frac{-2\,ds\,\text{tang. } e\,(\text{coſ. } p)^2}{\text{tang. } s\,(\text{ſin. } s)^2}$ ſeu $ds = \frac{-dp\,\text{tang. } s\,(\text{ſin. } s)^2}{2\,\text{tang. } e\,(\text{coſ. } p)^2} = \frac{-dp\,V\,\text{tang. } e}{2\,(\text{tang. } e + \text{tang. } p)\,(\text{coſ. } p)^2\,V\,\text{tang. } p}$.

§. 935. Quoniam hic duae inſunt quantitates variabiles p et q a ſe inuicem non pendentes, vtramque ad maximum efficiendum definiri oportet, ex quo maximum maximorum elicietur. Habeat p hincque etiam s iam valorem, quem maximi natura poſtulat, et quaeratur valor anguli q; debebit ergo eſſe ſin. q coſ. $(p+q+s)$, maximum, vnde oritur coſ. q coſ. $(p+q+s) =$ ſin. q ſin. $(p+q+s)$ ſeu cot. $q =$ tang. $(p+q+s)$. Fiet ergo $90° - q = p+q+s$; et $q = \frac{90°-p-s}{2}$. Quod ſi ergo iam inuenta ſit diſpoſitio velorum ſeu angulus eCA ex quo ſimul habetur angulus ACM $= s$, nauis ipſa ita verſus ventum dirigi debet, vt ducta CL ad CM normali, angulus LC$e = 90 - p - s$ a venti directione VC biſecetur. Intelligitur hinc etiam quaecunque velorum diſpoſitio habeatur, inter omnes nauis directiones hoc modo inueniri eam, quae motum celerrimum aduerſus ventum producat. Supereſt ergo vt velorum aptiſſimam diſpoſitionem ſeu angulum q inueſtigemus, quo inuento promtiſſimus motus contra ventum obtineatur.

§. 936. Cum igitur ſit $q = \frac{90-p-s}{2}$ et $p+q+s = \frac{90+p+s}{2} = 90 - q$, erit coſ. $(p+q+s) =$ ſin. $q =$ ſin. $\frac{90-p-s}{2}$; hincque iſta expreſſio fieri debet maximum $(\text{ſin. } q)^2\,V$ ſin. $(e+p)$, vnde fit $2\,dq$ ſin. q coſ. $q\,V$ ſin. $(e+p) + \frac{dp\,\text{coſ. }(e+p)\,(\text{ſin. } q)^2}{2\,V\,\text{ſin. }(e+p)} = 0$ ſiue $4\,dq$ ſin. q coſ. q ſin. $(e+p) + dp\,(\text{ſin. } q)^2$ coſ. $(e+p) = 0$, ex qua naſcitur $4\,dq$ tang. $(e+p) + dp$ tang. $q = 0$. Eſt vero $dq = \frac{-dp-ds}{2}$

$= -$

$= -\frac{dp}{2} + \frac{dq\sqrt{tang.\,e}}{4(tang.\,e + tang.\,p)(coſ.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$, quo ſubſtituto orietur tang. $q =$ tang. $\frac{90-p-s}{2} = 2$ tang. $(e+p) - \frac{\sqrt{tang.\,e}}{(1-tang.\,e\;tang.\,p)(coſ.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$. At eſt tang. $\frac{90-p-s}{2} = \sqrt{\frac{1-ſin.\,(p+s)}{1+ſin.\,(p+s)}} = \frac{1-ſin.\,(p+s)}{coſ.\,(p+s)} = \frac{1-ſin.\,p\;coſ.\,s - coſ.\,p\;ſin.\,s}{coſ.\,p\;coſ.\,s - ſin.\,p\;ſin.\,s} = \frac{2\,tang.\,e + 2\,tang.\,p}{1-tang.\,e\;tang.\,p} - \frac{\sqrt{tang.\,e}}{(1-tang.\,e\;tang.\,p)(coſ.\,p)^2\sqrt{tang.\,p}}$. Cum iam ſit tang. $s = \sqrt{\frac{tang.\,e}{tang.\,p}}$ erit ſin. $s = \frac{\sqrt{tang.\,e}}{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)}}$ et coſ. $s = \frac{\sqrt{tang.\,p}}{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)}}$ fiet tang. $\frac{90-p-s}{2} = \frac{\sqrt{(tang.\,e + tang.\,p)} - ſin.\,p\sqrt{tang.\,p} - coſ.\,p\sqrt{tang.\,e}}{coſ.\,p\sqrt{tang.\,p} - ſin.\,p\sqrt{tang.\,e}}$.

§. 937. Ponatur tang. $e = \delta$ et tang. $p = x$, vt ſit ſin. $p = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}}$ et coſ. $p = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}}$; quibus ſubſtitutis habebitur $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} - x\sqrt{x} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{x} - x\sqrt{\delta}} = \frac{2\delta + 2x}{1-\delta x} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1-\delta x)\sqrt{x}}$ quae multiplicata per $1 - \sqrt{\delta x}$ tranſibit in hanc: $\frac{\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{2\delta + 2x}{1+\sqrt{\delta x}} - \frac{(1+xx)\sqrt{\delta}}{(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{x}}$. Multiplicetur per $(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{x}$, et fiet $\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} + \sqrt{\delta x(\delta+x)(1+xx)} - \sqrt{\delta} - x\sqrt{x} - \delta\sqrt{x} - xx\sqrt{\delta} = 2\delta\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} - \sqrt{\delta} - xx\sqrt{\delta}$ ſeu $(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{(\delta+x)(1+xx)} = 3(\delta+x)\sqrt{x}$; quae per $\sqrt{(\delta+x)}$ diuiſa dat $(1+\sqrt{\delta x})\sqrt{(1+xx)} = 3\sqrt{x(\delta+x)}$; et ſumtis quadratis $1 + xx + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x + \delta x^3 = 9\delta x + 9xx$. Hinc fit $1 + 2\sqrt{\delta x} + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 8\delta x + 8xx$. Ex qua primum patet ſi fuerit $\delta = 0$ ſeu angulus $AC\alpha$ infinite paruus, fore $8xx = 1$ et $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. Hoc ergo caſu erit tang. $eCA = 0,3535534$, ideoque angulus $eCA = 19°, 28'$. et ob $ACM = 0$ erit $LCe = 70°, 32'$, ac propterea angulus $VCe = 35°, 16'$.

§. 938. Quanquam autem aequatio inuenta $1 + 2\sqrt{\delta x} - 8\delta x - 8xx + 2xx\sqrt{\delta x} + \delta x^3 = 0$ commode re-

 ſolui

Digitized by Google

ſolui nequit, tamen quia δ eſt quantitas valde parua, per approximationem verus valor ipſius x facile elici poterit. Aequatio enim transformatur in hanc $(1-2\sqrt{\delta x})(1+4\sqrt{\delta x}) = xx(2-\sqrt{\delta x})(4+\sqrt{\delta x})$, vnde fit $x = \sqrt{\frac{(1-2\sqrt{\delta x})(1+4\sqrt{\delta x})}{(2-\sqrt{\delta x})(4+\sqrt{\delta x})}}$. Cum iam valor ipſius x non multum diſcrepet ab ante inuento $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$, ſi hic valor ſubſtituatur erit accuratius $x = \sqrt{\frac{(\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\delta})(\sqrt[4]{8}+4\sqrt{\delta})}{(2\sqrt[4]{8}-\sqrt{\delta})(4\sqrt[4]{8}+\sqrt{\delta})}}$; qui ſi nondum ſatis accuratus videatur, is denuo in formula inuenta loco x ſubſtituatur, ſicque prodibit valor nouus pro x ad veritatem proxime accedens. Hoc ergo modo pro quouis caſu valor ipſius $x =$ tang. eCA eruetur, vnde ſimul habebitur tang. $ACM = \sqrt{\frac{\delta}{x}} = \frac{\sqrt{\delta x}}{x}$; quo cognito angulus incidentiae $VCe = \frac{90 - eCM}{2}$ innoteſcet.

§. 939. Quo hunc calculum exemplo illuſtremus, ſit vti ante poſuimus $\delta = \frac{1}{9}$ et ang. $AC\alpha = 6°, 21'$, ſumto $x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0,3535534$; erit $\delta x = 0,0392837$ et $\sqrt{\delta x} = 0,1982008$; vnde reperitur $x = 0,3781247$. Hinc denuo habebitur $\sqrt{\delta x} = 0,2049728$; hocque valore ſubſtituto emergit $x = 0,3771825$, et $l\,x = 9,5765516 = l$ tang. eCA. ex quo valore vero proximo oritur ang. $eCA = 20°, 40'$; et l tang. $ACM = l\frac{\sqrt{\delta x}}{x} = 9,7346029$. ſeu $ACM = 28°, 30'$; hinc prouenit angulus $eCM = 49°, 10'$; et $90° - eCM = 40°, 50'$ quare erit angulus incidentiae $VCe = 20°, 25'$. Maxime ergo nauis aduerſus ventum penetrabit ſi vterque angulorum VCe et eCA fuerit circiter $20\frac{1}{2}°$ ſeu propemodum duorum rhumborum, quae nauis velorumque diſpoſitio fere a nauigantibus ſedulo obſeruari ſolet.

§ 940.

Digitized by Google

§. 940. Etſi hoc idem argumentum in ſuperiori libro am fuſius eſt pertractatum, tamen pro vſu practico viſum eſt has regulas tradere. Primum enim hypotheſes quas ibi et hic ſum contemplatus, inter ſe differunt, atque in eiusmodi negotio, in quo ipſam veritatem attingere non licet, multitudo hypotheſium inutilis eſſe nequit. Tum vero quod caput rei eſt, ibi ventum abſolutum conſideravi, cuiusmodi appareat obſeruatori in loco firmo conſtituto, cum autem in mari non liceat venti tam verum directionem quam veram vim obſeruare, hoc loco omnia ex vento apparente deduxi: ex quo diuerſitas vtriusque tractationis eo minus eſt admiranda. Ceterum harum regularum obſeruatio non turbatur eo, quod motu nauis variato ipſa directio venti apparens mutetur; perpetuo enim ad directionem venti praeſentem ſpectari oportet, ad eamque nauem ac vela accommodari.

§. 941. Definita tam nauis directione quam velorum diſpoſitione conuenientiſſima ad curſum adverſus ventum inſtituendum, etiam ipſa nauis celeritas definiri, ſeu cum celeritate, qua eodem vento ſecundo exiſtente eſſet progreſſura, comparari poterit. Si ventus eſſet ſecundus atque vela ita diſponantur, vt ſit angulus $eC\alpha = 90^\circ$, atque angulus VCe ſtatuatur 60° (maiorem non pono, quia alias non tota velorum ſuperficies inflaretur), foret quadratum celeritatis nauis vt $\frac{1}{4}$. Quando autem eadem nauis contra ventum luctatur, erit vt vidimus ang $eC\alpha = 27^\circ, 1'$ et $VCe = 20^\circ, 25'$ hinc ex (917) orietur quadratum celeritatis vt 0, 055278. Ergo celeritas navis ſecundo vento motae eſt ad nauis celeritatem vento aduerſo motae vt 1 ad $\sqrt{\frac{4}{1}}.$ 0, 055278 hoc eſt vt 1

 ad

Digitized by Google

ad 0, 27148, ſeu proxime vt 11 ad 3; curſu igitur contra ventum inſtituto nauis celeritas fere ad quartam vsque partem diminuitur, celeritas autem, qua nauis in regionem, vnde ventus venit, procedit, fit circiter triplo minor; nauis ita vndecies tardius in regionem propoſitam progreditur vento exiſtente contrario, quam ſi eſſet ſecundus.

§. 942. Plurimum autem iſta nauis contra ventum promotio pendet a ratione inter reſiſtentiam prorae et lateris ſeu ab angulo $AC\alpha$ quem hic aſſumſimus $= 6°, 21'$. Quo igitur facilius perſpiciatur, quantum nauis, in qua iſte angulus minor exiſtit, contra ventum procedere valeat, caſum illum euoluamus, in quo angulus $AC\alpha$ ac propterea declinatio nauis euaneſcit. Supra autem vidimus hoc caſu ſumi debere ang. $eCA = eC\alpha = 19°, 28'$, et $VCe = 35°, 16'$. erit ergo $VCA = VCM = 54°, 44'$, vnde et celeritas nauis contra ventum obluctantis erit vt ſin. $35°, 16' \surd$ ſin. $19°, 28' = \frac{1}{3}$. Cum ergo celeritas vento exiſtente proſpero ſit vt $\frac{\surd 3}{2}$ erit haec nauis celeritas ad illam vti $3\surd 3$ ad 2, hoc eſt proxime vt 21 ad 8. Sin autem celeritas deriuatiua quaeratur, qua nauis actu in venti plagam promouetur, erit ea $\frac{1}{3\surd 3}$; hinc ergo nauis vento exiſtente contrario in regionem propoſitam progreditur celeritate vt 2, dum eiusdem celeritas, ſi ventus eſſet ſecundus, foret vt 9. Hoc ergo caſu nauis plus quam duplo celerius contra ventum promouetur, quam caſu praecedente.

§. 943. Hinc igitur luculenter perſpicitur, quantum anguli $AC\alpha$ paruitas motum aduerſus ventum inſtituendum acceleret. Quamobrem in conſtructione nauium e-

tiam

tiam in hoc maxime erit incumbendum, vt angulus ACa quantum fieri poteſt diminuatur: id quod efficietur reſiſtentiam lateralem prae reſiſtentia prorae plurimum augendo. Ad hoc ergo duplex patet via: altera, vt prorae reſiſtentia plurimum diminuatur, quod quidem iam nauis acceleratio in curſu directo potiſſimum requirit. Altera autem via huic ſcopo propria eo tendit, vt reſiſtentia lateralis quantum fieri poteſt augeatur; quod primo augenda longitudine nauis obtinetur: tum vero conformatio laterum ita debet eſſe comparata, vt aqua in curſu obliquo ſub non nimis acuto angulo incidat. Imprimis vero figura ſpinae non parum huc confert, ſi ei tanta craſſities tribuatur, vt multum infra nauem promineat; huius prominentiae enim reſiſtentia notabiliter reſiſtentiam lateralem augebit.

§. 944. Cum igitur motus nauium progreſſiuus in curſu obliquo nihil in malorum conſtitutione ante tradita immutandum poſtulet, ad reliqua capita, quorum ratio in nauium conſtructione et nauigatione eſt habenda, progrediamur. Supereſt ſcilicet vt inquiramus, quantum nauis curſu obliquo lata inclinetur circa axem tam longitudinalem quam latitudinalem; atque hinc ſimul praecepta colligentur, pro nauium conſtructione atque malorum collocatione, vt minima inclinatio circa axem longitudinalem conſequatur. Quod enim ad inclinationem circa axem latitudinalem attinet, de ea iam in capite praecedente abunde eſt tractatum. Denique vero inueſtigari debebunt vires ex curſu obliquo natae, quibus nauis circa axem verticalem conuertatur; atque actio gubernaculi perturbetur;

tur; vt iis cognitis medela idonea inueniri, ſicque curſus nauis gubernaculi beneficio conſeruari queat.

Tab. XXVII. fig. 3. §. 945. Inclinatio autem nauis partim a vi venti vela tendentis, partim a vi aquae in ſuperficiem nauis impingentis oritur: ex quibus viribus coniunctis naſcitur momentum inclinationem producens, cuius effectus determinatur per nauis ſtabilitatem. Sit tota vis a vento excepta $= P$, cuius directio erit ad velorum ſuperficiem normalis. Si ergo in curſu obliquo fuerit ef velorum poſitio atque angulus ACe ponatur $= p$, media directio vis venti CP cum axe longitudinali AB conſtituet angulum $ACP = 90 - p$. Reſoluatur haec vis P in duas laterales ſecundum axes nauis CA et CF erit vis ſecundum directionem $CA = P$ ſin. p et vis ſecundum directionem $CF = P$ coſ. p. Cum iam media directio vis venti in ſublimi ſit ſita, ponatur eius altitudo ſupra nauis centrum grauitatis $= k$ hincque erit momentum reſpectu axis latitudinalis proram ſubmergere conans $= Pk$ ſin. p, momentum vero reſpectu axis longitudinalis latus nauis dextrum deprimere conans $= Pk$ coſ. p.

§. 946. Ad vim ex reſiſtentia ortam aeſtimandam ſit CM directio, ſecundum quam nauis propellitur. Ac primo quidem notandum eſt mediam directionem virium aquae ad horizontem eſſe inclinatam, ac ſurſum vergere, propterea quod ſuperficies carinae ſurſum diuergere ſolet, a cuius figura pendet inclinatio mediae directionis virium aquae ad horizontem. Repraeſentet ergo $AEBF$ ſectionem nauis horizontalem per centrum grauitatis C factam, perquam tranſeat media directio virium aquae OS in puncto O, ſitque angulus, quo haec directio ad horizontem

incli-

Digitized by Google

inclinatur $SOR = q$; et ipſa vis $OS = Q$, quae reſoluitur in verticalem $OQ = Q$ ſin. q, et horizontalem $OR = Q$ coſ. q. Perſpicuum igitur eſt, vim horizontalem OR, quoniam eius directio in eodem plano eſt ſita, in quo axes nauis longitudinalis AB et latitudinalis EF iacent, nullam inclinationem circa hos axes producere; ſed omnem vim inclinantem, quae quidem a vi aquae oritur a vi verticali $OQ = Q$ ſin. q eſſe petendam.

§. 947. Quoniam vero nauis a vi CP propulſa eiusmodi curſus directionem obliquam CM ſequitur, in qua vis reſiſtentiae horizontalis OR directionem obtineat parallelam vi propellenti, atque inſuper tantam celeritatem acquirat, vt vis reſiſtentiae horizontalis $OR = Q$ coſ. q aequalis fiat vi propellenti P; primum ex cognito puncto O dabitur directio vis horizontalis OR, quippe quae directioni CP erit parallela. Hinc producta OR, donec vtrumque axem ſecat in K et L erit angulus $CLO = p$, et angulus $AKO = 90 - p$. Deinde vero ex aequatione $P = Q$ coſ. q innoteſcet vis aquae $Q = \frac{P}{coſ. q}$. Quamobrem reſultabit vis verticalis $OQ = Q$ ſin. $q = P$ tang. q. Ducta ergo ex puncto O recta OI axi AB parallela, quae alteri axi EF occurrat in I; erit momentum ex alliſione aquae ortum reſpectu axis longitudinalis $AB = P . CI .$ tang. q et momentum reſpectu axis latitudinalis $EF = P . OI .$ tang. q; quae ergo momenta ex ſolo ſitu puncti O, et angulo $SOR = q$ determinantur.

§. 948. Nauis ergo circa axem longitudinalem dextrorſum inclinabitur a momento virium $= Pk$ coſ. $p - P . CI .$ tang. q; quod omiſſa vi abſoluta P fit proportionale huic formulae k coſ. $p - CI .$ tang. q. Momentum vero,

 quo

quo nauis circa axem latitudinalem EF antrorſum inclinabitur, erit $= Pk$ ſin. $p - P. OI$. tang. q, ſeu vt k ſin. $p - OI$. tang. q. Quoniam vero jam ante in curſu directo nauem ita conſtituimus, vt inclinatio circa axem latitudinalem nullum impedimentum afferat, multo minus in curſu obliquo quicquam ab inclinatione circa iſtum axem erit metuendum. Primum enim ipſa vis venti oblique in vela incidentis multo erit minor tum vero etiam quantitas huius vis decreſcit cum ſinu anguli ACe; quam ob duplicem cauſam inclinatio nauis circa axem latitudinalem nullius prorſus erit momenti, neque idcirco eius rationem hoc loco haberi conueniet; ſed ſufficiet inclinationem circa alterum axem AB perpendiſſe.

§. 949. Cum igitur momentum nauem ad latus inclinare conans ſit vt k coſ. $p - CI$ tang. q, niſi ſit k coſ. $p = CI$. tang. q. nauis actu circa axem longitudinalem AB inclinabitur; ipſius vero inclinationis quantitas pendebit a ſtabilitate nauis reſpectu huius axis, ita vt quo maior fuerit haec ſtabilitas eo minorem nauis ſubitura ſit inclinationem. At vero reliquae nauium qualitates minime concedunt, vt quantitas CI. tang. q aequalis reddatur ipſi k coſ. p, cum ad hoc nimis magna nauis latitudo requiratur atque adeo ſaepenumero euenire ſolet vt ob punctum I vltra C cadens quantitas CI. tang. q negatiuum valorem induat, quibus caſibus momentum k coſ. p ex vi venti ortum adeo augetur a vi aquae, ideoque niſi ſtabilitas fuerit ſumma vel nauis in curſu obliquo maxime periclitabitur, vel non niſi exigua velorum inferiorum copia vti poterit, quo momentum ex vi venti ortum non maius euadat, quam quidem ſine periculo ſuſtineri queat.

§. 950.

§. 950. Quo igitur omnia vela ad curſum obliquum inſtituendum tuto adhibere liceat, hoc ante omnia erit efficiendum vt diſtantia puncti O ab axe AB, ſeu intervallum CI non euaneſcat; multo minus valorem negatiuum nanciſcatur. Cum igitur directio media virium aquae OS ad planum verticale per AB ductum ſurſum conuergat, idque tandem traiiciat, manifeſtum eſt, quo altius ſita fuerit ſectio horizontalis AEBF, eo propius punctum O ad rectam AB admotum iri, atque tandem vltra eam cadere debere. Quoniam itaque haec ſectio horizontalis AEBF per centrum grauitatis nauis tranſire ponitur, perſpicuum eſt, quo altius poſitum fuerit centrum grauitatis nauis, eo minus futurum eſſe internallum CI; hocque adeo negatiuum fieri poſſe. Quamobrem ad iſtud inſtitutum hoc maxime requiritur, vt centrum grauitatis nauis quantum fieri poteſt, deprimatur. Quod idem cum etiam nauis ſtabilitas poſtulet, nullaque ratio contrarium requirat, maximum lucrum ex depreſſione centri grauitatis, in vniverſam nauigationem redundabit.

§. 951. Quodſi autem hoc fuerit effectum, vt intervallum CI notabilem magnitudinem ſit nactum, curandum erit praeterea, vt valor quantitatis CI. tang. q tam prope ad valorem k coſ. p adducatur, quam quidem fieri poteſt. Hoc autem praeſtabitur angulum SOR, quo media directio virium aquae ad horizontem inclinatur, plurimum augendo; in ratione enim tangentis huius anguli valor CI. tang. q augebitur. Dum igitur reſiſtentia aquae ſecundum directionem verticalem facta augetur, inclinatio nauis in curſu obliquo diminuitur. At vero aucta reſiſtentia verticali ſimul reſiſtentia horizontalis minor reddi-

Digitized by Google

tur, hocque ipſo nauis motus acceleratur; hancobrem diminutio reſiſtentiae horizontalis non ſolum naui motum celeriorem conciliabit, ſed etiam nauem aptiorem efficiet, quo magis in curſu obliquo inclinationi ad latera reluctari valeat. Haeque adeo rationes coniunctae augmentum reſiſtentiae verticalis maxime ſuadent.

§. 952. Quemadmodum autem ad hunc ſcopum attingendum, nauis figuram comparatam eſſe oporteat, curatius perpendamus. Quod quidem ad figuram prorae attinet ea ex curſu directo iam ſatis definita videtur, poterit autem ex iis, quae de figura laterum carinae praecipientur, magis perfici. Contemplemur ergo carinae ſectionem verticalem ad axem AB normalem, eiusmodi in loco, vbi latera nauis neque conuergunt neque diuergunt ſenſibiliter. Huius ſectionis ſemiſſis ſit CEHD; et centrum grauitatis nauis in G; ac primo quidem patet, prominentiam ſpinae Dd, quae ante ad curſum contra ventum inſtituendum erat commendata, nunc fieri pernicioſam. Quoniam enim aqua in hanc prominentiam incidens agit ſecundum directionem horizontalem Dr, haec vis quo fuerit maior, eo magis momentum, quo nauis circa axem longitudinalem inclinatur, augebitur. Cum igitur ſpinae prominentia alio reſpectu ſit vtilis alio damnoſa, eam ſatis paruam ſtatui oportebit.

Fig. 4.

§. 953. Deinde manifeſtum eſt ad curſum obliquum inſtituendum, naues fundo horizontali praeditas maxime eſſe ineptas. Si enim $CEbD$ eſſet ſectio nauis tranſuerſa baſin habens Db horizontalem, ſolum latus Eb vim aquae patietur, cuius adeo directio fere erit horizontalis, vnde et angulus q diminuetur, et interuallum CI negati-

vum

rum reddetur, niſi forte centrum grauitatis G puncto D propius fuerit quam ipſi C, quod autem in grandioribus nauibus nunquam vſu venit. Hancobrem fundum carinae DH aliquantum ſurſum vergere oportebit, quo et reſiſtentiam ſuſtineat, et ipſius directionem IK ſurſum proiiciat. Neque vero hanc eleuationem ſeu angulum H D*b* nimis magnum eſſe oportet, quoniam, licet vis aquae in fundum augeretur, tamen directio IK deprimeretur, atque infra G rectam verticalem CD traiiceret, quo ipſo non ſolum vis nauem inclinans non diminueretur, ſed etiam augeretur; ad quod accedit, quod reſiſtentia lateris EH hanc vim inclinantem etiam augeat, niſi centrum grauitatis G in ſemiſſem inferiorem altitudinis CD cadat.

§. 954. Quoniam igitur nec fundus carinae DH horizontalis eſſe poteſt, et latus EH, ſi fuerit verticale inclinationem non minuit, atque eiusmodi anguli vti H euitari debent, figuram DHE in curuam continuam formari conueniet. Ponamus ergo ſectionem carinae transverſam eſſe ſemicirculum, eiusque ſemiſſem quadrantem DIE; quo caſu latitudo carinae erit ad eius profunditatem vt 2 ad 1. Media igitur directio vis aquae impingentis IC tranſibit per punctum C; quod idem eueniret, ſi loco quadrantis figura quaecunque ipſi inſcripta ſubſtituatur, quoniam vero capacitati carinae eſt conſulendum, et anguli vitari debent, ipſe quadrans omnibus figuris inſcriptis merito antefertur. Quodſi ergo centrum grauitatis nauis in ipſam ſuperficiem aquae incidat, tum vis aquae IC inclinationem nauis neque diminuet neque augebit, ſin autem centrum grauitatis infra aquae ſuperficiem cadat in Fig. 5.

 G,

G, tum vtique ab hac vi inclinatio nauis minuetur. Contra vero haec vis inclinationem augebit, ſi centrum grauitatis nauis ſupra aquae ſuperficiem cadat.

§. 955. Niſi ergo centrum grauitatis nauis infra aquae ſuperficiem cadat, ſectiones carinae transuerſales figuram ſemicirculi induere nequeunt; neque propterea carinae profunditas ſemiſſem latitudinis aequare poterit. Supra vero iam, cum de ſtabilitate ageretur, oſtenſum eſt, profunditatem carinae ſemiſſem latitudinis excedere non oportere, cum igitur haec duo praecipua capita, ad quae in nauium conſtructione eſt reſpiciendum, tam egregie conſpirent, per ea figura ſectionum tranſuerſalium carinae optime determinatur. Ante omnia ſcilicet ad ſitum centri grauitatis totius nauis eſt attendendum, quod vel infra aquae ſuperficiem in G cadet, vel in ipſam aquae ſuperficiem in C, vel ſupra eam in *g*. Priori igitur caſu, ſi interuallum CG ſit notabile, ſectionibus tranſuerſalibus carinae commode figura ſemicircularis tribuitur, atque latitudo carinae duplo maior quam eius profunditas ſtatuitur. Quo profundius enim poſitum fuerit centrum grauitatis G, eo magis non ſolum vis inclinationi reſiſtens augebitur, ſed etiam ſtabilitas nauis maior redditur; ſicque ob duplicem cauſam nauis inclinatio in curſu obliquo diminuitur.

§. 956. Caſus hic imprimis locum habet in nauibus onerariis, in quibus maxima onerum pars infra aquae ſuperficiem condi ſolet; tum enim totius nauis commune centrum grauitatis infra aquae ſuperficiem, deprimitur. In nauibus autem alii ſcopo deſtinatis ac praecipue bellicis, vbi tormenta ſupra aquae ſuperficiem collocari debent, centrum grauitatis non ſolum in aquae ſuperficiem C ſed etiam

Digitized by Google

etiam ſupra eam in g, cadere ſolet. His igitur caſibus media directio vis aquae ic ſupra centrum grauitatis g cum verticali DC puta in c collineare debet. Quare ſi ſectionis carinae figura fuerit circularis, vel non multum ab ea abhorreat, vti fieri ſolet, eius figura centro c deſcripta eſſe debebit. Erit ergo Die figura ſectionis transuerſae carinae, quae propterea erit ſegmentum circuli centro c deſcripti atque latitudo ſectionis 2Ce ſuperabit profunditatem CD bis ſumtam. Perſpicuum vero etiam eſt, mediam directionem ic maiorem cum horizonte angulum facere quam caſu priore.

§. 957. His itaque caſibus, quibus centrum grauitatis nauis non infra ſuperficiem aquae cadit, profunditas carinae CD minor eſſe debet, quam ſemiſſis latitudinis Ce. Euidens autem eſt, quo magis ratio Ce ad CD excedat rationem aequalitatis, eo minorem inclinationem in curſu obliquo nauem eſſe ſubituram. Primo enim aucta latitudine Ce, punctum c altius eleuabitur, hocque momentum virium aquae inclinationi obluctans augebitur. Tum vero ob eandem Ce auctam ſtabilitas nauis non mediocriter increſcit, atque idcirco inclinationem nauis diminuit, atiamſi alias vis inclinans eſſet eadem. Cum autem ſit $Cc > Ee$, perſpicuum eſt, exiguum rationis Ce ad CD exceſſum ſupra rationem aequalitatis, vehementer inclinationem impedire, quia centrum grauitatis g non multum ſupra aquae ſuperficiem cadere ſolet. Sumta ergo ſemi latitudine Ce aliquanto maiori quam CD, vel CE, erit $Cc = Ee + \frac{Ee^2}{2CD}$; tum centro c deſcribatur arcus circuli Die per D tranſiens, erit CDie aptiſſima figura ſectionum carinae transuerſalium.

§. 958.

§. 958. Hoc igitur modo ſectiones nauis verticales ad axem longitudinalem normales ita formantur, vt a vi aquae in latera nauis impingente vis inclinans diminuatur, quo pacto ipſa nauis inclinatio ob auctam ſimul ſtabilitatem multo minor reddetur. Imprimis vero ab aqua in proram allabente vis inclinans debilitabitur; hoc enim loco directiones virium aquae multo magis ſurſum vergent, atque ab axe longitudinali erunt remotae. Quo igitur effectus huius vis maior exiſtat, neceſſe eſt vt in ſectionibus transverſis prorae, latitudo Ce maiorem habeat rationem ad profunditatem CD, quam in corpore nauis. Cum ergo proram verſus altitudines CD minores euadant, latitudo Ce in minore ratione decreſcere debebit; vel ſectio nauis horizontalis in ſuperficie aquae facta proram verſus obtuſior eſt conſtituenda, quam ſectio verticalis per mediam nauem facta; quo in ſectionibus transuerſis proram verſus ratio Ce ad CD continuo maior prodeat.

§. 959. Parem autem nauis conformationem requiret vltima conditio, quae perpendenda reſtat, qua effici oportet, vt gubernaculi ope nauis ſtatu ſuo conſeruari, atque ad lubitum dirigi queat. Pendet vero haec disquiſitio a momentis virium nauem ſollicitantium reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis nauis ducti. Quodſi haec momenta penitus ſe deſtruant, directio nauis a ſola gubernaculi actione pendebit; ideoque talis virium ſtatus ad gubernationem maxime accommodatus videtur. Quoniam vero ſupra vidimus in curſu obliquo CM nauem difficulter gubernaculi ope ad eam partem e, vnde ventus venit dirigi poſſe, propterea quod aqua in gubernaculum verſus iſtam plagam inflexum nimis exigua vi impingat; expediet,

diet, vires nauem conuertentes non omnino ſe deſtruere, ſed eas, quae proram verſus ventum conuertere valeant, non nihil praeualere; tam parum autem, vt effectus inde oriundus gubernaculi beneficio facile coerceri queat. Sic enim, ceſſante gubernaculi actione, nauis ſponte aduerſus ventum dirigetur, quem effectum alias gubernaculum producere non valeret. Tab. XXVII. fig. 6.

§. 960. Quoniam igitur hic momenta virium reſpectu axis verticalis per centrum grauitatis nauis tranſeuntis inveſtigamus, ſolae vires horizontales erunt conſiderandae. Ac directio quidem media virium a vento exceptarum ipſa eſt horizontalis, vnde eius diſtantia ab axe verticali determinabit ipſius momentum reſpectu huius axis. Sit A CBF ſectio nauis ſecundum aquae ſuperficiem facta, A prora, B puppis et G punctum, per quod axis verticalis tranſeat, quod ideo propemodum circa medium nauis ſitum erit. Sit porro CP media directio vis venti ad hoc planum relata, ipſa vero haec vis ponatur $=$P. Tum vero repraeſentet KR directionem mediam reſiſtentiae aquae, ſeu vis quam aqua ſecundum directionem horizontalem exerit. Erit ergo vti vidimus haec directio KR parallela directioni CP, atque ipſa aquae vis $=$P. His igitur duabus viribus nauis verſus A*a* conuertetur momento $=$P.KC. ſin. ACP; ſcilicet ſecundum figuram prora erga ventum conuertetur.

§. 961. Pendet ergo iſte effectus a poſitione punctorum C et K atque ipſe puncti G locus ex computo egreditur. Quamobrem ſi punctum K, in quo media directio

ctio reſiſtentiae axem AB traiicit, ante punctum C proram verſus cadat, nauis ad ventum conuertetur eo maiori vi, quo maius fuerit interuallum KC ceteris paribus. Niſi igitur iſtud momentum tam ſit paruum vt per actionem gubernaculi vinci poſſit, nauis curſum tenere non poterit. Sin autem punctum C ante punctum K cadat, effectus orietur contrarius atque nauis a vento detorquebitur, qui effectus etiamſi eſſet maxime debilis, tamen a gubernaculo deſtrui non poſſet. Gubernaculum enim in ſitum B*b* dirigi deberet, in quo non niſi perexiguam aquae vim ſentiret. Hinc maxime cauendum eſt, ne punctum C propius ad proram B accedat quam punctum K. Aptiſſime autem haec duo puncta erunt collocata, ſi tantum non congruant, atque punctum K tantillum propius ſit prorae, quam punctum C, vt interuallum CK reddatur minimum ob rationes modo allegatas.

§. *962*. Locus autem puncti K a figura carinae pendet, cuius ſectiones horizontales quo magis proram verſus conuergant atque acuminentur, eo propius punctum K ad proram A accedet. Punctum vero C a velorum per nauis longitudinem diſtributione, atque adeo ab arbitrio noſtro pendet. Si enim vela aequabiliter per totam nauis longitudinem diſponantur punctum C in medium fere lineae AB punctum cadet, ſi quidem ventus in omnia vela aequaliter irruere poſſit, quod autem in curſu obliquo fieri ſolet. Quodſi ergo punctum K nimis prope ad proram A eſſet ſitum, tum vela non aequaliter diſponi poſſent, ne interuallum CK nimis magnum proueniret, ſed plura vela circa puppim auferri deberent, quo punctum C propius ad pro-

Digitized by Google

proram perducatur. Sin autem punctum K nimis prope ad puppim B caderet, tum copia velorum proram verſus diminui deberet, donec punctum O in debitam a puncto K diſtantiam perduceretur.

§. 963. Quanquam autem numerum velorum vel proram vel puppim verſus diminuendo effici poteſt, vt puncta C et K debito interuallo a ſe inuicem ſint remota, tamen hoc pacto per velorum diminutionem vis nauem propellens debilitatur, hincque nauis motus progreſſiuus retardatur; id quod omni cura eſt euitandum. Quamobrem punctum K in eiusmodi loco conſtitutum eſſe oportet, vt omnibus velis expanſis punctum C ſatis prope ad K et quidem puppim verſus cadat. Solet autem in nauibus ob alias rationes prora multo magis velis onerari quam puppis, quo fit vt omnibus velis expanſis media directio virium venti CP propius ad proram quam ad puppim incidat, atque maximus etiam malus prorae propior quam puppi eſſe ſolet. Puncto igitur hoc C per aeſtimationem notato figura carinae ita debet eſſe comparata vt punctum K in idem fere punctum C cadat. Quamuis enim in hoc error quidam committatur, tamen is per velorum expanſionem ſine ſenſibili vis propellentis iactura corrigi poterit.

§ 964. Scilicet ſi carina eiusmodi habeat figuram, quae ab hoc ſcopo non multum diſſentiat; per experientiam copia velorum expandendorum facile definitur. Ponamus enim omnibus velis expanſis nauem aduerſus ventum vergere, indicium hoc erit punctum C puppi nimis eſſe vicinum, hancobrem velum quoddam circa puppim

vel auferatur vel aliter dirigatur, vt vis cónuertens ab eo orta diminuatur, hocque modo nauis ad ſitum fixum redigatur. Sin autem contra nauis a venti plaga depellatur, tum vela circa proram diminui debebunt, vnum alterumue vel tollendo vel aliter dirigendo. Simili modo ſi nauis magis erga ventum conuerti debeat, atque gubernaculi vis huic effectui non ſufficiat, tum vis conuertens velorum circa puppim aliquantum augeatur, quod fiet ſi vnum velum vento magis opponatur. Sic itaque poſtremum velum inſeruiet naui dirigendae, atque defectui gubernaculi ſupplendo.

Tab.XXVIII fig. 1. §. 965. Cum igitur data nauis longitudine AB in ſuperficie aquae facile innoteſcat punctum C, per quod media directio vis venti, ſi cuncta vela fuerint expanſa, eſt tranſitura; ſitque $AC < BC$. Tum centro C ad proram conſtituendam deſcribatur circulus bAi: atque ſumta ECF = latitudini nauis, ducantur axi AB parallelae bEm, et iFn, quae a recta EF biſecentur. Manifeſtum eſt, ſi ſectio nauis horizontalis figuram haberet $bAinm$, tum, quocunque curſu obliquo nauis feratur, mediam directionem reſiſtentiae per punctum C eſſe tranſituram. Cum autem eiusmodi figura naui non conueniat, figuram idoneam appropinquantem formari oportebit, cuiusmodi eſt AHE MBNFI, quae ſectionibus nauis horizontalibus tribuatur; in qua quidem ob proram magis rotundam media directio
Fig. 2. reſiſtentiae ante punctum C in K per AB tranſibit. Hinc igitur facile perſpicitur proram HAI ſatis obtuſam eſſe futuram, quod ipſum inclinationi nauis ad latus egregie inſeruit.

§. 966.

§. 966. Cum igitur ſectio nauis horizontalis in ſuperficie aquae facta hoc modo ſit determinata, ſectionem diametralem, quae verticaliter per medium nauis fit, conſideremus. Repraeſentetur ea per figuram A*a*D*b*B, qualem ſupra in curſu directo deſcripſimus. Statuatur ſcilicet profunditas CD aliquanto minor, quam ſemiſſis latitudinis CE vel CF, ſiquidem centrum grauitatis nauis in ipſam aquae ſuperficiem cadat vel ſupra eam. Denotat ergo A*a* accliuitatem prorae, quam inclinatio nauis in curſu directo determinat; et *d*B repraeſentat eleuationem puppis ſuper ſpina *db*, quo ob gracilitatem puppis ſub aqua tum ratione ſectionum horizontalium quam verticalium, aqua liberius in gubernaculum B*gb* incurrere queat. Reſiſtentia igitur nauis non multum per cuſpidationem horizontalem diminuetur, ſed maximam partem per eleuationem prorae *a*A, atque reſiſtentia eo minor reddetur quo magis angulus A diminuatur.

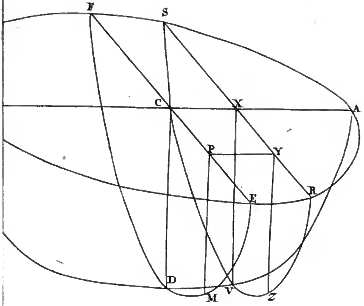
§. 967. Ex his duabus figuris ſectionis aquae et diametralis facile tota carinae forma conficitur, cum ſectio ampliſſima EDF iam ante ſit determinata, quippe quae erit ſegmentum circulare per data puncta E, D, et F ductum. Ex his autem omnes ſectiones transuerſales definiuntur, cum vniuscuiusque detur et latitudo et profunditas, id quod vel per figuras affines praeſtabitur, vti in primo capite oſtenum eſt, vel per figuras non multum ab hac ſimilitudine recedentes. Sic ſectio verticalis per *pq* tranſiens, cum latitudini *pq* coniuncta ſit profunditas *or*, pro figura huius ſectionis congrue aſſumi poterit ſegmentum circulare *prq*. Quod autem ad ſectiones transuerſa- Fig. 5. Fig. 4. Fig. 5.

 les

les puppim verſus attinet, eae pari modo ex datis latitudine ac profunditate facile determinantur; ſic ex latitudine xy et altitudine vz naſcetur figura xzy infra z cum ligno mortuo zu connexa. His obſeruatis itaque figura navis ad curſum obliquum inſtituendum aptiſſima orietur.

FINIS.

Digitized by Google



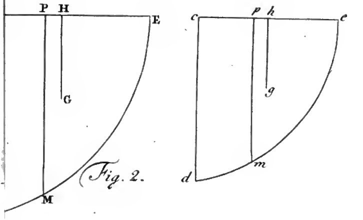


Fig. 2.

Tabula I.

Digitized by Google

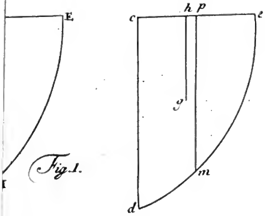
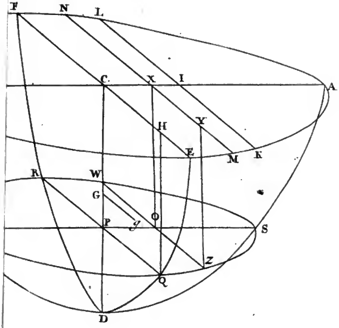


Fig. 1.



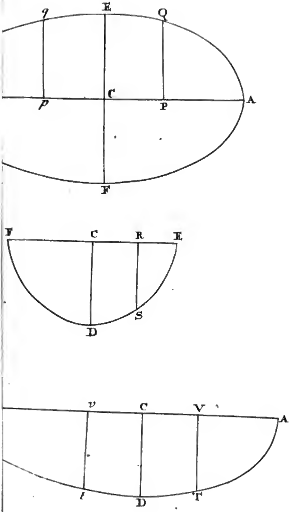
Tab. II.

Digitized by Google

7.

Digitized by Google

Digitized by Google



Tab. IV.

Digitized by Google





Digitized by Google

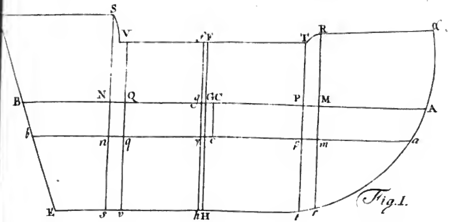


Fig. 1.

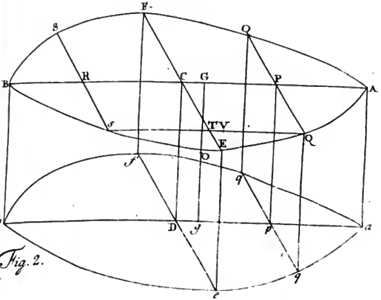
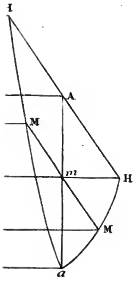


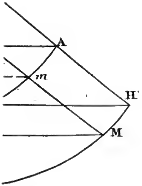
Fig. 2.

Tab. V.

Digitized by Google

Digitized by Google





Tab. VI.

Digitized by Google





Digitized by Google

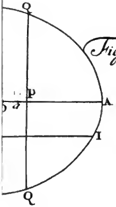
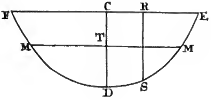


Fig. 1.

Fig. 2.



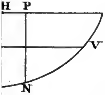


Fig. 3.

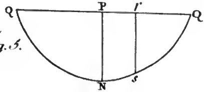
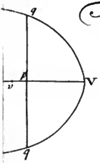


Fig. 5.



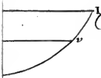


Fig. 6.

Tab. VII.

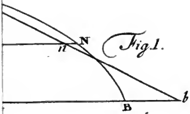
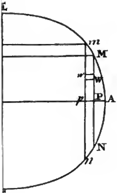


Fig. 1.



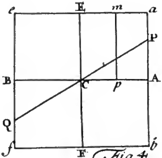


Fig. 4.

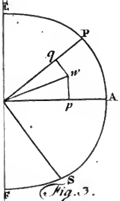


Fig. 3.

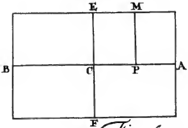


Fig. 5.

Tab. VIII.

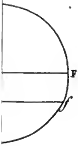
Digitized by Google



Y.

Digitized by Google

Digitized by Google



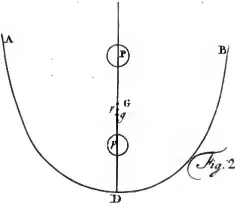
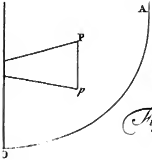


Fig. 2.



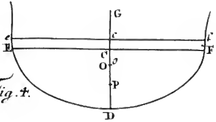
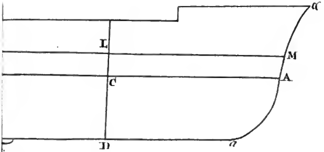


Fig. 4.



ig. 5.

Tab. X.

Digitized by Google

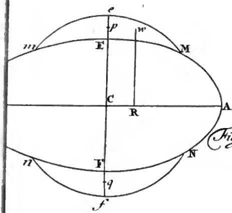
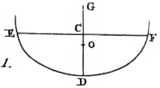
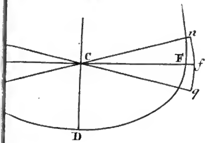


Fig. 1.





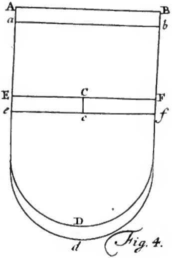


Fig. 4.

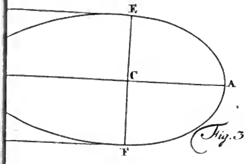


Fig. 3.

Tab. XI.

Digitized by Google

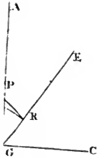


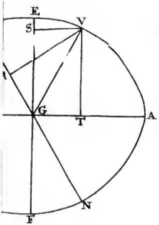
Fig. 2.



Tab. XII.

Digitized by Google

Digitized by Google



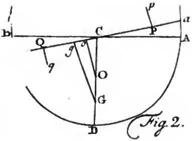


Fig. 2.

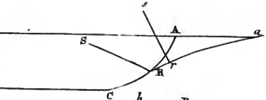
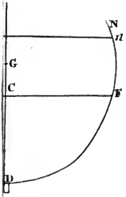


Fig. 3.



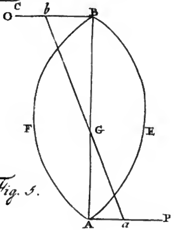


Fig. 5.

Tab. XIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

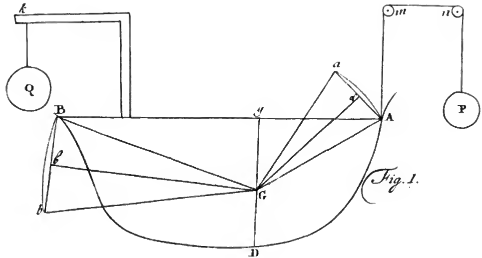


Fig. 1.

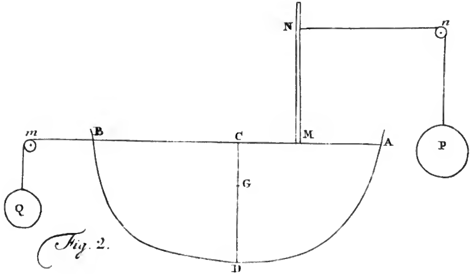


Fig. 2.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

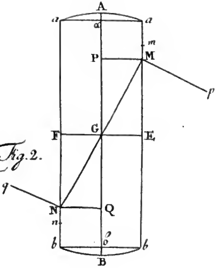


Fig. 2.



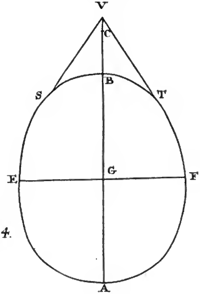


Fig. 4.

Tab. XVI.

Digitized by Google

Digitized by Google

41 1 45



Fig. 3.

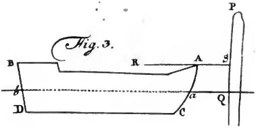


Fig. 4.

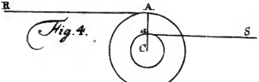


Fig. 5.

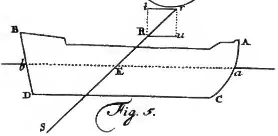


Fig. 2.

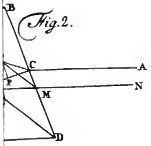
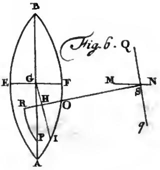


Fig. 6.



Tab XVII.

Digitized by Google

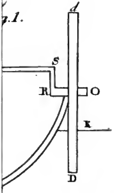
Digitized by Google



Digitized by Google

11.1 178

Fig. 1.



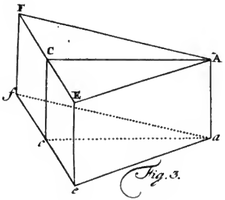
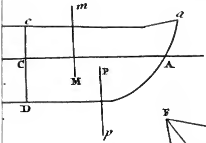


Fig. 3.



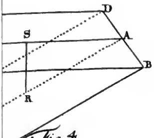


Fig. 4.

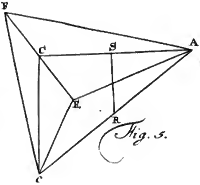


Fig. 5.

Tab. XIX.

Digitized by Google

Digitized by Google

11.A.158

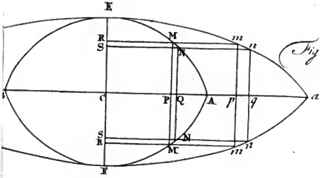
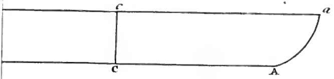


Fig. 1.

Fig. 2.



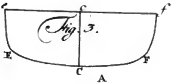


Fig. 3.

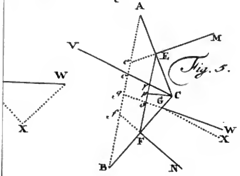


Fig. 5.

Tab XI.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

41. 1. 152

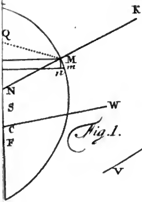


Fig. 1.

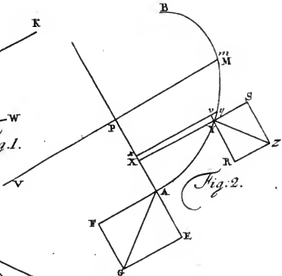


Fig. 2.

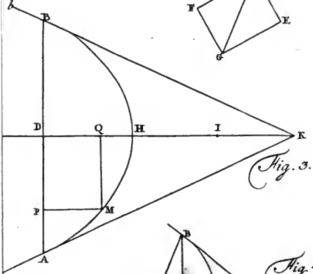


Fig. 3.

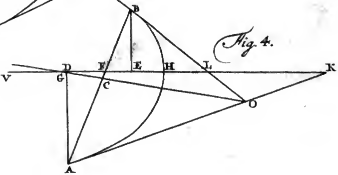


Fig. 4.

Tab. XXII.

Digitized by Google

Digitized by Google

H A 15?

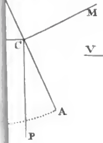


Fig. 1.

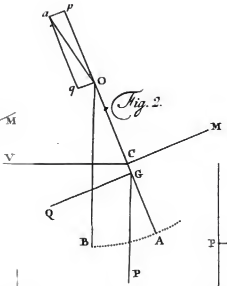


Fig. 2.

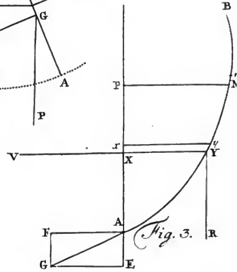


Fig. 3.

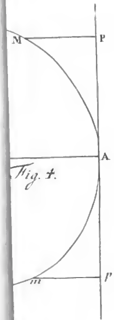


Fig. 4.

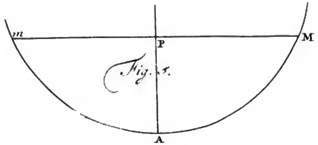


Fig. 5.

Tab XXIII.

Digitized by Google

Digitized by Google

A

2.

A

4.

A

XIIV.

Digitized by Google

11. 1. 153

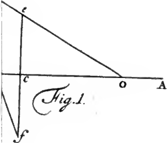


Fig. 1.

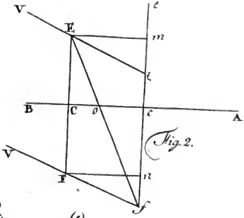


Fig. 2.

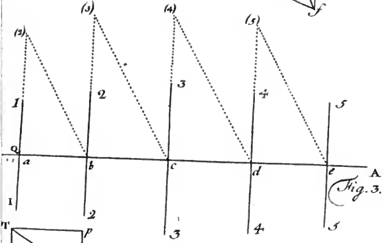


Fig. 3.

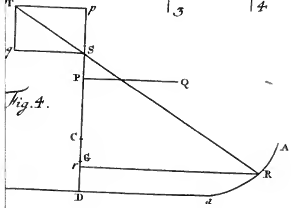


Fig. 4.

Tab. XXV.

Digitized by Google

Digitized by Google

41. 1. 158

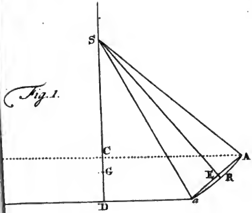


Fig. 1.

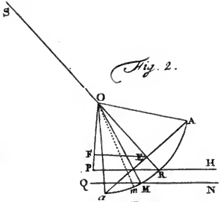


Fig. 2.

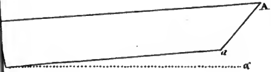


Fig. 3.

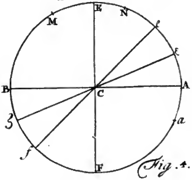


Fig. 4.

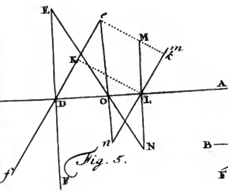


Fig. 5.

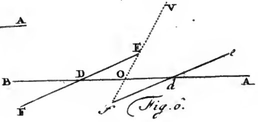


Fig. 6.

rs II.

Tab. XXVI.

Digitized by Google

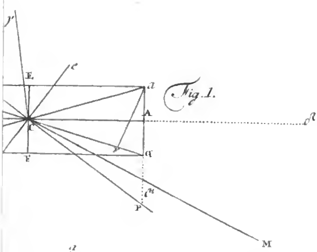


Fig. 1.

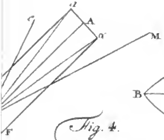


Fig. 4.

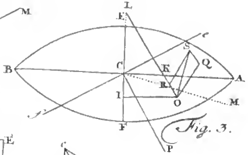
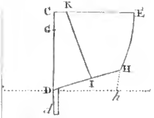
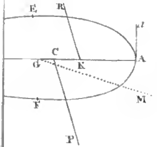


Fig. 3.





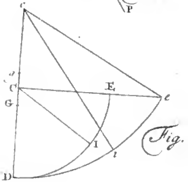


Fig. 5.

Tab.XXVII.

Digitized by Google

Digitized by Google

11 1.158

562

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

005635368
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google